Mekanik 1 F1

FFM 515

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2002-01-12	x	x	
2002-03-15	x	x	
2002-08-??			
2003-01-11	x	x	
2003-03-14	x	x	
2003-08-25	x	x	
2004-01-10	x	x	
2004-03-12	x	x	
2004-06-18	x	x	
2004-08-23	x	x	
2005-01-08	x	x	
2005-03-14	x	x	
2005-08-22	x	x	
2006-01-07	x	x	

24 februari 2006

Tentamen i Mekanik F del A FFM052

Tid och plats: Lördagen den 12 januari 2002 kl 8.45 - 12.45 i M.
Jourhavande assistent: Henrik Larsson, ankn 3184.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) Svängningstiden för en matematisk pendel vid *små* utslagsvinklar är som bekant $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, där g är tyngdaccelerationen och l är pendelns längd. Ökar eller minskar svängningstiden om utslagsvinkeln ökas? (5 p)

   b) Om man släpper en ihålig blykula och en massiv aluminiumkula med samma radie och massa så faller de som bekant lika fort. Vilken rullar fortast utför ett lutande plan? (5 p)

2. En kropp påverkas av krafterna $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ som angriper i punkter med ortsvektorerna $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ relativt origo O. Situationen är sådan att kroppen är i jämvikt, det vill säga den totala kraften och det totala vridmomentet med avseende på O är båda lika med noll. Visa att det totala vridmomentet med avseende på en godtycklig punkt O' (som har ortsvektorn $\mathbf{R}$ med avseende på O) också är lika med noll.

3. En trappstege består av två homogena sidor som vardera har längden 150 cm och massan 5 kg samt ett tvärstag med längden 40 cm och försumbar massa. Delarna är fästa vid varandra med friktionsfria gångjärn så att konstruktionen från sidan ser ut som bokstaven A. Toppvinkeln (d v s vinkeln mellan de två sidorna) är 40^0. Beräkna spänningen (enhet N) i tvärstaget när trappstegen står på ett mycket glatt golv och en person som väger 75 kg står högst upp.

4. Efter ett lätt slag glider en ishockeypuck 14 m under 4 s innan den stannar. Bestäm friktionskoefficienten mellan pucken och isen.

Vänd!

5. En alfapartikel med massan m skjuts med hastigheten $\mathbf{v}$ mot en guldatom med massan M i vila. Efter stöten, som är elastisk, har alfapartikeln en hastighet $\mathbf{v}'$ som bildar vinkeln 30^o med $\mathbf{v}$. Bestäm farten $v' = |\mathbf{v}'|$.

6. En homogen stång med längden b och massan m är horisontellt upphängd i sina ändpunkter med två vertikala masslösa linor med längden l. Linorna är fästa i två fixa punkter på samma höjd och på avståndet b från varandra. Systemet kan utföra en svängningsrörelse kring detta jämviktsläge genom att stången vrider sig fram och tillbaka kring en vertikal axel genom sin mittpunkt och samtidigt rör sig upp och ner så att linorna hela tiden är sträckta.

   a) Bestäm systemets potentiella energi U som funktion av stångens vridningsvinkel ϕ relativt jämviktsläget. (Sätt $U = 0$ då $\phi = 0$.) (5 p)

   b) Bestäm systemets kinetiska energi K med antagandet att vridningsvinkeln ϕ är liten. (Detta betyder att det är tillåtet att försumma den kinetiska energin för den vertikala translationsrörelsen jämfört med den kinetiska energin för rotationsrörelsen.) Bestäm sedan periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget. (*Ledning:* En harmonisk oscillator med $U = \frac{1}{2}kx^2$ och $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ har periodtiden $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.) (5 p)

Lycka till!

Tentamen i Mekanik F del A 020112

Lösningsskiss med svar.

Uppgift 1a

SVAR: Vid stora vinklar så kommer svängningstiden att öka, ty $\sin\phi << \phi$, dvs approximationen $\sin\phi \sim \phi$ skulle ge en för liten svängningstid.

Uppgift 1b

SVAR: Den massiva kulan rullar snabbast ty den ihåliga kulan har ett större tröghetsmoment.

Uppgift 2

Givet: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ och $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0$, där $\tau_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ med avseende på origo O. Tröghetsmomentet är nu med avseende på O' (O och O' är relaterade med den konstanta ortsvektorn $\vec{R}$), vilket ger att man har krafterna $\vec{F}_i$ och ortsvektorer $\vec{r}_i'$. Detta ger att

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i' = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i = 0 - \vec{R} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \ . \tag{1}$$

SVAR: Se ovan.

