Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Fredagen den 17 januari 2014 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Inga.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den homogena stången har massan m och längden L. Bestäm normalkraften från väggen i punkten A. (Friktionen försummas.)

2. Klossen har massan m och ligger på ett plan med lutningsvinkel α. Den statiska friktionskoefficienten är μ_s. Bestäm den minsta horisontella kraft P som behövs för att klossen skall börja glida.

3. Kropparna A och B är förenade med en stel stång med längden $2R$. Uttryck farten v_A för kroppen A i termer av farten v_B för kroppen B i det avbildade läget.
(*Ledning*: A's hastighet *relativt* B måste vara vinkelrät mot stången.)

4. Klotet med massa m är fäst i en lätt stång med längden $5a$. Systemet startar från vila i läget där vinkeln $\theta = 0$ och roterar därefter i ett vertikalplan under påverkan av en kraft med konstant storlek F som hela tiden är vinkelrät mot stången. Bestäm klotets hastighet som funktion av θ.

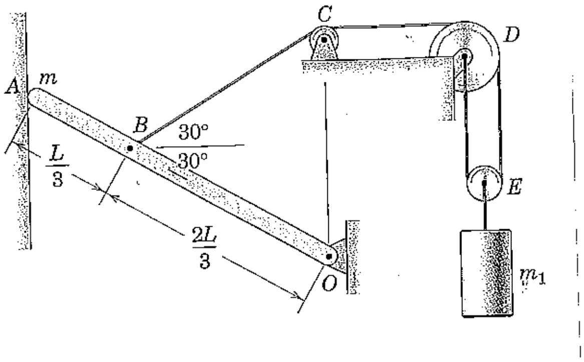
Överkursuppgifter

5. Bestäm diametern d på blykulan med densitet ρ_1 så att konen med densitet ρ_2 flyter i det avbildade läget i vattnet med densitet ρ_0. Det gäller att $\rho_2 < \rho_0 < \rho_1$.

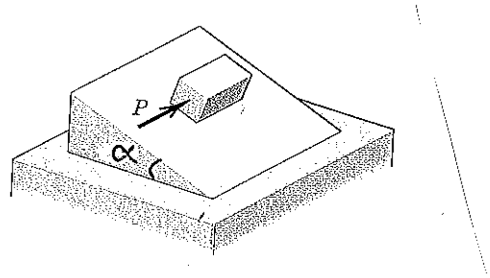
6. Förbränningsgaserna sänds hela tiden ut med den konstanta hastigheten u relativt raketen, som startar i vila vid tiden $t = 0$. Raketens ursprungliga massa är m_0. Bestäm dess massa m som funktion av tiden så att accelerationen blir konstant lika med a.

Lycka till!

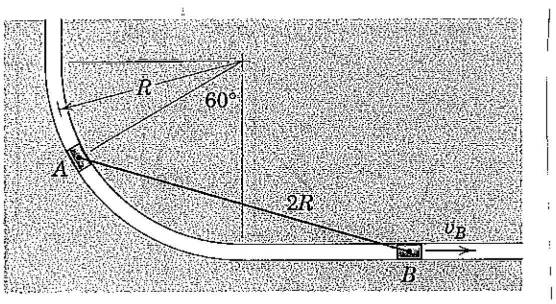
1.


A
m
B
C
D
E
O
30°
30°
$\frac{L}{3}$
$\frac{2L}{3}$
m_1

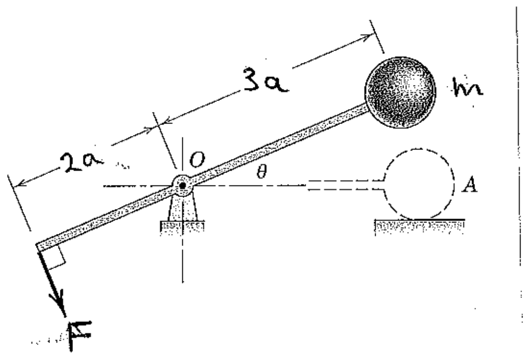
2.


P
α

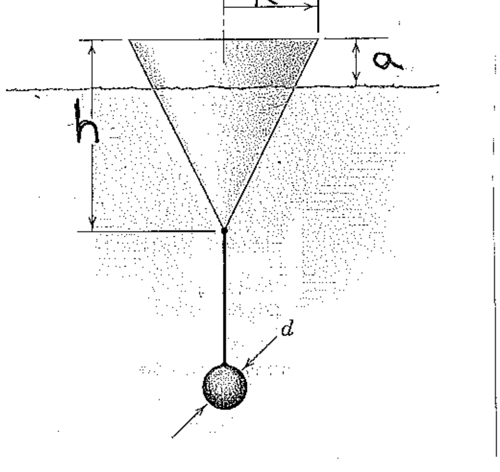
3.


