Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Fredagen den 23 augusti 2013 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Inga.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den fyllda behållaren har massan m. (Övriga massor försummas.) Bestäm storleken P av kompressionskraften i vart och ett av de tre stagen som bildar den liksidiga triangeln ABC med sidlängden a.

2. Den homogena halvcylindern hålls på plats i det avbildade läget genom kraften P. Den statiska friktionskoefficienten mellan halvcylindern och underlaget är μ_s. Hur stor kan vinkeln θ vara utan att glidning sker? (Avståndet från mittpunkten O till halvcylinderns tyngdpunkt G är $4r/3\pi$.)

3. I det avbildade ögonblicket har kolven hastigheten v och accelerationen a (räknas positiva åt vänster). Uttryck $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$ i r, θ, v och a.

4. Den koniska pendeln har längden L och massan m och rör sig med vinkelhastigheten ω. Bestäm höjden h och spännkraften T i linan.

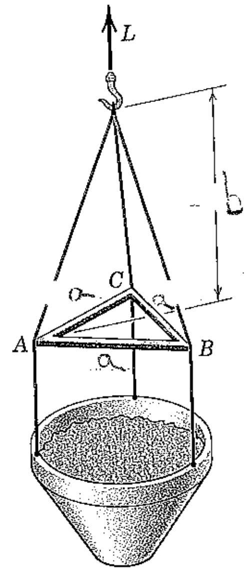
Överkursuppgifter

5. En kub med sidlängden l och densiteten ρ_{kub} flyter i saltvatten med densiten ρ_{vatten} med ett oljeskikt med tjockleken d och densiteten ρ_{olja}. Det gäller att $\rho_{\text{kub}} < \rho_{\text{olja}} < \rho_{\text{vatten}}$. Bestäm höjden h.

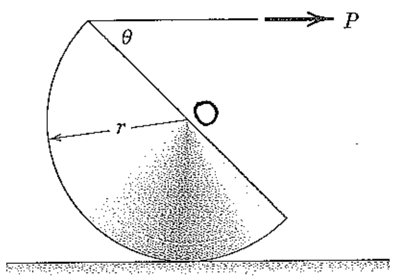
6. Slangen är utlagd så att den ändrar riktning 180^0 från brandposten till utloppet. Övertrycket i brandposten är p, slangens innerradie är r och massflödet per tidsenhet är σ. Strömningshastigheten är v_0 respektive v_1 vid brandposten respektive utloppet. Bestäm spänningen T i slangen där den sitter fast i brandposten samt kraften F som behövs för att hålla fast den vid utloppet. (Slangen är helt flexibel och friktionen mot underlaget försummas.)

Lycka till!

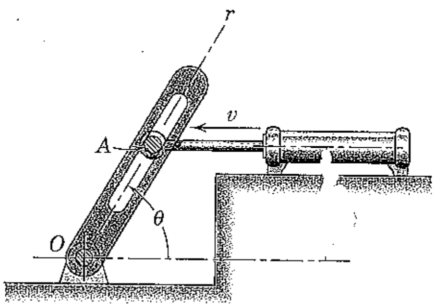
1.



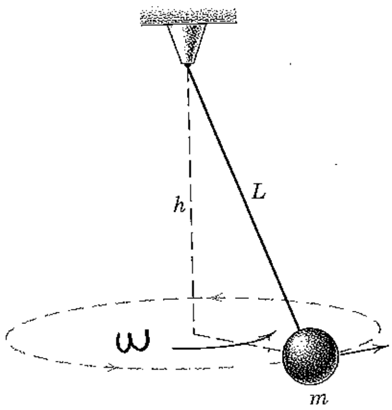
2.



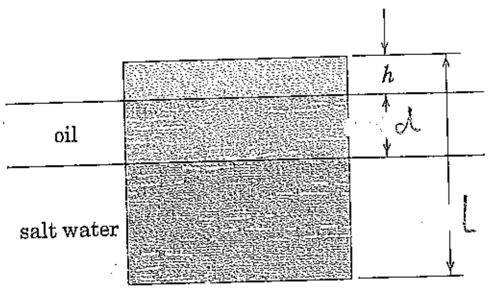
3.



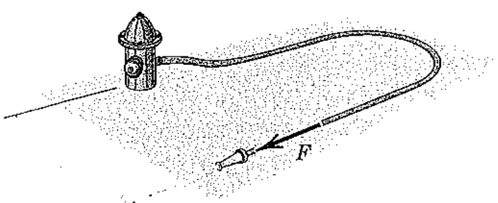
4.



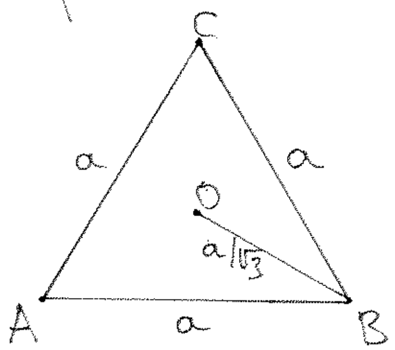
5.

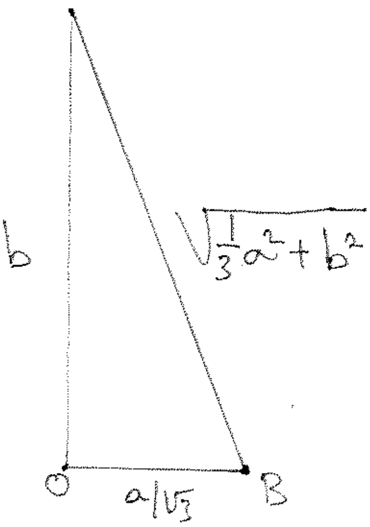


6.

