Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Torsdagen den 19 augusti 2010 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Vinkeln är fritt vridbar kring en axel genom punkten O som högst får belastas med en given kraft $F_{\max}$. Bestäm den maximala tillåtna lasten L i punkten A.

2. Den stretchande joggaren har tyngdpunkten G. Kraften mellan hans handflator och väggen i B är horisontell. Hur stor måste den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan hans skor och golvet i A vara för att han inte skall glida?

3. Bestäm den horisontella hastigheten v_B för kropp B uttryckt i den vertikala hastigheten v_A för kropp A och vinkeln θ. (Linan är otöjbar och hålls sträckt genom fjädern.)

4. Projektilen med massa m skjuts in i en låda med sand, vars massa är M och som hänger i vila. Det maximala vinkelutslaget för den påföljande pendelrörelsen är θ. Bestäm härur projektilens ursprungliga hastighet v.

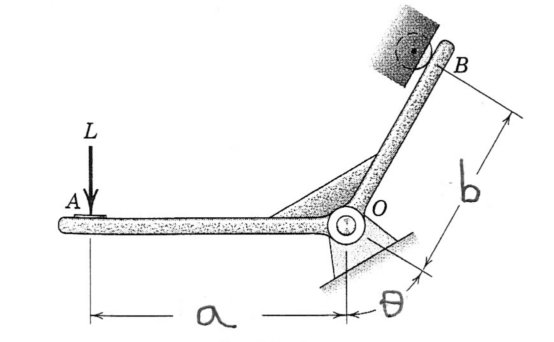
Överkursuppgifter

5. Skyskrapan har massan m, bredden b (vinkelrät mot papprets plan) och höjden h. Bestäm horisontal- och vertikalkomponenterna av kraften samt vridmomentet vid basen A vid en vindbelastning enligt figuren, där k är en given konstant (med dimensionen $N\,m^{-5/2}$).

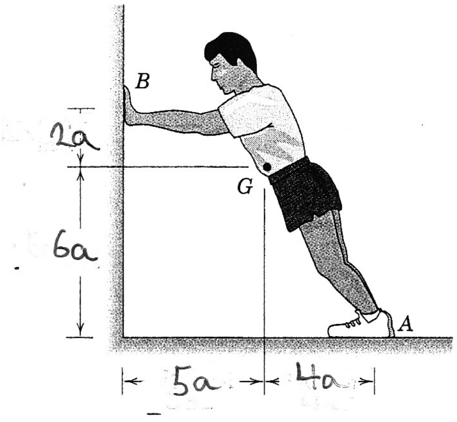
6. De båda kulorna har vardera massan m och är förenade genom en lätt lina med längden $2b$. De ligger i vila på ett glatt horisontellt underlag när linans mittpunkt träffas av en projektil med massan m_0 och hastigheten v_0. Bestäm projektilens hastighet v samt tidsderivatan $\dot{\theta}$ för vinkeln θ i ögonblicket omedelbart innan de båda kulorna träffar varandra (d v s då θ är nästan 90^o).

Lycka till!

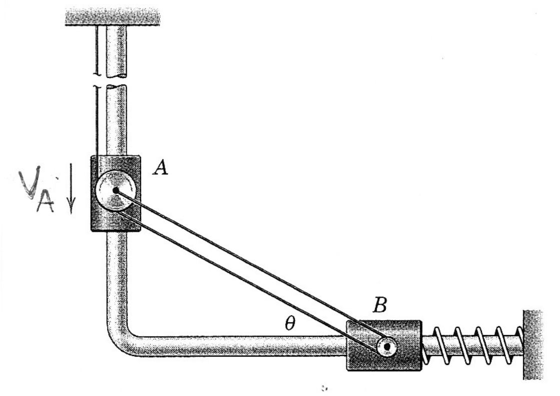
1)



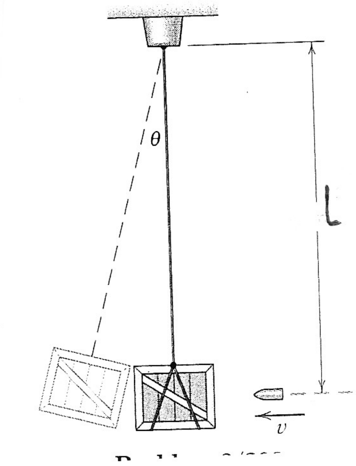
2)



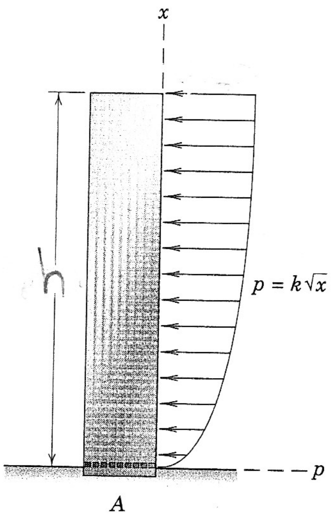
3)



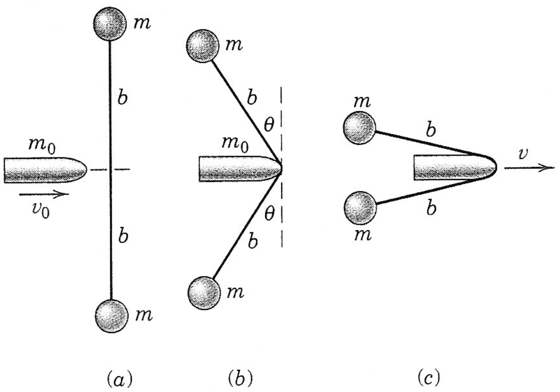
4)