Uppgift 3

Pga symmetri räcker det med att studera endast den ena sidan. Vi börjar med att sätta upp kraftekvationer i x och y led, samt att det ska vara momentjämvikt. F är kraften från tvärsteget (dvs den kraft vi söker), N är normalkraften från backen, α är vinkel mellan sidan och golvet dvs $\alpha = 90^o - 20^o = 70^o$. F_1 är kraften från den andra sidan högst upp. $L = 0.4m$, $L_1 = 1.5m$, $M = 75$ kg och $m = 5$ samt L_2 är höjden från golvet till tvärsteget. Detta ger följande kraft och momentekvationer:

$$\begin{aligned} x: &\quad F - F_1 = 0 \\ y: &\quad N - \frac{Mg}{2} - mg = 0 \qquad (2) \\ \text{Momentekvation}: &\quad \frac{mgL_1}{2}\cos\alpha + \frac{MgL_1}{2}\cos\alpha - F_1 L_1 \sin\alpha - FL_2 = 0 \ , \end{aligned}$$

Insättning av x-ekvationen i momentekvationen ger

$$F = \frac{gL_1(M+m)\cos\alpha}{2(L_1\sin\alpha - L_2)} \ . \tag{3}$$

Mha trigometri ser man att $L_1 \sin\alpha - L_2 = \frac{L}{2}\tan\alpha$, vilket ger att

$$F = \frac{gL_1(M+m)(\cos\alpha)^2}{L\sin\alpha} = 367\text{N} \ . \tag{4}$$

SVAR: $F = 367$ N.

Uppgift 4

Givet: $S = 14$ m och $t = 4$ s. Friktionskraften på pucken är $F = -\mu mg$. Vilket ger att totala friktionsenergin är $E_f = \mu mgS$. Från början var energin $E_b = \frac{mv_0^2}{2}$. $E_f = E_b$ ger

$$\frac{v_0^2}{2} = \mu g S \ . \tag{5}$$

Använder nu att $F = ma = \frac{dv}{dt}m = -\mu mg$. Integration ger

$$v_0 = \mu g t \ . \tag{6}$$

Insättning av ekvationen ovan ger nu följande friktionskoefficient

$$\mu = \frac{2S}{gt^2} = 0.18 \ . \tag{7}$$

SVAR: Friktionskoefficienten är $\mu = 0.18$.

Uppgift 5

Sökt $v' = |\vec{v}'|$. Vi använder att energin och rörelsemängden är bevarade. Detta ger:

$$\begin{aligned} P_{fx} &= mv_x \ , \quad v_x = |\vec{v}| \ , \quad P_{fy} = 0 \ , \\ P_{ex} &= mv'\cos\alpha + Mv_{2x} \ , \quad \alpha = 30^o \quad P_{ey} = mv'\sin\alpha + Mv_{2y} \ , \qquad (8) \\ E_f &= \frac{mv_x^2}{2} \ , \quad E_e = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2)}{2} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

$E_f = E_e$, $P_{fx} = P_{ex}$ och $P_{fy} = P_{ey}$ samt lite räknande ger att

$$v' = \frac{v_x}{M+m}\left(m\cos\alpha + \sqrt{M^2 - m^2(1-(\cos\alpha)^2)}\right) \ . \tag{10}$$

SVAR: Farten blir $v' = \frac{v_x}{M+m}\left(m\cos\alpha + \sqrt{M^2 - m^2(1-(\cos\alpha)^2)}\right)$.

Uppgift 6a

Sökt: Potentiella energin $U(\phi)$. Där ϕ är stångens vridningsvinkel. Som vanligt är $U = mgh$ där höjden h är en funktion av vridningsvinkel. Höjden ges av

$$h = \ell(1 - \sqrt{1 - \ell_2^2/\ell^2}) \ , \quad \ell_2 = b\sin(\phi/2) \ . \tag{11}$$

Detta ger att den potentiella energin är

$$U(\phi) = mg\ell(1 - \sqrt{1 - (b^2/\ell^2)[\sin(\phi/2)]^2}) \ . \tag{12}$$

SVAR: $U(\phi) = mg\ell(1 - \sqrt{1 - (b^2/\ell^2)[\sin(\phi/2)]^2})$.

Uppgift 6b

Sökt: kinetiska energin för små vinklar samt periodtiden T. Små vinklar ger att rörelsen i vertikalled kan försummas då den kinetiska energin K beräknas. Detta ger att

$$K = \frac{I\dot{\phi}^2}{2}, \quad I = \frac{1}{12}mb^2 . \tag{13}$$

Vi använder nu att den totala energin $E = K + U$ är konstant, dvs $\frac{dE}{dt} = 0$. Detta medför att vi får följande svängningsekvation:

$$\ddot{\phi} + \frac{3g}{\ell}\phi = 0 . \tag{14}$$

Notera att

$$U \approx \frac{mgb^2\phi^2}{8\ell}, \tag{15}$$

för små vinklar. Ekvation (14) ger nu att $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$.

SVAR Periodtiden blir $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$ medans den kinetiska energin blir $K = \frac{mb^2\dot{\phi}^2}{24}$.

Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 15 mars 2002 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

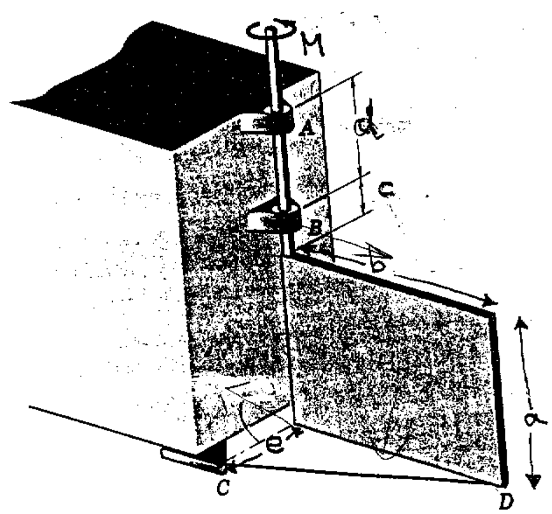
1. a) En pråm lastad med järnskrot ligger i en sluss med stängda portar. Hur påverkas vattenytans läge om man slänger skrotet överbord? Förklara!

   b) Jorden angrips av en gravitationskraft som är riktad mot solen. Ändå är medelavståndet mellan jorden och solen i stort sett oförändrat sedan urminnes tider. Hur går detta ihop med Newtons andra lag?

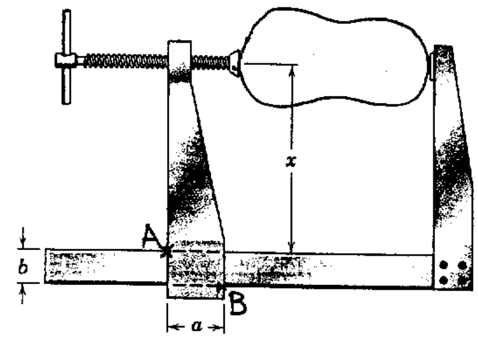
2. Ett kraftsystem består av ett antal krafter $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ med angreppspunkter med ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ med avseende på en punkt A. Kraftsumman är $\mathbf{R}$ och vridmomentet med avseende på A är $\mathbf{M}_A$. Uttryck kraftsystemets vridmoment $\mathbf{M}_B$ med avseende på en annan punkt B med hjälp av $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_A$ och vektorn $\mathbf{r}_{AB}$ från A till B.

3. Den homogena plattan har massan $m = 15$ kg och är fast förbunden med den vertikala axeln, som är fritt vridbar. Axeln påverkas av ett yttre vridmoment $M = 120$ Nm. Konstruktionens tyngd upptas helt av lager A. Bestäm storleken av den kraft som verkar på lager B från axeln.

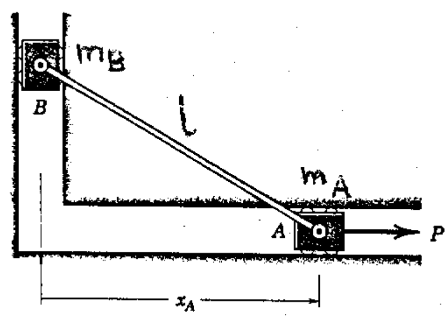
$$\begin{cases} a = 400 \text{ mm} \\ b = 600 \text{ mm} \\ c = 80 \text{ mm} \\ d = 200 \text{ mm} \\ e = 200 \text{ mm} \end{cases}$$



4. Avstånden a och b och den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan skruvtvingens två delar är givna. Bestäm det minsta värdet på avståndet x för att man skall kunna spänna fast en kropp enligt figuren utan att glidning sker. (Bortse från tyngdkraften. Observera att när man spänner skruvtvingen så står de två delarna bara i kontakt med varandra i punkterna A och B.)

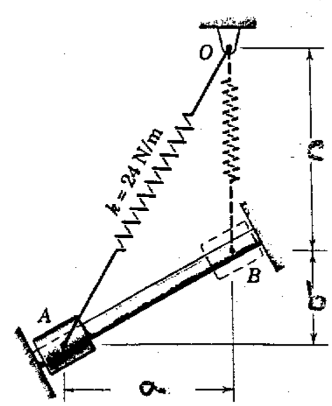


5. I det ögonblick som återges i figuren har kroppen med massan m_A hastigheten v_A riktad åt höger. Bestäm dess momentana acceleration om den då angrips av en yttre kraft med storleken P. (Bortse från friktionen och stångens massa. All rörelse sker i ett horisontalplan, d v s tyngdkraften spelar inte någon roll i problemet.)



