Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 27 augusti 2007 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-5.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-7 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-17 poäng ger betyg 4 och 18-21 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

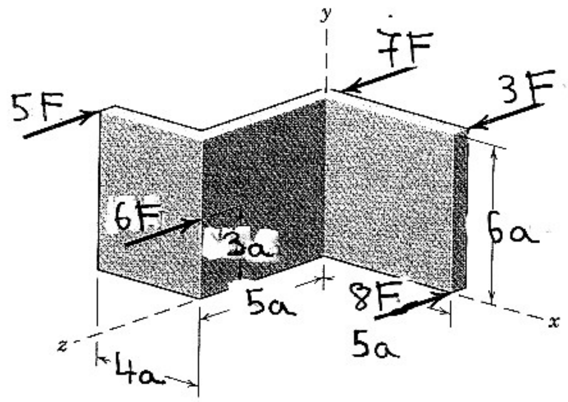
1. Bestäm koordinaterna för den punkt där resultaten till det avbildade kraftsystemet skär xy-planet.
2. Cylindern har massan m, och friktionskoefficenten mellan cylindern och planen är μ. Hur stort måste vridmomentet M vara för att cylindern skall börja rotera?
3. Bestäm sambandet mellan hastigheterna för A och B i det avbildade läget. (Trissornas radier försummas.)
4. Kulan ges en utgångsfart v_0 i den angivna riktningen längs det lutande planet. Bestäm dess fart efter tiden t. (y-axeln är horisontell.)
5. Givet fjäderkonstanten k och massan m, bestäm dämpningskoefficienten c så att systemet blir kritiskt dämpat.

Överkursuppgifter

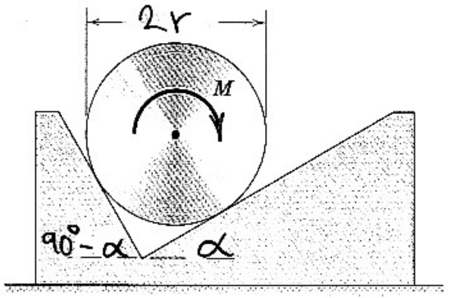
6. En kvartscirkelformad balk belastas enligt figuren. Bestäm skjuvkraften V och böjmomentet M som funktioner av vinkeln θ.
7. Givet vattendjupet h och densiteterna ρ_v och ρ_b för vatten respektive betong, bestäm den minsta tjockleken a så att muren inte välter kring punkten C.

Lycka till!

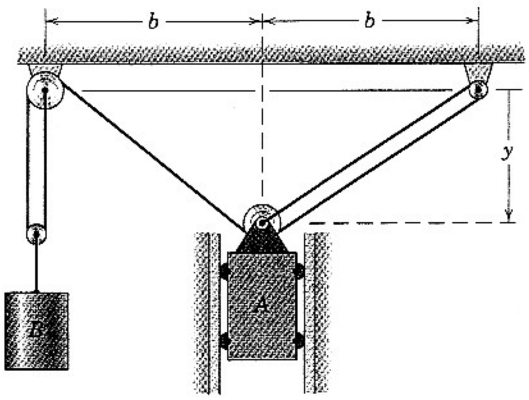
1.


y
7F
5F
3F
6F
3a
6a
5a
8F
5a
x
z
4a

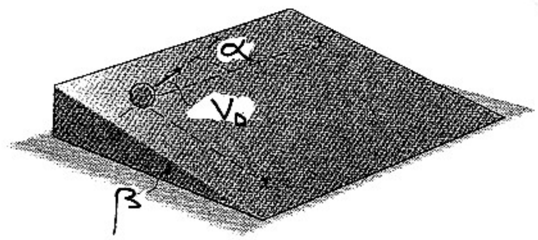
2.


2r
M
90°-α
α

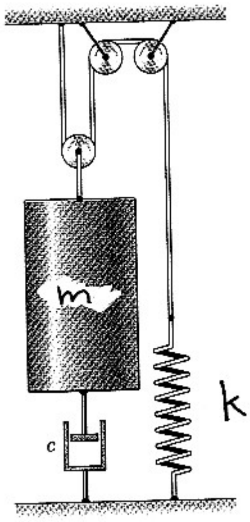
3.


b
b
y
B
A

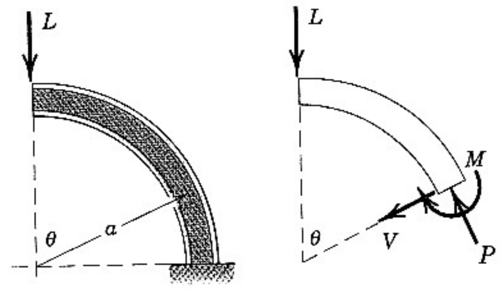
4.


α
x
V0
β

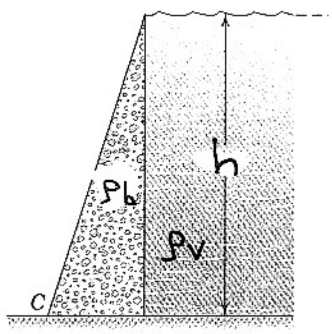
5.


m
c
k

6.