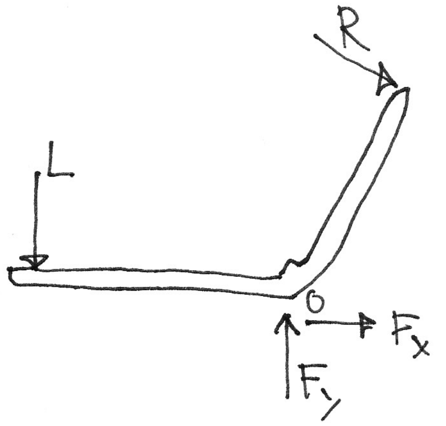
5)



6)



1. Frilägg vinkeln



och ställ upp jämviktsekvationerna:

$$\uparrow: \quad -L + F_y - R\cos\theta = 0$$

$$\rightarrow: \quad F_x + R\sin\theta = 0$$

$$\circlearrowleft O: \quad aL - bR = 0 .$$

Härur fås att

$$\begin{cases} R = \frac{a}{b} L \\ F_x = -\frac{a}{b}\sin\theta \ L \\ F_y = \left(1 + \frac{a}{b}\cos\theta\right) L \end{cases}$$

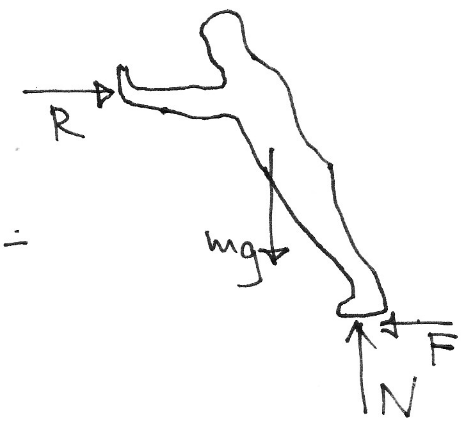
Kraften i O har storleken

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1 + 2\frac{a}{b}\cos\theta + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \ L$$

som är lika med F_{max} då

$$L = \frac{F_{max}}{\sqrt{1 + 2\frac{a}{b}\cos\theta + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

2. Frilägg joggaren



och ställ upp jämvikts-ekvationerna:

$$\uparrow: \quad N - mg = 0$$

$$\rightarrow: \quad R - F = 0$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad 4a\,mg - 8a\,R = 0$$

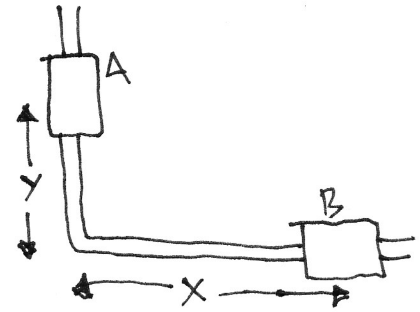
Härur fås att

$$\begin{cases} N = mg \\ R = \frac{1}{2}mg \\ F = \frac{1}{2}mg \end{cases}$$

Den statiska friktionskoefficienten måste alltså uppfylla

$$\mu_s \geq \frac{F}{N} = \frac{1}{2}$$

3. Med x och y enligt figuren



får vi, eftersom linan har konstant längd, att

$$2\sqrt{x^2+y^2} + \text{konstant} - y = \text{konstant}.$$

Derivering med avseende på tiden ger

$$2\,\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dot{y} = 0$$

Varur fås att

$$V_B = \dot{x} = \dot{y}\left(1 - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x}$$

$$= \dot{y}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x} - \frac{y}{x}\right)$$

$$= V_A\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2\theta} - \tan\theta\right)$$

$$= V_A\,\frac{\frac{1}{2} - \sin\theta}{\cos\theta}$$

4. Rörelsemängden bevaras i stöten, d v s

$$mv = (M+m)u$$

där u är lådans och projektilens gemensamma hastighet efter stöten.

Den totala mekaniska energin bevaras under det fortsatta förloppet, d v s

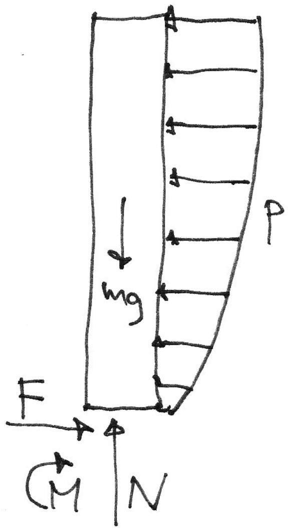
$$\frac{1}{2}(M+m)u^2 = (M+m)gl(1-\cos\theta).$$

Ur dessa ekvationer fås att

$$v = \frac{M+m}{m}u = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

5. Frilägg skyskrapan

och ställ upp jämviktsekvationerna



$\uparrow$: $N - mg = 0$

$\rightarrow$ $F - \int_0^h dx\, b\, k\sqrt{x} = 0$

$\circlearrowleft A)$ $-M + \int_0^h dx\, b\, x\, k\sqrt{x} = 0$

Varur fås att

$$\begin{cases} N = mg \\ F = \frac{2}{3} k b h^{3/2} \\ M = \frac{2}{5} k b h^{5/2} \end{cases}$$

6. Bevarande av rörelsemängd och kinetisk energi ger

$$\begin{cases} m_0 v_0 = (2m + m_0) v \\ \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(v^2 + (b\dot{\theta})^2 \right) \end{cases}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} v = \dfrac{m_0}{2m + m_0} v_0 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{b} \sqrt{\dfrac{m_0}{2m + m_0}} \end{cases}$$