Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 19 augusti 2014 med start 08.30 i M.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Hampus Linander, tel. 073-6266687, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 6 poäng totalt varav minst 3 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 6 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 3 poäng på varje del av tentan. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare inte är godkänd på någon del av kursen.
- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 3 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

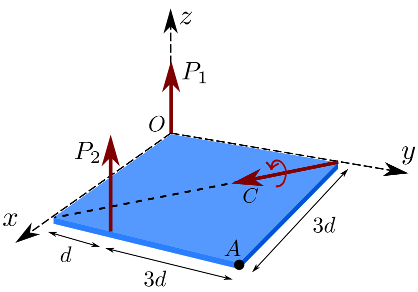
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på varje del av tentan, och maximalt 18 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 6-10 för betyg 3, 11-14 för betyg 4 samt 15-18 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredag 5/9 2014 kl.12-13 i sal FL61.

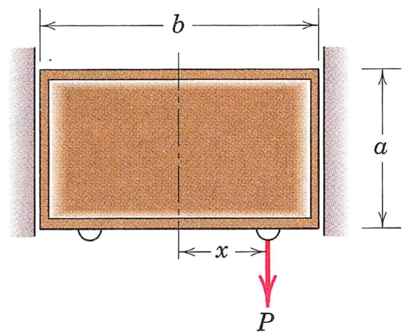
Lycka till!

Del 1

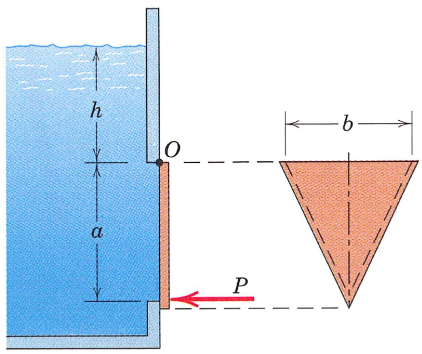
1. En kropp påverkas av två vertikala krafter med storlekarna P_1 och P_2 samt ett horisontellt vridmoment med storleken C enligt figuren. Detta kraftsystem är ekvivalent med en enda kraft med en viss given storlek F som angriper i punkten A. Uttryck P_1, P_2 och C i avståndet d och kraften F.



2. Byrålådan (som är avbildad uppifrån) har bredden b och djupet a. Den statiska friktionskoefficienten mellan lådan och byråväggarna är μ_s. (Avståndet mellan byråväggarna är lite större än b. Friktionskraften på lådans botten försummas.) Bestäm det största tillåtna värdet på avståndet x, så att lådan inte fastnar när man drar i endast ett av handtagen enligt figuren. Ledning: Var kommer kontaktpunkterna mellan lådan och byråväggarna att vara?

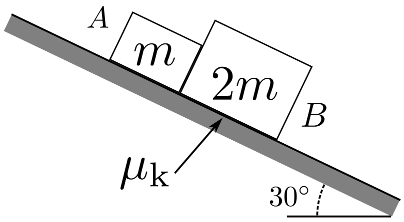


3. Vätskan har densiteten ρ. Den triangulära luckan är fritt vridbar kring en horisontell axel genom O vinkelrät mot papprets plan. Bestäm den minsta kraften P som behövs för att hålla luckan stängd.