6. Fjädern har vilolängden $l = 375$ mm. Hylsan har massan $m = 0,9$ kg och släpps i vila i läge A. Bestäm dess fart när den når läge B. (Bortse från friktionen. All rörelse sker i ett vertikalplan.)

$$\begin{cases} a = 450 \text{ mm} \\ b = 250 \text{ mm} \\ c = 500 \text{ mm} \end{cases}$$



Lycka till!

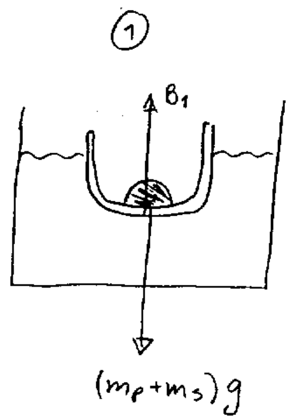
1) Kalla prämens massa, m_p

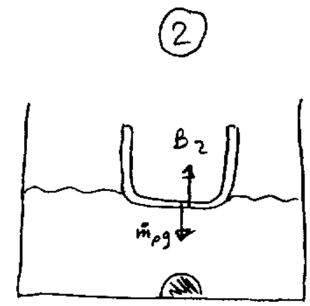
skrotmassan, m_s

skrotets densitet, ρ_s

skrotets volym, $V_s = \frac{m_s}{\rho_s}$

vattnets densitet, ρ_v





① Lyftkraften från vattnet, $B_1 = (m_p + m_s)g$

$\Rightarrow$ undanträngd volym vatten V_1: $\rho_v V_1 = m_p + m_s$

② Lyftkraften från vattnet, $B_2 = m_p g$

$\Rightarrow$ undanträngd volym vatten V_2: $\rho_v V_2 = \rho_v V_s + m_p =$

$$= \rho_v \frac{m_s}{\rho_s} + m_p$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = m_s\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_s}\right)$$

$$\rho_s > \rho_v \quad \Rightarrow \quad V_1 > V_2$$

$\Rightarrow$ Vattennivån sjunker!

Mek A   TENTA 020315

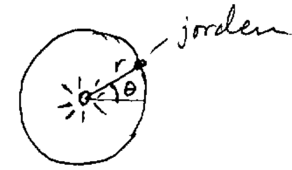
1b) Vid cirkelrörelse finns (bara) en acceleration i radiell led, $a_r = -\frac{v^2}{\rho}$, v = fart

ρ = cirkelns radie

Avståndet mellan jorden och solen är dock oförändrat, ty centralkraften $F = m_J a_r$ ger ej upphov till någon hastighet i radiell led. Kraften ser istället till att hålla kvar jorden i dess omloppsbana. Newtons andra lag är ej bruten.

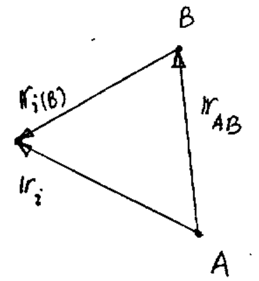
Kom ihåg: I polära koordinater ges accelerationen i radiell led av

$$a_r = \ddot{r} - \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{= \frac{v^2}{\rho} \text{ ovan}}$$



Så även om $\ddot{r} = 0$ och $\dot{r} = 0$ finns det en acceleration i negativ radiell led.

2) $$\mathbb{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$$



Ur figuren fås, $\mathbb{r}_{i(B)} = -\mathbb{r}_{AB} + \mathbb{r}_i$

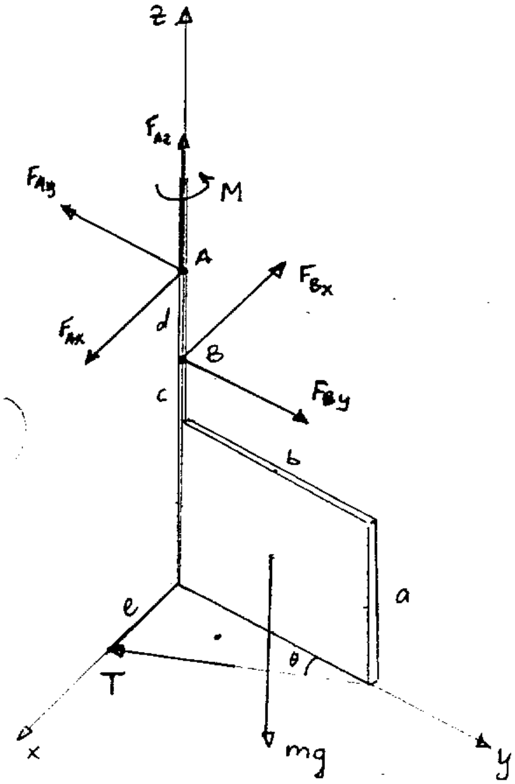
$$\Rightarrow \mathbb{M}_B = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_{AB}) \times \mathbb{F}_i =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i}_{= \mathbb{M}_A} - \mathbb{r}_{AB} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i}_{= \mathbb{R}} = \mathbb{M}_A - \mathbb{r}_{AB} \times \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \mathbb{M}_B = \mathbb{M}_A - \mathbb{r}_{AB} \times \mathbb{R}$$