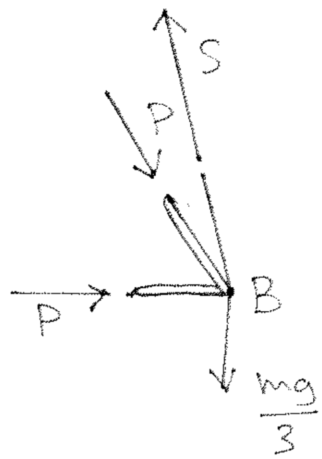


1. Avbilda konstruktionen ovanifrån och från sidan:





Frilägg hörnet B



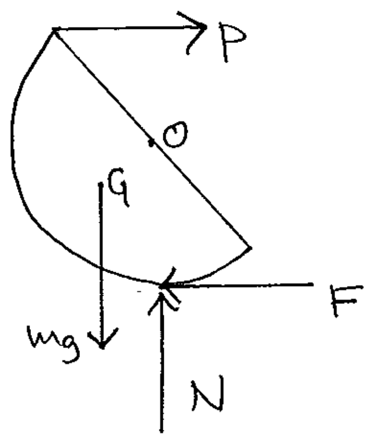
Kraftjämvikt i vertikalled och horisontalled i riktning mot O ger ekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{b}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2+b^2}}\,S - \dfrac{mg}{3} = 0 \\[2ex] \dfrac{P}{\sqrt{3}/2} + \dfrac{P}{\sqrt{3}/2} - \dfrac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2+b^2}}\,S = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$P = \frac{1}{12}\, mg\, \frac{a}{b}$$

2. Frilägg halvcylindern



och ställ upp jämviktsekvationerna

$$
\begin{cases}
\rightarrow & P - F = 0 \\
\uparrow & N - mg = 0 \\
\circlearrowleft O & -r\sin\theta \, P - rF + \frac{4r}{3\pi}\sin\theta \, mg = 0
\end{cases}
$$

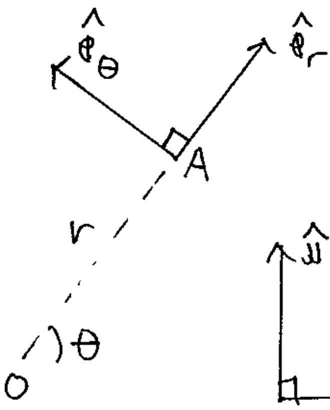
Då glidning precis sker har vi dessutom

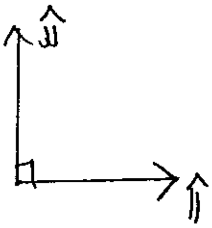
$F = \mu_s N$

varur fås att

$$\theta = \arcsin \frac{\mu}{\frac{4}{3\pi} - \mu}$$

3. Basbytet mellan Cartesiska och polära koordinater är





$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} = \cos\theta \; \mathbf{e}_r - \sin\theta \; \mathbf{e}_\theta \\ \hat{\mathbf{j}} = \sin\theta \; \mathbf{e}_r + \cos\theta \; \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

Hastigheten och accelerationen är

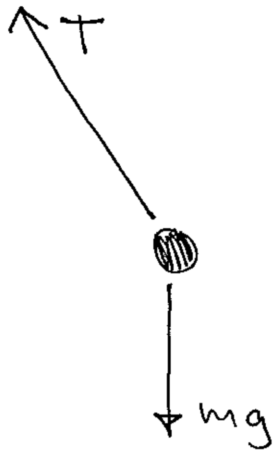
$$\begin{cases} \mathbf{v} = -v\,\hat{\mathbf{i}} = -v\left(\cos\theta \; \mathbf{e}_r - \sin\theta \; \mathbf{e}_\theta\right) \\ \mathbf{a} = -a\,\hat{\mathbf{i}} = -a\left(\cos\theta \; \mathbf{e}_r - \sin\theta \; \mathbf{e}_\theta\right) \end{cases}$$

Jämför med standarduttrycken

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{cases} \dot{r} = -v\cos\theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{r}\sin\theta \\ \ddot{r} = \frac{v^2}{r}\sin^2\theta - a\cos\theta \\ \ddot{\theta} = \frac{a}{r}\sin\theta + \frac{2v^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

4. Frilägg kulan 

och ställ upp Newton II i cylindriska koordinater med z-axeln uppåt:

$$\begin{cases} \hat{\mathbb{k}}: & \frac{h}{L} T - mg = 0 \\ \hat{e}_r: & -\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{cases}$$

Med $r = \sqrt{L^2-h^2}$ konstant och $\dot{\theta} = \omega$

får vi

$$\begin{cases} T = mL\omega^2 \\ h = g/\omega^2 \end{cases}$$

5. Enligt Arkimedes princip påverkas kuben av en lyftkraft

$$F = d\,l^2 \rho_{olja}\, g + (l - d - h)\, l^2 \rho_{vatten}\, g.$$

I jämvikt är denna lika stor som tyngdkraften $l^3 \rho_{kub}\, g$ på kuben, vilket ger

$$h = l - d - \frac{l\,\rho_{kub} - d\,\rho_{olja}}{\rho_{vatten}}$$

6. Vid brandposten påverkas det strömmande vattnet av en kraft som är lika stor som den tillförda rörelsemängden per tidsenhet, d v s

$$F_0 = \sigma v_0 .$$

Detta ger upphov till en lika stor men motriktad motkraft, vartill måste läggas tryckkraften $F_{tryck} = p \pi r^2$.

Spänningen i slangen blir alltså

$$T = \sigma v_0 + p \pi r^2 .$$

Vid utloppet är trycket noll, och motsvarande räkning ger kraften

$$F = \sigma v_1 .$$