Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 14 mars 2011 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. De två lätta trissorna med radier r respektive R sitter ihop som en enhet som är fritt vridbar kring O. Vridningen förhindras dock av kabeln som är lindad kring den mindre trissan och fäst i punkten A. Bestäm spänningen i denna kabel samt *storleken* av reaktionskraften i O vid en given last F.

2. Bestäm det minsta möjliga värdet på den statiska friktionskoefficienten mellan pappersrullen och det lutande planet för att man försiktigt skall kunna rulla upp den utan att den glider genom att applicera en lämplig dragkraft T.

3. Partikeln släpps i läget r_0 vid tiden $t = 0$ och är då i vila relativt det glatta röret som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω kring en vertikal axel. Beräkna tiden t då partikeln når rörets ändpunkt.

4. Projektilen med massan m skjuts horisontellt in i lådan med massan M som hänger i vila och fastnar där. Lådans maximala utslagsvinkel blir då θ. Bestäm projektilens hastighet.

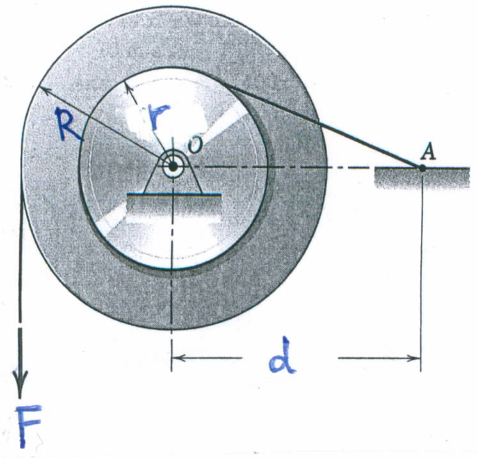
Överkursuppgifter

5. Kvartscirkelbågen har radien r och massan ρ per längdenhet och är fritt vridbar kring en horisontell axel genom A. Bestäm spänningen i linan mellan O och B.

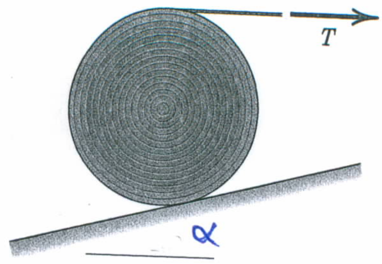
6. Kedjan har längden L och massan m och släpps när den hänger i vila med övre ändpunkten i $x = 0$. Bestäm utslaget på vågen (med enheten massa) som funktion av x.

Lycka till!

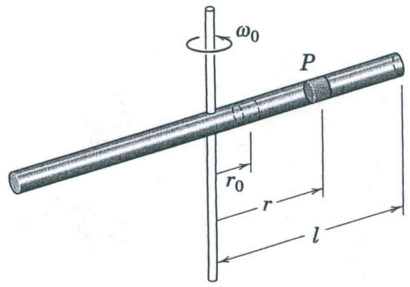
1.



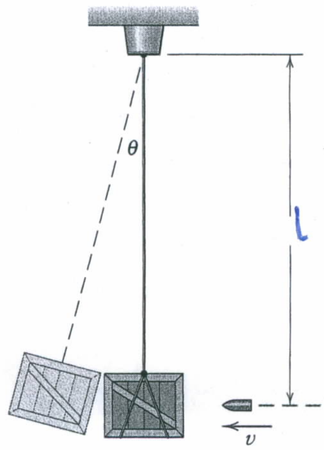
2.



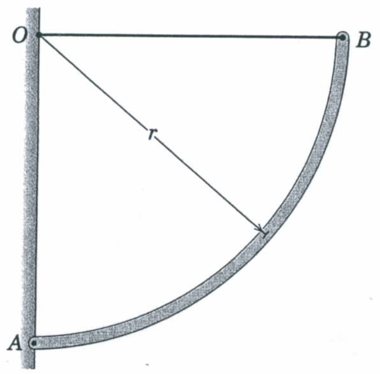
3.



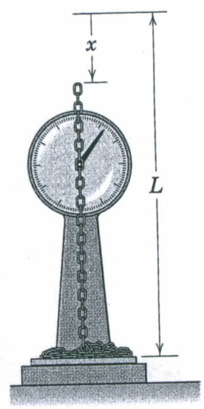
4.



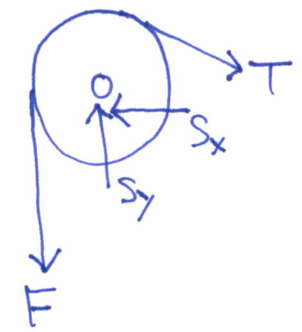
5.



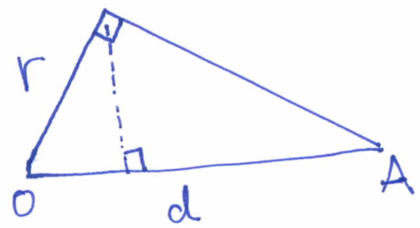
6.