3) Låt $h \equiv a+c+d$

$$\sin\theta = \frac{e}{\sqrt{b^2+e^2}} \; ; \; \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+e^2}}$$



Momentjämvikt kring A i z-led:

$$M - eT\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{M\sqrt{b^2+e^2}}{be} \quad (= 632{,}456 \text{ N})$$

Momentjämvikt kring A i x-led:

$$-\frac{b}{2}mg + d\cdot F_{By} - h\cdot T\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_{By} = \frac{b}{2d}mg + \frac{h}{d}\frac{M\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}}{\cancel{b}e}\cdot\frac{\cancel{b}}{\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}} =$$

$$= \frac{b}{2d}mg + \frac{h}{de}M \quad (= 2260{,}73 \text{ N})$$

Momentjämvikt kring A i y-led:

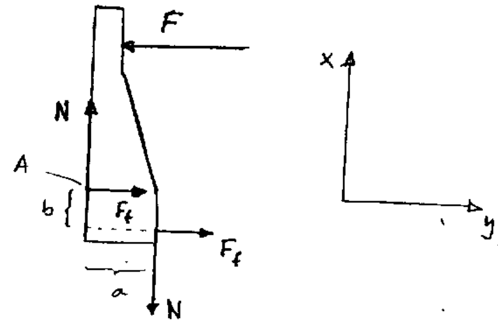
$$-h\cdot T\sin\theta + dF_{Bx} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = \frac{h}{d}\cdot\frac{M\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}}{b\cancel{e}}\cdot\frac{\cancel{e}}{\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}} = \frac{h}{bd}M \quad (= 680 \text{ N})$$

Den totala kraften $F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{hM}{bd}\right)^2 + \left(\frac{bmg}{2d} + \frac{hM}{de}\right)^2} = 2360{,}78 \text{ N}$$

4) Precis innan glidning inträffar så är $F_f = \mu_s N$.



Kraftjämvikt i x-led ger att att de båda normalkrafterna är lika stora och motriktade.

Momentjämvikt kring A :

$$\curvearrowright: \quad -x\cdot F + a\cdot N - b\cdot F_f = 0$$

$$\Rightarrow aN - b\mu_s N = xF$$

$$\Rightarrow N = \frac{xF}{a - b\mu_s}$$

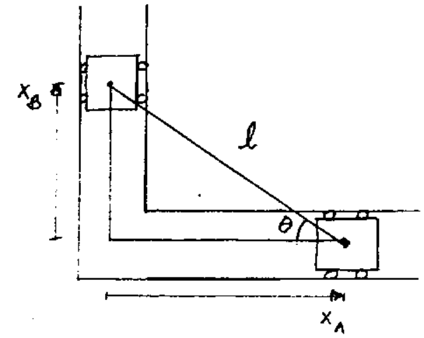
Kraftjämvikt i y-led :

$$\Rightarrow 2F_f = F \quad , \text{ där } F_f = \mu_s N = \frac{\mu_s x F}{a - b\mu_s}$$

$$\Rightarrow \frac{2\mu_s x \cancel{F}}{a - b\mu_s} = \cancel{F} \qquad \Rightarrow x = \frac{a - b\mu_s}{2\mu_s} = \frac{a}{2\mu_s} - \frac{b}{2}$$

Svar: För $x \geq \dfrac{a}{2\mu_s} - \dfrac{b}{2}$ sker ingen glidning.

5) Ta först fram ett samband mellan kropparnas accelerationer:



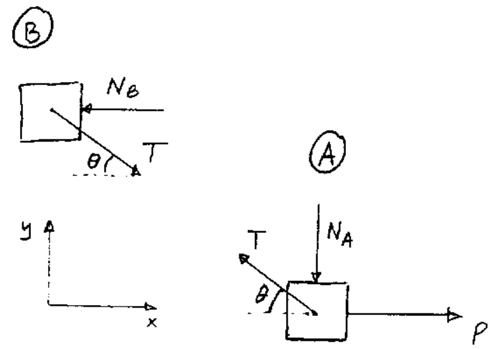
Pythagoras sats $\Rightarrow x_B = \sqrt{l^2 - x_A^2}$

$$\frac{d}{dt}: \quad \dot{x}_B = \frac{-x_A \dot{x}_A}{\sqrt{l^2 - x_A^2}}$$

$$\frac{d}{dt}: \quad \ddot{x}_B = \frac{(-x_A\ddot{x}_A - \dot{x}_A^2)\sqrt{l^2 - x_A^2} - x_A\dot{x}_A \cdot x_A\dot{x}_A / \sqrt{l^2 - x_A^2}}{l^2 - x_A^2} =$$

$$= \frac{-l^2\dot{x}_A^2 + x_A\ddot{x}_A(x_A^2 - l^2)}{(l^2 - x_A^2)^{3/2}}$$

Frilägg båda kropparna:



Newtons 2:a lag för kropp B:

$$\uparrow: \; -T\cdot\sin\theta = m_B\ddot{x}_B$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{l^2 - x_A^2}}{l} \; ; \; \cos\theta = \frac{x_A}{l}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{m_B l}{\sqrt{l^2 - x_A^2}} \cdot \ddot{x}_B = m_B l \; \frac{l^2\dot{x}_A^2 + x_A\ddot{x}_A(l^2 - x_A^2)}{(l^2 - x_A^2)^2}$$

Newtons 2:a lag för kropp A:

$$\longrightarrow: \; P - T\cos\theta = m_A\ddot{x}_A$$

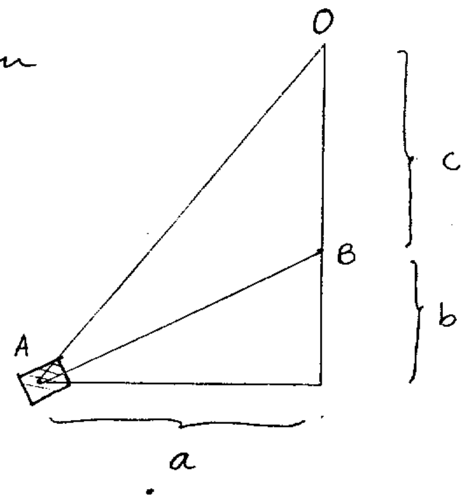
$$\Rightarrow m_A\ddot{x}_A = P - \frac{m_B l^3 \dot{x}_A^2}{(l^2 - x_A^2)^2}\cdot\frac{x_A}{l} - \frac{m_B \cancel{l} x_A\ddot{x}_A}{l^2 - x_A^2}\cdot\frac{x_A}{\cancel{l}} \quad , \; \dot{x}_A \equiv V_A$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_A = \frac{1}{m_A + m_B\frac{x_A^2}{l^2 - x_A^2}}\left(P - \frac{m_B l^2 x_A V_A^2}{(l^2 - x_A^2)^2}\right)$$

Mek A TENTA 020315

6) Avståndet $\overline{OA} = \sqrt{a^2+(b+c)^2}$

Systemets totala energi då massan befinner sig i läge A:



$$E_A = E_A^{kin} + E_A^{grav} + E_A^{fjäder} =$$

$$= 0 + 0 + \frac{k}{2}\left(\overline{OA} - \ell\right)^2 =$$

$$= \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2} - \ell\right)^2$$

Totala energin i B:

$$E_B = E_B^{kin} + E_B^{grav} + E_B^{fjäder} =$$

$$= \frac{mv_B^2}{2} + mgb + \frac{k}{2}\left(c-\ell\right)^2$$

Systemets totala energi är bevarad:

$$\Rightarrow E_A = E_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2} - \ell\right)^2 = \frac{mv_B^2}{2} + mgb + \frac{k}{2}(c-\ell)^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot\left[\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-\ell\right)^2 - (c-\ell)^2\right] - 2gb} =$$

$$= 1{,}15563 \text{ m/s}$$

Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

Kurskod: FFM052.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 11 januari 2003 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. En geting med massan 0,43 g är instängd i en lufttät burk, som står på en noggrann laboratorievåg. När getingen sitter på burkens botten visar vågen 178,14 g.

   a) Vad visar vågen när getingen står stilla i luften utan att vidröra burken?

   b) Vad visar vågen när getingen accelererar uppåt med 9,81 m/s^2 utan att vidröra burken? (Luftens rörelse försummas.)

2. De två fjädrarna i den vänstra figuren har fjäderkonstanterna k_1 respektive k_2 och de ospända längderna l_1 respektive l_2. Man vill ersätta dem med en enda fjäder med fjäderkonstanten k och ospända längden l som i den högra figuren. Bestäm k och l uttryckta i k_1, k_2, l_1 och l_2 så att de två systemen blir ekvivalenta.

3. Den homogena stången OC har massan m och kan fritt vrida sig kring O. Fjädern har fjäderkonstanten k och är ospänd när C sammanfaller med A. Bestäm den erforderliga spännkraften T för att konstruktionen skall vara i jämvikt enligt figuren.

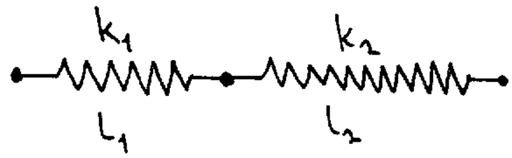
4. Bestäm kraften och vridmomentet som verkar på den högra delen av balken i punkten A. (Tyngdkraften på balken försummas.)