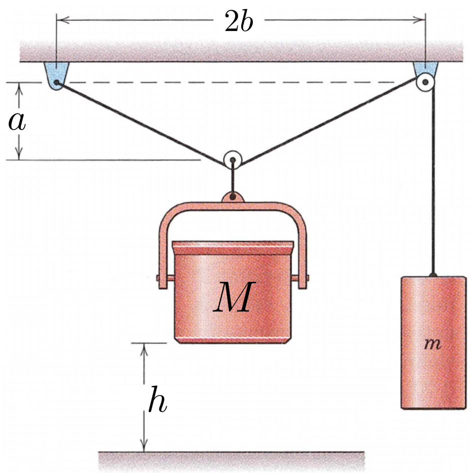


Del 2

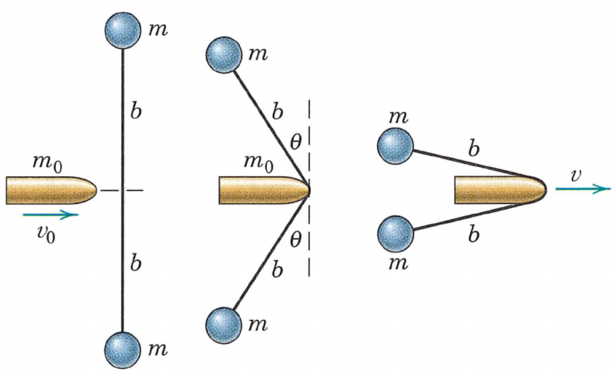
1. De båda klossarna är i kontakt med varandra medan de glider ner för det lutande planet. Den kinetiska friktionskoefficienten mellan kloss B och underlaget är μ_k. Bestäm deras acceleration samt normalkraften mellan dem. (Friktionen mellan kloss A och underlaget försummas.)



2. Massan M och avstånden a, b och h är givna. Systemet släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm massan m så att massan M precis kommer att vidröra underlaget innan den vänder.

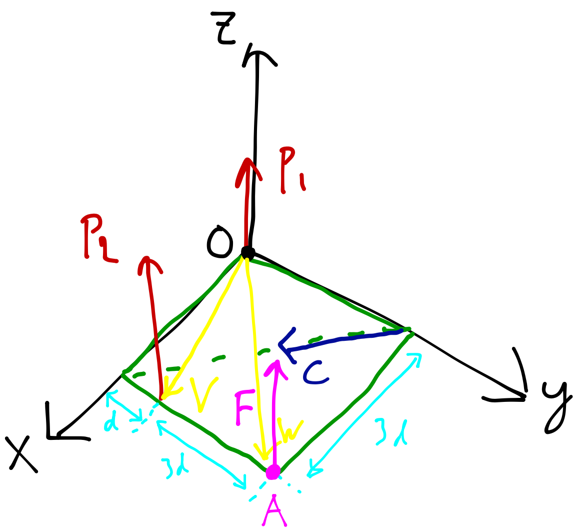


3. De båda kulorna har vardera massan m och är förenade genom en lätt lina med längden $2b$. De ligger i vila på ett glatt horisontellt underlag när linans mittpunkt träffas av en projektil med massan m_0 och hastigheten v_0. Bestäm projektilens hastighet v samt tidsderivatan $\dot{\theta}$ för vinkeln θ i ögonblicket omedelbart innan de båda kulorna träffar varandra (d v s då θ är nästan 90°).



Del 1

Uppgift 1



$$\vec{C} = C\left(\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}, 0\right) \qquad \vec{F} = (0, 0, F)$$ (Ty både P_1 a P_2 i $\hat{z}$ led)

$$\vec{V} = (3d, d, 0) \qquad \vec{W} = (3d, 4d, 0)$$

$$\vec{V} \times \vec{P_2} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3d & d & 0 \\ 0 & 0 & P_2 \end{pmatrix} = dP_2\hat{x} - 3dP_2\hat{y}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{C} + \vec{V} \times \vec{P_2} = \left(\tfrac{3}{5}C + dP_2, -\tfrac{4}{5}C - 3dP_2, 0\right)$$

$$M_0^F = \vec{W} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3d & 4d & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} = 4dF\hat{x} - 3dF\hat{y}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = F & (1) \\ \tfrac{3}{5}C + dP_2 = 4dF & (2) \\ -\tfrac{4}{5}C - 3dP_2 = -3dF & (3) \end{cases}$$