1. Frilägg trissorna och ställ upp jämviktsekvationerna:



(Använd likformiga trianglar för att bestämma spännkraftens projektioner i horisontal- och vertikalled.)



$$\uparrow: \quad -F + S_y - \frac{r}{d} T = 0$$

$$\rightarrow: \quad -S_x + \frac{\sqrt{d^2-r^2}}{d} T = 0$$

$$\circlearrowleft O: \quad RF - rT = 0$$

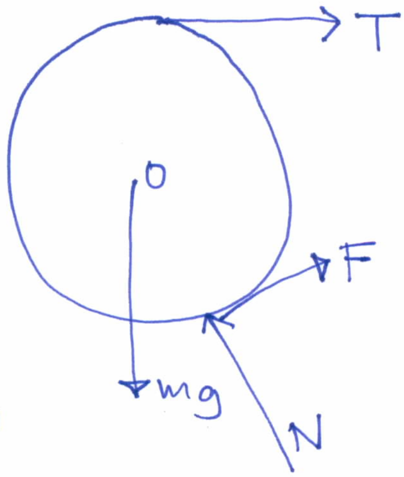
Härur fås att

$$\begin{cases} T = \frac{R}{r} F \\ S_x = \frac{R}{r} \frac{\sqrt{d^2-r^2}}{d} F \\ S_y = \left(1 + \frac{R}{d}\right) F \end{cases}$$

Reaktionskraftens storlek är

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \left(1 + 2\frac{R}{d} + \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} F$$

2. Frilägg pappersrullen: och ställ upp jämviktsekvationerna:



$\rightarrow$: $T + F\cos\alpha - N\sin\alpha = 0$

$\uparrow$: $-mg + F\sin\alpha + N\cos\alpha = 0$

$\curvearrowleft O$: $rF - rT = 0$

r = radien

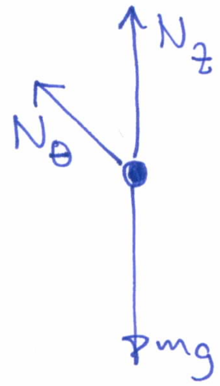
Härur fås att

$$\begin{cases} F = mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ N = mg \\ T = mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

För att inte glidning skall ske måste

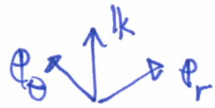
$$\mu > \frac{F}{N} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

3. Frilägg partikeln:



Ställ upp Newton II
i radiell led:

$$0 = m(\ddot{r} - r\omega^2)$$



Den allmänna lösningen är

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Begynnelsevillkoren $\begin{cases} r = r_0 \\ \dot{r} = 0 \end{cases}$ då $t=0$ ger

$$\begin{cases} A = \frac{r_0}{2} \\ B = \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

så att

$$r = r_0 \cosh \omega t .$$

Ändpunkten $r = l$ uppnås då

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arccosh} \frac{l}{r_0} .$$

4. Den horisontella rörelsemängden för lådan + projektilen bevaras i stöten:

$$M \cdot 0 + m \cdot v = (M+m)\underbrace{v'}_{\text{hastighet omedelbart efter stöten}}$$

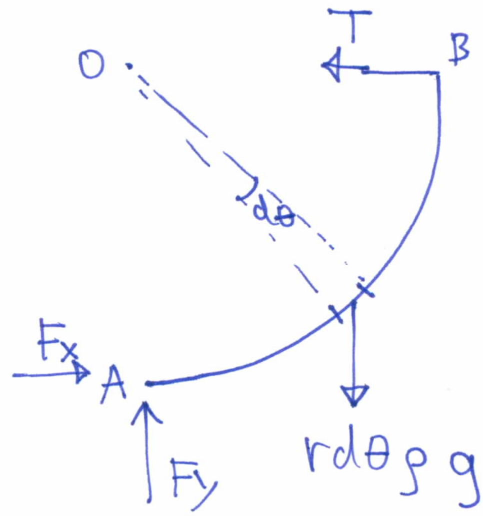
Efter stöten bevaras den totala mekaniska energin:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{M+m}{2}(v')^2}_{\text{kinetisk}} - \underbrace{(M+m)gl}_{\text{potentiell}}}_{\text{omedelbart efter stöten}} = \underbrace{\underbrace{0}_{\text{kinetisk}} - \underbrace{(M+m)gl\cos\theta}_{\text{potentiell}}}_{\text{i vändläget}}$$

Tillsammans ger dessa ekvationer projektilens hastighet

$$v = \frac{M+m}{m} v' = \left(\frac{M}{m}+1\right)\sqrt{2gl(1-\cos\theta)} \, .$$

5. Frilägg kvartscirkelbågen



Momentjämvikt kring A ger

$$\curvearrowleft A: \quad 0 = rT - \int_{-\pi/2}^{0} r\cos\theta \; r\,d\theta\,\rho\,g$$

$$= rT - r^2\rho g\,\left[\sin\theta\right]_{\theta=-\pi/2}^{0}$$

$$= rT - r^2\rho g$$

Varur fås att

$$T = r\rho g$$

6. Den del av kedjan som ännu är i luften rör sig i fritt fall och har alltså hastigheten

$v = \sqrt{2gx}$.

Under ett tidsintervall Δt landar massan

$\Delta m = \rho v \Delta t$

på vågen och minskar därvid sin rörelsemängd från $\Delta m\, v = \rho v^2 \Delta t$ till noll.

Kraften från vågen på denna massa är

$$\frac{\rho v^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho v^2 = 2\rho g x$$

riktad uppåt.

Enligt Newton III har vi en lika stor men motriktad kraft på vågen, vartill skall läggas tyngden $\rho x g$ från den del av kedjan som redan ligger på vågen.

Den totala kraften på vågen blir alltså

$3\rho g x$

vilket svarar mot utslaget

$3\rho x = 3 \frac{m}{L} x$.