Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Måns tackar för sig för den här gången med
sin 51:a och sista mekaniktentamen.

Tid och plats: Tisdagen den 10 januari 2012 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Hur lång skall kabeln CD vara för att massan m skall hänga i jämvikt enligt figuren med ett givet avstånd d? Hur stor blir då spännkraften T i denna kabel? (Övriga massor försummas.)

2. Kabelrullen har massan m och den kinetiska friktionskoefficienten är μ_k i både den horisontella och vertikala kontaktytan. Hur stor skall kraften P vara för att rullen skall rotera med konstant vinkelhastighet?

3. Projektilen har massan m och skjuts ut från origo vid tiden $t = 0$ med hastigheten v_0 som bildar vinkeln θ med horisontalplanet. Den påverkas därefter av tyngdkraften samt av vattenmotståndskraften $-k\mathbf{v}$ där k är en positiv konstant och $\mathbf{v}$ är hastigheten. Ställ upp Newtons andra lag i horisontal- och vertikalled och bestäm $\mathbf{v}$ som funktion av t för $t > 0$ genom att lösa dessa differentialekvationer.

4. Motorns elektriska effekt är P (enhet Watt) när massan $3m$ har den konstanta hastigheten v uppåt. Vad är systemets verkningsgrad e?

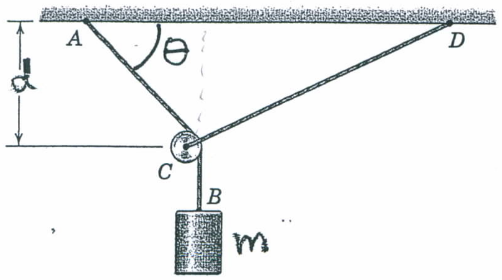
Överkursuppgifter

5. Flytbojen består av en kon och en cylinder och har massan m. Bestäm höjden h när den flyter i vatten med densiteten ρ. (Bojens tyngdpunkt ligger så lågt att detta läge är stabilt.) *Ledning*: En kon med radie r och höjden a har volymen $\frac{1}{3}\pi r^2 a$.

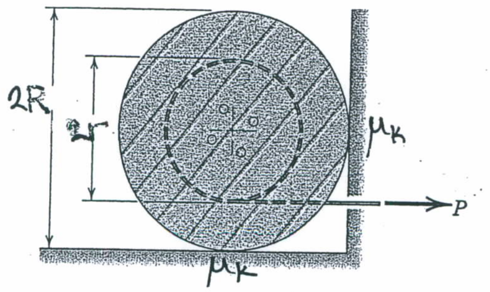
6. Vattenskotern tar in ett flöde c (enhet $\mathrm{m^3s^{-1}}$) av vatten av densitet ρ i fören och pumpar ut det i aktern genom ett utloppsrör med tvärsnittsarean A. Hur stort är vattenmotståndskraften F på skotern när den rör sig med den konstanta hastigheten v?

Lycka till!

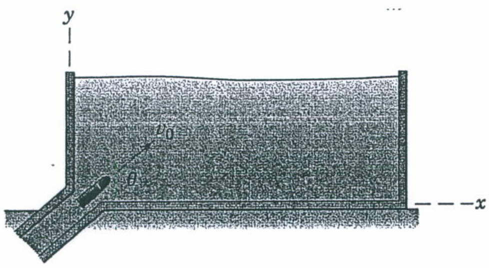
1.



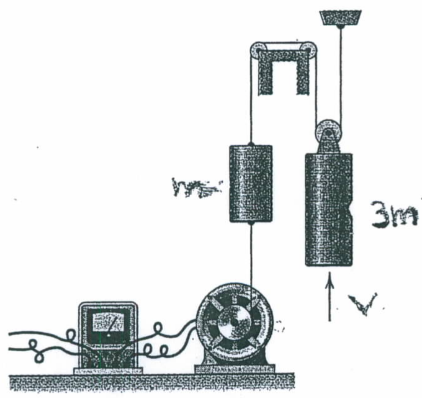
2.



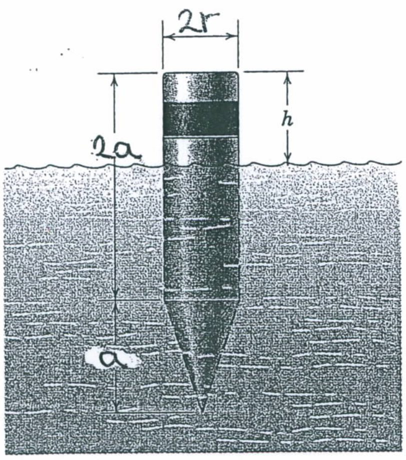
3.