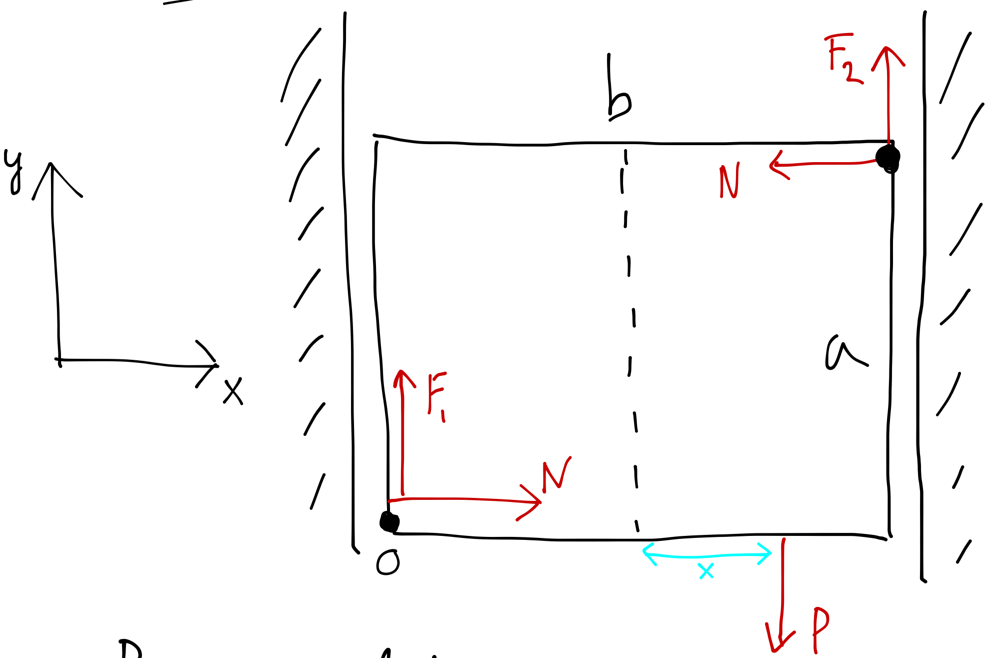
$$3\cdot(2) + (3): \left(\tfrac{9}{5} - \tfrac{4}{5}\right)C = (12 - 3)dF$$
$$C = 9dF$$

$$(2) \Rightarrow P_2 = \left(4 - \tfrac{27}{5}\right)F = -\tfrac{7}{5}F$$

$$(1) \Rightarrow P_1 = \left(1 + \tfrac{7}{5}\right)F = \tfrac{12}{5}F$$

$$C = 9dF$$
$$P_1 = \tfrac{12}{5}F$$
$$P_2 = -\tfrac{7}{5}F$$

Del 1
Uppgift 2



Jämvikt i x-led ger direkt att normalkrafterna måste vara lika stora.

Precis innan lådan rör på sig gäller att

$F_1 = \mu_s N$ & $F_2 = \mu_s N$

$$\begin{cases} -P\left(\frac{b}{2}+x\right) + Na + \mu_s N b = 0 & (1)\ \left(\circlearrowleft M_O = 0\right) \\ 2\mu_s N - P = 0 & (2)\ \left(\sum F_y = 0\right) \end{cases}$$

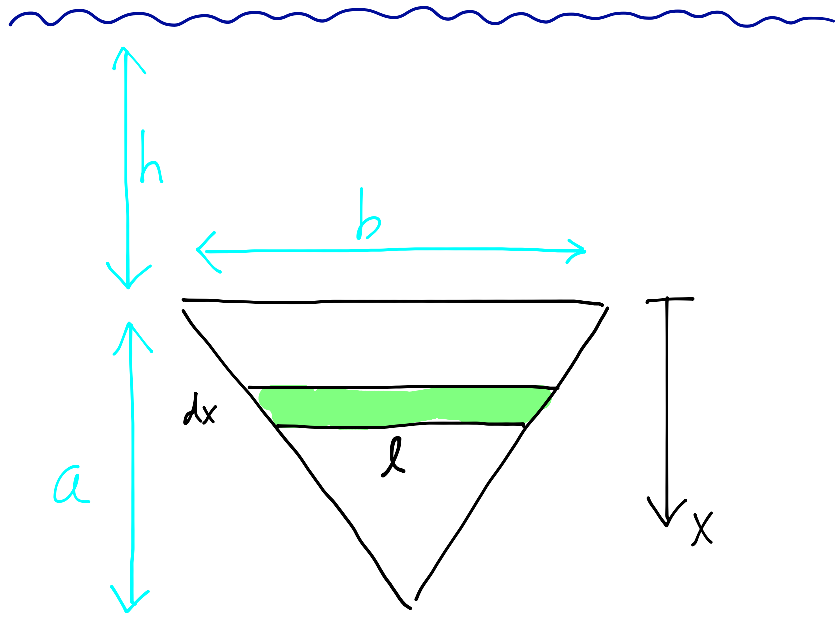
$$(2) \Rightarrow N = \frac{1}{2\mu_s} P$$

$$(1) \Rightarrow Px = -\frac{Pb}{2} + \frac{a}{2\mu_s} P + \frac{b}{2} P$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2\mu_s}}$$

