Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Onsdagen den 16 januari 2008 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-5.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-7 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-17 poäng ger betyg 4 och 18-21 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

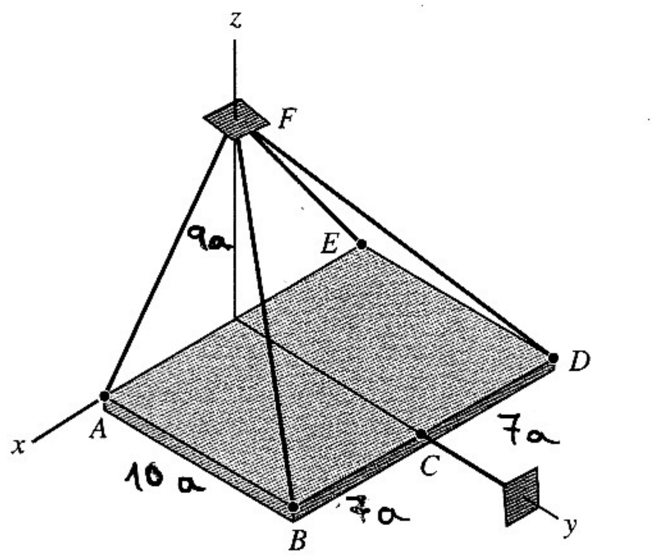
1. Den homogena plattan har massan m. Bestäm spänningen i linorna som är fästade i punkterna A,B,C,D och E, under antagandet att spänningarna i A och E samt i B och D är lika.
2. Den statiska friktionskoefficienten mellan det lutande planet och cirkelskivan är $\mu = 0.4$. Skiven har massan m. Kraften P verkar i riktningen $\theta = 45^o$. Bestäm storleken av P då skivan precis börjar glida.
3. Uttryck kolvens hastighet $\dot{x}$ i avståndet R, vinkeln θ och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$.
4. Systemet är i vila när pendeln släpps i det avbildade läget. Bestäm vagnens hastighet då pendeln är vertikal dels för första gången och dels för andra gången.
5. Fjädrarnas fria ändar rör sig enligt $y_1(t) = Y_1 \sin \omega t$ respektive $y_2(t) = Y_2 \sin \omega t$. Bestäm vagnens rörelse $x(t)$ efter att det transienta insvängningsförloppet har dött ut.

Överkursuppgifter

6. Bestäm skjuvkraften och böjmomentet i snitten (1) och (2).
7. En pråm lastad med järnskrot med massan m ligger i en sluss vars vattenyta har arean A. Hur mycket höjs eller sänks vattenytan om man lastar av skrotet och lägger det på kajen brevid slussen? Vad blir resultatet om man istället slänger skrotet i vattnet så att det sjunker till slussens botten? Densiteterna för järn och vatten betecknas ρ_j respektive ρ_v.

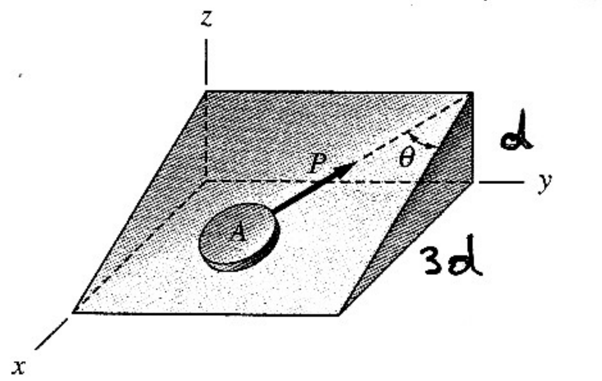
Lycka till!

1.



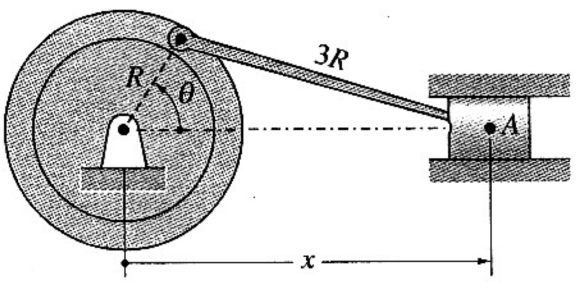
z
F
9a
E
D
A
x
10 a
C
7a
7a
B
y

2.