R
60°
A
2R
v_B
B

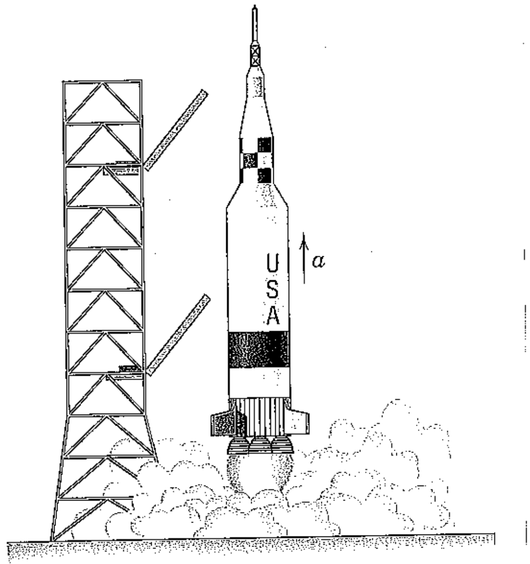
4.


3a
m
2a
O
θ
A
F

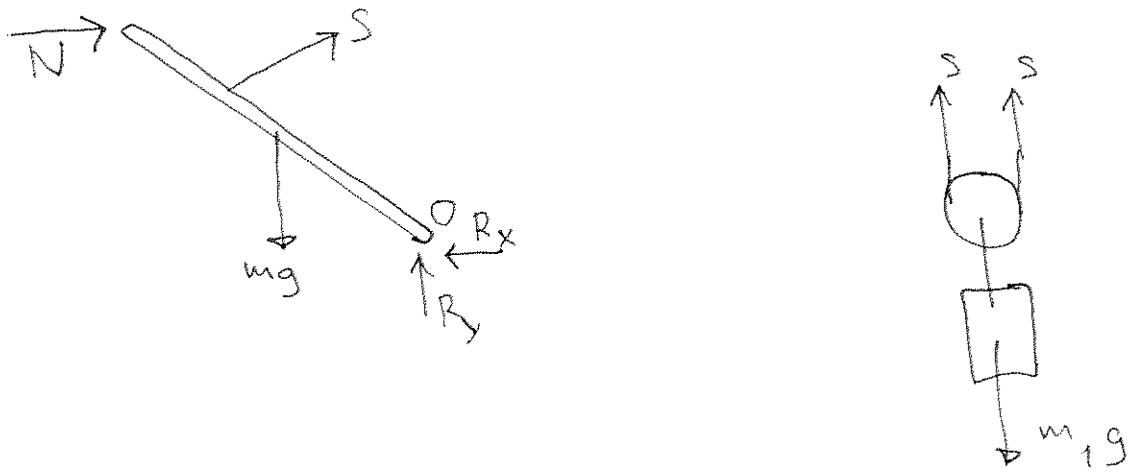
5.


R
a
h
d

6.


USA
a

1. Frilägg stången och cylindern separat:



Vertikal kraftjämvikt för cylindern och momentjämvikt för stången ger

$$\uparrow: \quad 2S - m_1 g = 0$$

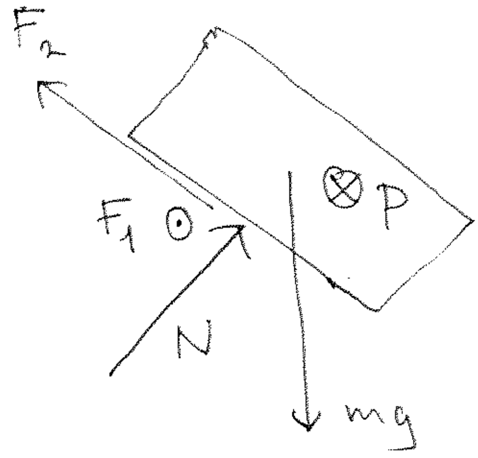
$$\curvearrowleft O: \quad -NL \sin 30° + mg \frac{L}{2} \cos 30° - S \frac{2L}{3} \sin 60° = 0$$

Varur fås att

$$N = \frac{mg \frac{1}{2} \cos 30° - m_1 g \frac{1}{3} \sin 60°}{\sin 30°}$$

$$= mg \frac{\sqrt{3}}{2} - m_1 g \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Frilägg klossen



och ställ upp jämviktsekvationerna

$$\nearrow: \quad N - mg\cos\alpha = 0$$

$$\nwarrow: \quad F_2 - mg\sin\alpha = 0$$

$$\otimes: \quad P - F_1 = 0$$

Då glidning precis sker gäller att

$$\mu_s = \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{N} = \frac{\sqrt{P^2 + (mg\sin\alpha)^2}}{mg\cos\alpha}$$

Varur fås att

$$P = \sqrt{(\mu_s mg\cos\alpha)^2 - (mg\sin\alpha)^2}$$

3. Inför ortonormerade basvektorer $\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{j}}$ enligt figuren $\hat{\mathbf{j}}\uparrow \;\rightarrow \hat{\mathbf{i}}$.