Del 1

Uppgift 3



Tryck vid djupet h+x ges av

$$P(x) = \rho g(h+x)$$

På en bit dx av luckan utövar det kraften $F = A \cdot P(x) = l\,dx\,P(x)$

Likformiga trianglar: $\frac{b}{a} = \frac{l}{a-x}$

$$M = \int_0^a P\,\frac{b(a-x)}{a}\,x\,dx = \int_0^a \rho g(h+x)\frac{b(a-x)}{a}\,x\,dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a}\int_0^a \left[hax - hx^2 + ax^2 - x^3\right]dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a}\left[\frac{hax^2}{2} + \frac{(a-h)x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \rho g \frac{b}{a}\left(\frac{ha^3}{2} + \frac{(a-h)a^3}{3} - \frac{a^4}{4}\right)$$

$$= \rho g\left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12}\right)$$

$\curvearrowleft M = 0$:

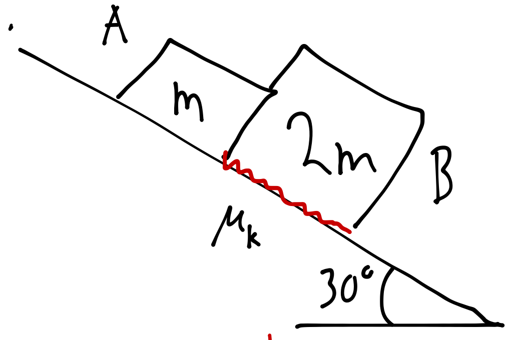
$$aP = \rho g\left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12}\right)$$

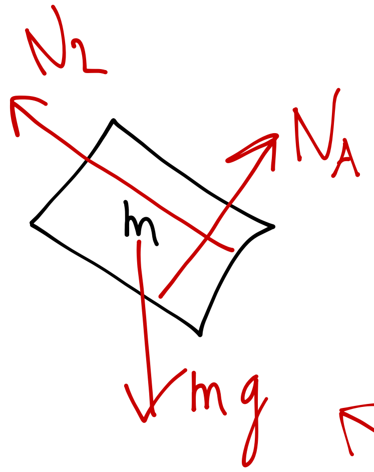
$$\Leftrightarrow$$

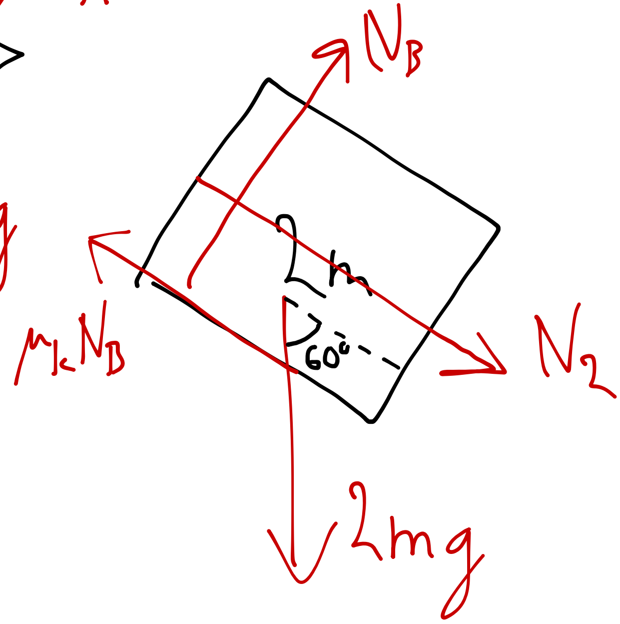
$$\boxed{P = \rho g b\left(\frac{ha}{6} + \frac{a^2}{12}\right)}$$

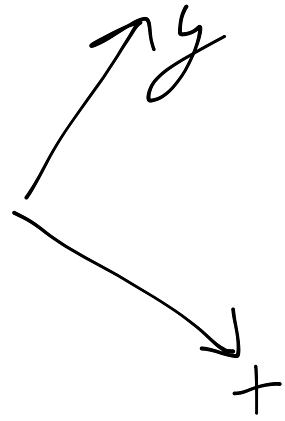
$$[P] = \frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m^3 = \frac{kg\,m}{s^2}$$