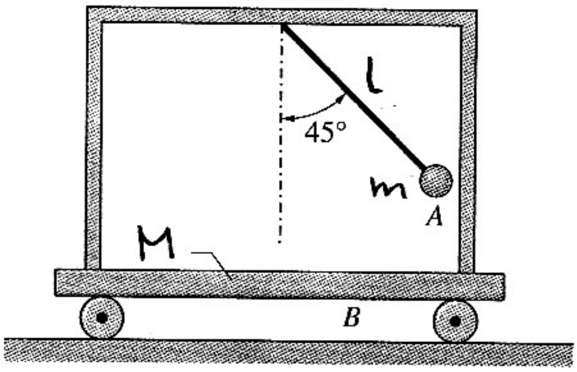
z
P
θ
d
y
A
3d
x

3.



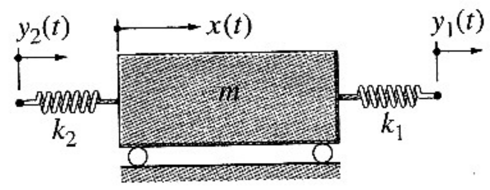
3R
R
θ
A
x

4.



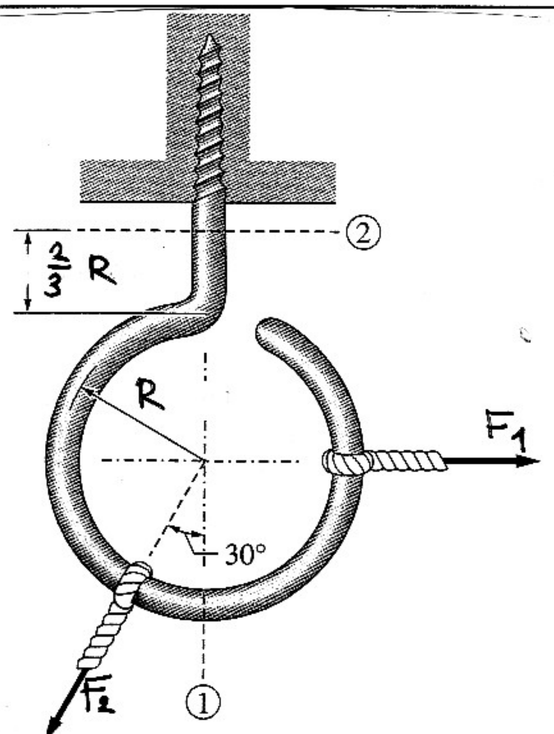
l
45°
m
A
M
B

5.



y2(t)
x(t)
y1(t)
m
k2
k1

6.



2
2/3 R
R
F1
30°
F2
1

1. Beteckna spänningarna med $T_A, \dots, T_E$.

Plattan angrips av krafterna

$$\mathbb{F}_A = T_A \left(-\frac{7}{\sqrt{130}} \hat{\mathbb{i}} + \frac{9}{\sqrt{130}} \hat{\mathbb{k}} \right)$$

$$\mathbb{F}_B = T_B \left(-\frac{7}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{i}} - \frac{10}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{j}} + \frac{9}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{k}} \right)$$

$$\mathbb{F}_C = T_C \hat{\mathbb{j}}$$

$$\mathbb{F}_D = T_D \left(\frac{7}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{i}} - \frac{10}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{j}} + \frac{9}{\sqrt{230}} \hat{\mathbb{k}} \right)$$

$$\mathbb{F}_E = T_E \left(\frac{7}{\sqrt{130}} \hat{\mathbb{i}} + \frac{9}{\sqrt{130}} \hat{\mathbb{k}} \right)$$

i punkterna $A, \dots, E$

samt av tyngdkraften

$$\mathbb{W} = -mg \hat{\mathbb{k}}$$

i sin mittpunkt. Enligt antagandet gäller att

$$T_A = T_E$$

$$T_B = T_D$$

Kraftjämvikt och momentjämvikt (t ex kring F)

ger nu att

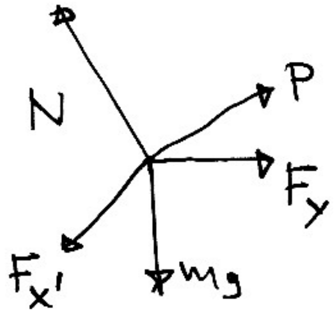
$$T_A = T_E = \frac{\sqrt{130}}{36} mg$$

$$T_B = T_D = \frac{\sqrt{230}}{36} mg$$

$$T_C = \frac{5}{9} mg$$

2. Frilägg skivan:

(F$_{x'}$ är riktad längs med planet och vinkelrät mot y-axeln.)