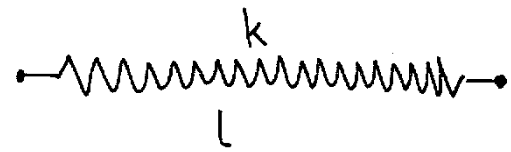
5. Ett mynt läggs på en horisontell skiva på avståndet r från centrum. Skivan startar i vila och har därefter den konstanta vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Den statiska friktionskoefficienten mellan skivan och myntet är μ. Bestäm det antal varv N som skivan hinner vrida sig innan myntet börjar glida.

6. De två bilarna kolliderar och fastnar i varandra. Bestäm deras hastighet (till storlek och riktning) omedelbart efter kollisionen.

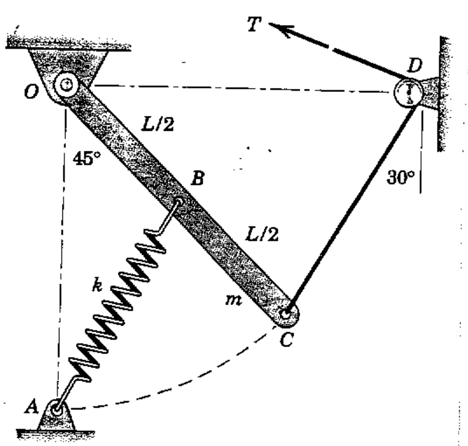
Lycka till!

2.

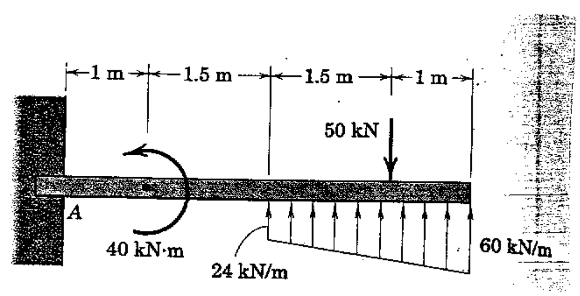

k_1
k_2
L_1
L_2


k
l

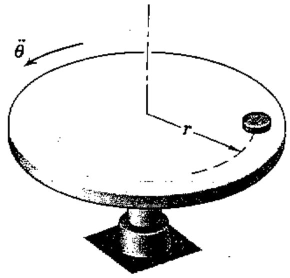
3.


T
D
O
L/2
45°
B
30°
L/2
k
m
C
A

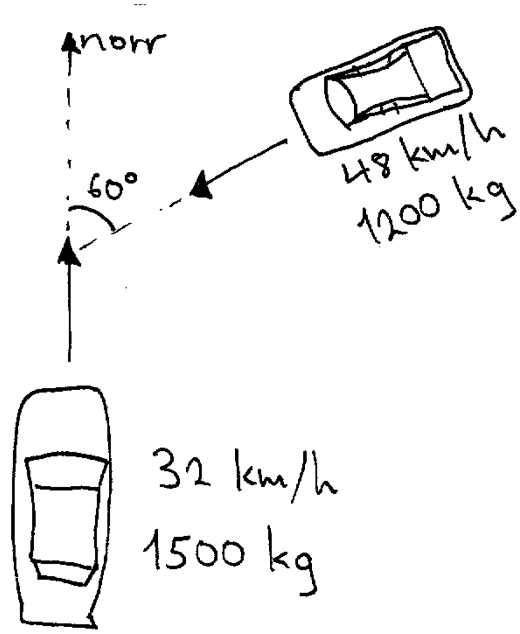
4.


1 m
1.5 m
1.5 m
1 m
50 kN
A
40 kN·m
24 kN/m
60 kN/m

5.


$\ddot{\theta}$
r

6.


norr
60°
48 km/h
1200 kg
32 km/h
1500 kg

1a) Vågen visar fortfarande 178,14 g eftersom det behövs en kraft $F = m_{geting} \cdot g$ från luften för att hålla getingen stilla. Luften kommer därmed att utöva kraften $F = m_{geting} \cdot g$ på vågen, vilket är samma kraft som getingen utövade på vågen då den satt på burkens botten.

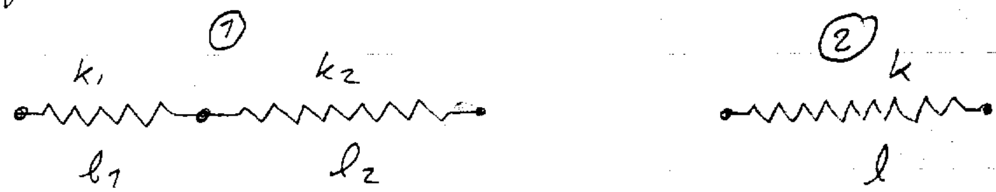
b) Nu tillkommer kraften som behövs för att accelerera getingen, $F_{acc} = m_{geting} \cdot a$ enligt Newtons andra lag.