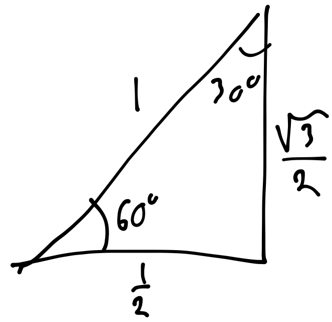
Del 2
Uppgift 1











A) $$\begin{cases} x: \; mg\cos(60) - N_2 = ma & (1) \\ y: \; N_A - mg\sin(60) = 0 & (2) \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} x: \; N_2 + 2mg\cos(60) - \mu_k N_B = 2ma & (3) \\ y: \; N_B - 2mg\sin(60) = 0 & (4) \end{cases}$$

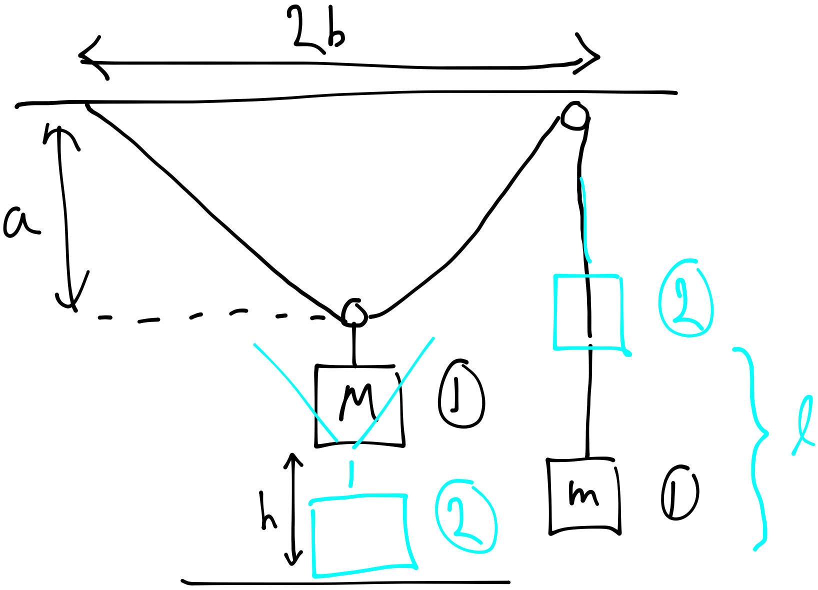
$$(4) \Rightarrow N_B = \sqrt{3}\,mg$$

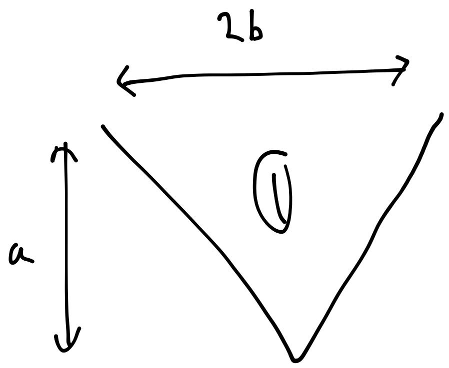
$$(1)+(3): \; \frac{1}{2}mg + mg - \mu_k\sqrt{3}\,mg = 3ma$$

$$\Rightarrow \boxed{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}g - \sqrt{3}\,\mu_k g\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2} - \mu_k\frac{\sqrt{3}}{3}\right)g}$$

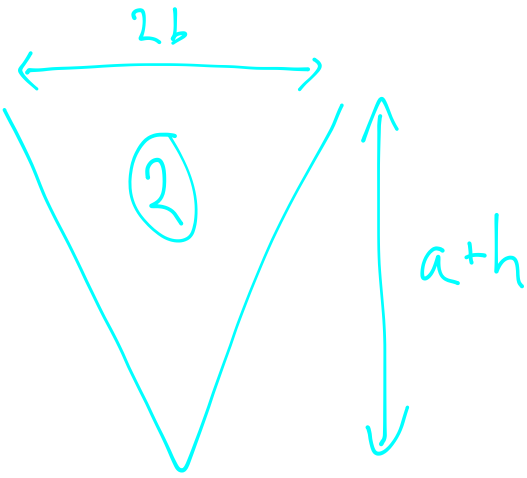
$$(1) \Rightarrow \boxed{N_2} = \frac{1}{2}mg - m\left(\frac{1}{2} - \mu_k\frac{\sqrt{3}}{3}\right)g = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\mu_k mg}$$