Jämvikts ekvationerna lyder

$$\begin{cases} F_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} P - \frac{1}{\sqrt{10}} mg \\ F_{y'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} P \\ N = \frac{3}{\sqrt{10}} mg \end{cases}$$

Insättning i friktionsvillkoret $\sqrt{F_{x'}^2 + F_y^2} = \mu N$ ger ekvationen

$$P^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} mg\, P + \frac{1}{10}(mg)^2 = \frac{9}{10}(mg\mu)^2$$

med lösningen

$$P = \left[\frac{1}{2\sqrt{5}} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{9}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}}\right] mg$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[1 + \sqrt{18\mu^2 - 1}\right] mg$$

3. Cosinussatsen ger att

$$(3R)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta$$

varur fås att

$$x = R\left[\cos\theta + \sqrt{9-\sin^2\theta}\right]$$

Derivering m a p tiden ger

$$\dot{x} = R\dot{\theta}\left[-\sin\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{9-\sin^2\theta}}\right]$$

4. Beteckna vagnens och pendelkulans hastighet relativt marken med v respektive u.

Bevarande av energi och rörelsemängd ger då

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ Mv + mu = 0 \end{cases}$$

varur fås att

$$v = \pm\sqrt{\frac{m^2}{M(m+M)}(2-\sqrt{2})gl}$$

Vagnen rör sig åt höger (vänster) första (andra) gången pendeln är vertikal.

5. Newtons andra lag ger rörelseekvationen

$$m\ddot{x} + k_1(x - y_1) + k_2(x - y_2) = 0$$

Insättning av $y_1 = Y_1 \sin \omega t$, $y_2 = Y_2 \sin \omega t$

samt ansatsen

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

ger att

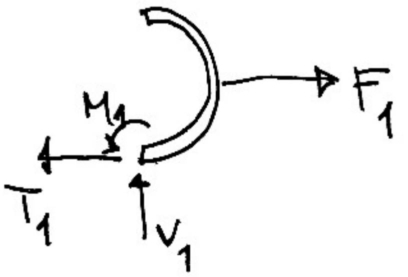
$$-mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + k_1\left(A \sin(\omega t + \varphi) - Y_1 \sin \omega t\right)$$
$$+ k_2\left(A \sin(\omega t + \varphi) - Y_2 \sin \omega t\right) = 0$$

varur fås att

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \dfrac{k_1 Y_1 + k_2 Y_2}{k_1 + k_2 - m\omega^2} \end{cases}$$

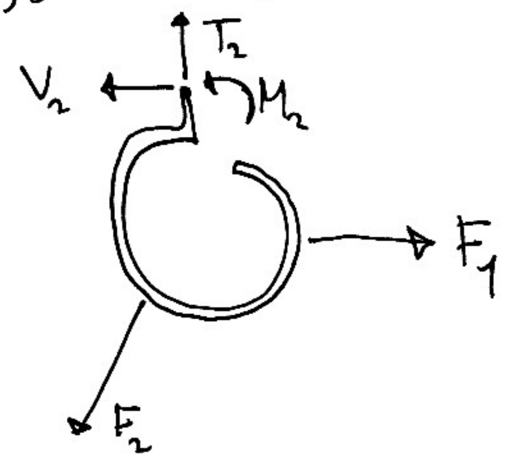
<u>Svar:</u> $x = \dfrac{k_1 Y_1 + k_2 Y_2}{k_1 + k_2 - m\omega^2} \sin \omega t$

6. Frilägg den yttersta delen från snittet ①:



Uppenbarligen är skjuvspänningen $V_1 = 0$ och böjmomentet $M_1 = F_1 R$

Frilägg nu från snittet ②:



Jämviktsekvationerna ger nu att

$$V_2 = F_1 - \frac{1}{2} F_2$$

$$M_2 = -V_2 \frac{5}{3} R = \frac{5R}{3}\left(\frac{1}{2} F_2 - F_1\right)$$

7. Använd Arkimedes princip:

Den undanträngda vätskans massa är lika med prämens (plus lastens) massa.

Man finner att vattenytan sjunker i båda fallen:

Sträckan $\Delta h = \dfrac{m}{\rho_v A}$ om skrotet läggs på kajen

" $\Delta h' = \dfrac{m}{A}\left(\dfrac{1}{\rho_v} - \dfrac{1}{\rho_j}\right)$ om skrotet sjunker.