A's ortsvektor $\mathbf{r}_{A/B}$ och hastighetsvektor $\mathbf{v}_{A/B}$ relativt B är då

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{A/B} = -\frac{\sqrt{15}}{2} R\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} R\hat{\mathbf{j}} & \text{(Pythagoras sats!)} \\ \mathbf{v}_{A/B} = \left(v_A \frac{1}{2} - v_B\right)\hat{\mathbf{i}} - v_A \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Villkoret att dessa skall vara ortogonala lyder

$$0 = \mathbf{r}_{A/B} \cdot \mathbf{v}_{A/B}$$

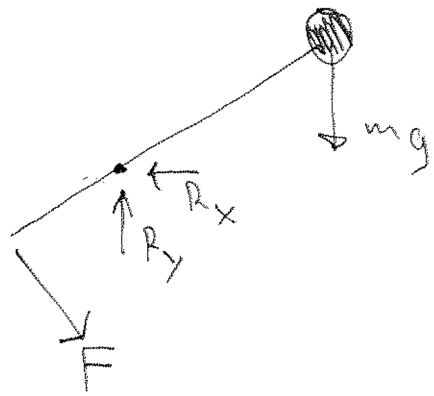
$$= -\frac{\sqrt{15}}{2} R\left(v_A \frac{1}{2} - v_B\right) + \frac{1}{2} R\left(-v_A \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Varur fås att

$$v_A = \frac{\sqrt{15}/2}{\sqrt{15}/4 + \sqrt{3}/4} v_B$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} v_B$$

4. Frilägg systemet:



Då stången har vridits vinkeln θ har de yttre krafterna uträttat arbetet

$$W = 2a\theta F - mg\,3a\sin\theta$$

Energiprincipen ger nu (med start i vila) att detta skall vara lika med den kinetiska energin

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

varur fås att

$$v = \sqrt{\frac{4a\theta F}{m} - g\,6a\sin\theta}$$

5. Tyngdkraften på konen är $\frac{1}{3}\pi R^2 h \, \rho_2 \, g$.

" kulan " $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_1 \, g$.

Lyftkraften från vattnet är

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h \left(\frac{h-a}{h}\right)^3 \rho_0 \, g + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_0 \, g .$$

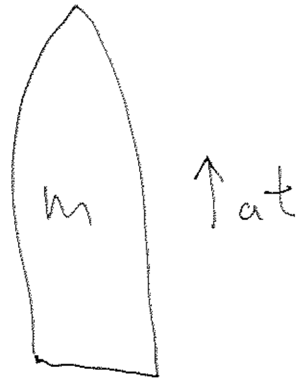
Vertikal kraftjämvikt ger nu

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h \left(\left(\frac{h-a}{h}\right)^3 \rho_0 - \rho_2\right) g = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 (\rho_1 - \rho_0)\, g$$

Varur fås att

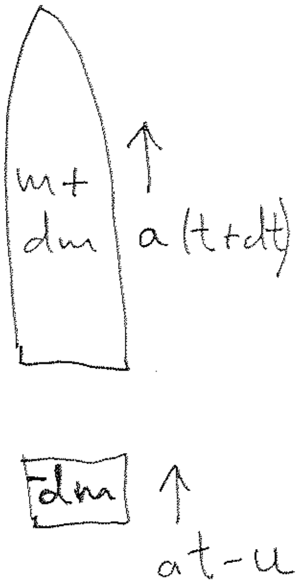
$$d = 2\sqrt[3]{\frac{R^2 h}{4}\left(\left(\frac{h-a}{h}\right)^3 \rho_0 - \rho_2\right) \Big/ (\rho_1 - \rho_0)}$$

6. Vid tiden t:



Vid tiden t+dt:

(dm är negativt.)



Impulslagen:

$$-mg\,dt = (m+dm)a(t+dt) + (-dm)(at-u) - m\,at$$

Till första ordningen i dm och dt ger detta

$$-mg\,dt = ma\,dt + dm\,u$$

med lösningen

$$m = m_0 e^{-\frac{a+g}{u}t}$$

m_0 = begynnelsevärde då $t=0$.