Del 2
Uppgift 2





$L_1 = 2\sqrt{a^2+b^2}$



$L_2 = 2\sqrt{(a+h)^2+b^2}$

$$\Longrightarrow \quad \ell = 2\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

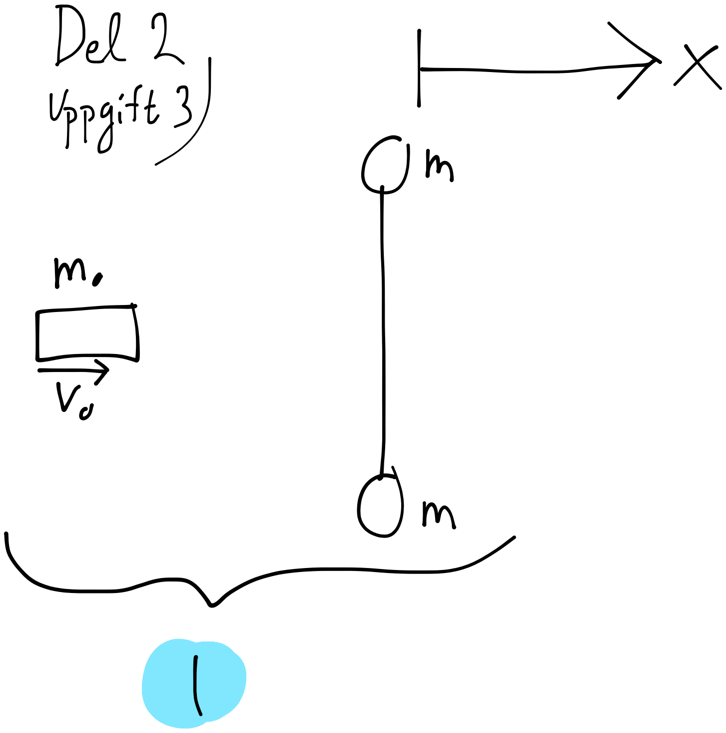
$V_1 \equiv 0$

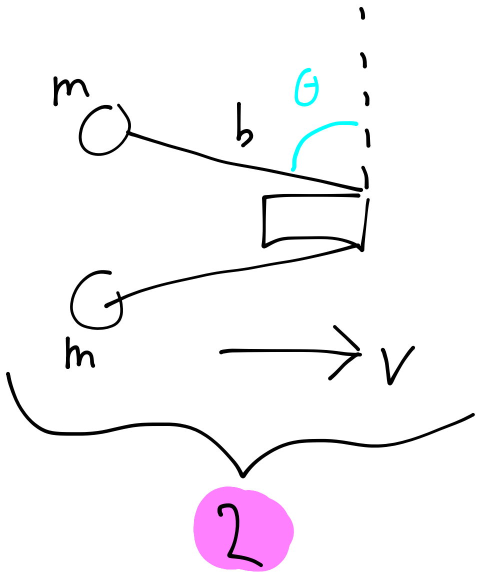
$V_2 = -hgM + mg\ell, \quad V_1 = V_2 \iff m = \frac{Mh}{\ell}$

$$m = \frac{Mh}{2\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

Del 2

Uppgift 3





$$G_1^x = m_0 V_0$$

$$E_1 = \frac{m_0 V_0^2}{2}$$

$$G_2^x = (2m + m_0) V$$

$$E_2 = \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{2m\left(\sqrt{V^2 + (b\dot{\theta})^2}\right)^2}{2}$$

$$= \left(\frac{m_0}{2} + m\right) V^2 + m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$G_1^x = G_2^x \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_0 V_0}{2m + m_0}}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{m_0 V_0^2}{2} = \left(\frac{m_0}{2} + m\right) V^2 + m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{1}{mb^2}\left(\frac{m_0 V_0^2}{2} - \frac{\left(\frac{m_0}{2} + m\right)}{(2m + m_0)^2} m_0^2 V_0^2\right) = \frac{V_0^2}{mb^2}\left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_0^2}{2(2m + m_0)}\right)$$

$$= \frac{V_0^2}{mb^2}\left(\frac{m_0(2m + m_0) - m_0^2}{2(2m + m_0)}\right)$$

$$= \frac{V_0^2}{b^2} \frac{m_0}{2m + m_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{V_0}{b}\sqrt{\frac{m_0}{2m + m_0}}}$$