4.

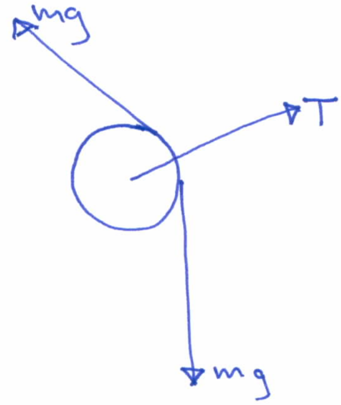


5.



6.

1. Frilägg trissan.



Med L = avståndet CD

lyder jämviktsekvationerna

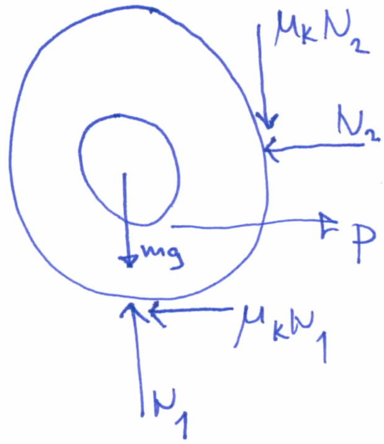
$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \begin{cases} T\dfrac{\sqrt{L^2-d^2}}{L} - mg\cos\theta = 0 \\ T\dfrac{d}{L} + mg\sin\theta - mg = 0 \end{cases} \\ &\uparrow \end{aligned}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} L = d\sqrt{\dfrac{2}{1-\sin\theta}} \\ T = mg\sqrt{2(1-\sin\theta)} \end{cases}$$

2. Frilägg den roterande trumman och ställ upp jämviktsekvationerna:

$$
\begin{aligned}
\uparrow:&\quad \begin{cases} N_1 - \mu_k N_2 - mg = 0 \\ P - N_2 - \mu_k N_1 = 0 \\ -\mu_k N_1 R - \mu_k N_2 R + Pr = 0 \end{cases} \\
\rightarrow:& \\
\circlearrowleft O:&
\end{aligned}
$$

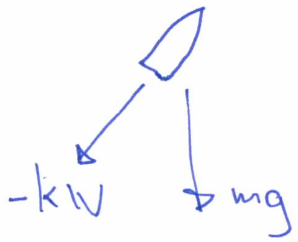


Dessa har lösningen

$$
\begin{cases}
N_1 = \dfrac{r - \mu_k R}{(1+\mu_k^2)r - (\mu_k + \mu_k^2)R}\, mg \\[2ex]
N_2 = \dfrac{\mu_k R - \mu_k r}{(1+\mu_k^2)r - (\mu_k + \mu_k^2)R}\, mg \\[2ex]
P = \dfrac{(\mu_k - \mu_k^2)R}{(1+\mu_k^2)r - (\mu_k + \mu_k^2)R}\, mg
\end{cases}
$$

3. Frilägg projektilen och ställ upp rörelseekvationerna:

$$\begin{cases} -k v_x = m \dot{v}_x \\ -k v_y - mg = m \dot{v}_y \end{cases}$$



Dessa har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} v_x(t) = A e^{-\frac{k}{m} t} \\ v_y(t) = B e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k} \end{cases}$$

med godtyckliga konstanter A och B.

Begynnelsevillkoren $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos\theta \\ v_y(0) = v_0 \sin\theta \end{cases}$ ger nu

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \; e^{-\frac{k}{m} t} \\ v_y(t) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k} \end{cases}$$

4. Då massan $3m$ har hastigheten v uppåt så har massan m hastigheten $2v$ neråt.

Ändringen av systemets potentiella energi per tidsenhet är då $3mgv + mg(-2v) = mgv$.

Den kinetiska energin är konstant.

Med den tillförda effekten P blir verkningsgraden

$$e = \frac{mgv}{P}$$

5. Den undanträngda vätskevolymen är

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 a + \pi r^2 (2a - h)$$

Enligt Arkimedes princip gäller vid jämvikt att

$$\rho V g - mg = 0$$

Varur fås att

$$h = \frac{7a}{3} - \frac{m/\rho}{\pi r^2}$$

6. Det inkommande och utgående vattnets hastighet relativt skotern är v respektive $\frac{c}{A}$. Ändringen i vattnets rörelsemängd per tidsenhet är alltså

$$\left(\frac{c}{A} - v\right)\rho c$$

, villket motsvarar kraften på skotern från detta vatten.

Vattenmotståndskraften på skrovet måste vara lika stor.