L
θ
a
L
M
V
θ
P

7.


h
ρb
ρv
C
a

1. Kraftsystemet har resultanten

$$\mathbb{R} = (-5F - 6F - 8F + 7F + 3F)\hat{\mathbb{k}} = -9F\hat{\mathbb{k}}$$

och vridmomentet m.a.p. Origo

$$\mathbb{M}_o = (-4a\hat{\imath} + 6a\hat{\jmath} + 5a\hat{\mathbb{k}}) \times (-5F\hat{\mathbb{k}})$$
$$+ (3a\hat{\jmath} + 5a\hat{\mathbb{k}}) \times (-6F\hat{\mathbb{k}}) + 5a\hat{\imath} \times (-8F\hat{\mathbb{k}})$$
$$+ 6a\hat{\jmath} \times 7F\hat{\mathbb{k}} + (5a\hat{\imath} + 6a\hat{\jmath}) \times 3F\hat{\mathbb{k}}$$

$$= aF(-20\hat{\jmath} - 30\hat{\imath} - 18\hat{\imath} + 40\hat{\jmath} + 42\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} + 18\hat{\imath})$$

$$= aF(12\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})$$

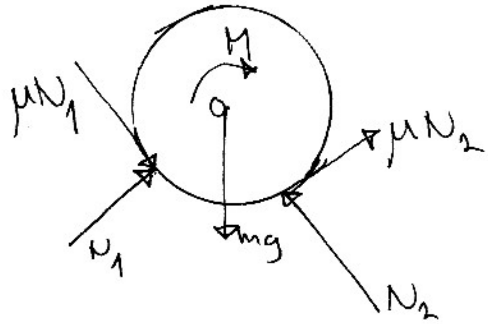
För att den skall vara ekvivalent med en kraft $\mathbb{R}$ som angriper i punkten med koordinaterna $(x, y, 0)$ krävs att

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \times (-9F\hat{\mathbb{k}}) = \mathbb{M}_o$$

Varur fås att

$$\begin{cases} x = \frac{5}{9}a \\ y = -\frac{4}{3}a \end{cases}$$

2. Frilägg cylindern då rotation precis sker:



Jämviktsekvationerna lyder

$$\begin{cases} \nwarrow: & -\mu N_1 + N_2 - mg\cos\alpha = 0 \\ \nearrow: & N_1 + \mu N_2 - mg\sin\alpha = 0 \\ \overset{\frown}{O}: & -r\mu N_1 - r\mu N_2 + M = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{mg}{1+\mu^2}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \\ N_2 = \dfrac{mg}{1+\mu^2}\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right) \\ M = \dfrac{mgr\mu}{1+\mu^2}\left((1+\mu)\sin\alpha + (1-\mu)\cos\alpha\right) \end{cases}$$

3. Sambandet mellan de vertikala koordinaterna y_A och y_B är

$$3\sqrt{y_A^2+b^2}+2y_B = \text{konstant}$$

Derivering med avseende på tiden ger sambandet mellan hastigheterna v_A och v_B

$$\frac{3y_A v_A}{\sqrt{y_A^2+b^2}} + 2v_B = 0$$

Insättning av $y_A = y$ ger det sökta sambandet

$$\frac{3y}{\sqrt{y^2+b^2}} v_A + 2v_B = 0$$

4. Kulan påverkas av tyngdkraften

$mg(+\hat{\mathbb{i}}\sin\beta - \hat{\mathbb{k}}\cos\beta)$

och normalkraften från planet $N\hat{\mathbb{k}}$.

Newtons andra lag ger accelerationens komponenter i x- och y-led

$$\begin{cases} a_x = g\sin\beta \\ a_y = 0 \end{cases}$$

Integration av dessa ekvationer ger, tillsammans med begynnelsevillkoren

$$\begin{cases} V_x^0 = -V_0\sin\alpha \\ V_y^0 = V_0\cos\alpha \end{cases},$$

att

$$\begin{cases} V_x = -V_0\sin\alpha + t\,g\sin\beta \\ V_y = V_0\cos\alpha \end{cases}$$

Farten är

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-V_0\sin\alpha + tg\sin\beta)^2 + (V_0\cos\alpha)^2}$$

5. Beteckna tyngdens avstånd från jämviktsläget med y.

Rörelseekvationen lyder då

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + 4ky = 0.$$

Rötterna till den karaktäristiska ekvationen är

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{4k}{m}}.$$

De sammanfaller, d v s dämpningen är kritisk, då

$$c = 4\sqrt{km}$$

6. Jämviktsekvationerna för den övre delen av balken ger direkt att

$$\begin{cases} V = -L\cos\theta \\ M = La\sin\theta \end{cases}$$

7. Beteckna murens längd med l.

Tyngdkraften på muren utövar vridmomentet

m a p c

$$M_c = \int_0^h dy \; a \frac{y}{h} \, l \, \rho_b \, g \, a\left(1 - \frac{y}{2h}\right)$$

$$= \frac{a^2 h \, l \, \rho_b \, g}{3}$$

Vridmomentet från vattentrycket är

$$M_c' = -\int_0^h dy \; l \, \rho_v \, g \, y \, (h-y)$$

$$= - \frac{l \, \rho_v \, g \, h^3}{6} .$$

Då vältning precis sker skall summan av dessa vara noll, varur fås att

$$a = h \sqrt{\frac{\rho_v}{2\rho_b}} .$$