Vågen visar $178{,}14 \text{ gram} + m_{geting} \frac{a}{g} = 178{,}57 \text{ g}$

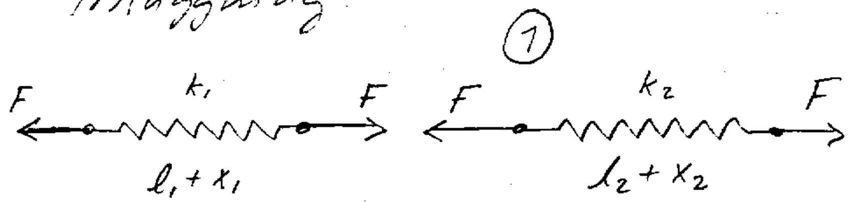
gram

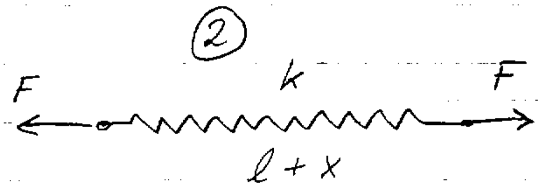
Mek A TENTA 030111

2) Vill dimensionera k och l så att fjäder ② blir ekvivalent med de två seriekopplade fjädrarna.



Detta innebär att de två systemen ① och ② skall ha samma totala fjäderkonstant.
Välj även $l = l_1 + l_2$.
Låt x_1, x_2 och x vara avvikelserna från jämviktsläget för de tre fjädrarna.
Applicera en kraft F i varje ände av de två systemen. Vi får då följande friläggning





Nu gäller att $F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = kx$.
Om system ① och ② är ekvivalenta, så $x = x_1 + x_2$.

$\Rightarrow k_1 x_1 = k(x_1 + x_2)$

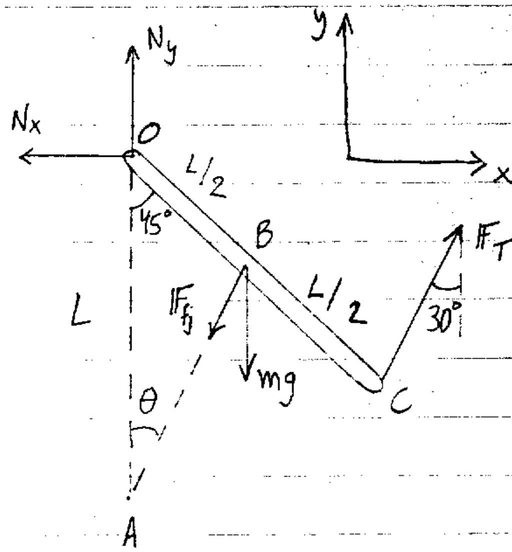
Har även att $x_2 = x_1 \dfrac{k_1}{k_2}$

$\Big\} \Rightarrow k_1 = k\left(1 + \dfrac{k_1}{k_2}\right)$

$$\Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Mek A TENTA 030111

3) Räkna med moment-jämvikt i O, så behöver vi inte bestämma N_x och N_y.



Våra krafter är

$\vec{mg} = -mg\,\hat{y}$

$\mathbb{F}_T = T(\sin 30°\,\hat{x} + \cos 30°\,\hat{y}) = \frac{T}{2}(\hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y})$

$\mathbb{F}_{fj} = kx(-\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})$, $x = \overline{AB} - \frac{L}{2}$

Dessa ger upphov till momenten (kring O)

$M_O = \vec{OB} \times (\mathbb{F}_{fj} + \vec{mg}) + \vec{OC} \times \mathbb{F}_T = \vec{OB} \times (\mathbb{F}_{fj} + \vec{mg} + 2\mathbb{F}_T) = 0$

där $\vec{OB} = \frac{L}{2}(\sin 45°\,\hat{x} - \cos 45°\,\hat{y}) = \frac{L}{2\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$

$\Rightarrow M_O = +\hat{z}\frac{L}{2\sqrt{2}}\left(+(\mathbb{F}_{fj})_x + (\mathbb{F}_{fj})_y + (\vec{mg})_x + (\vec{mg})_y + 2(\mathbb{F}_T)_x + 2(\mathbb{F}_T)_y\right)$

$= +\frac{L}{2\sqrt{2}}\left(-kx(\sin\theta + \cos\theta) - mg + T(+1+\sqrt{3})\right)\hat{z} = 0$

$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{3}+1}\left(mg + k\left(\overline{AB} - \frac{L}{2}\right)(\sin\theta + \cos\theta)\right)$

Behöver $\overline{AB}$ och θ:

Cosinussatsen $\Rightarrow$ $\overline{AB}^2 = L^2 + (L/2)^2 - 2L\frac{L}{2}\cos 45°$

$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{L}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$

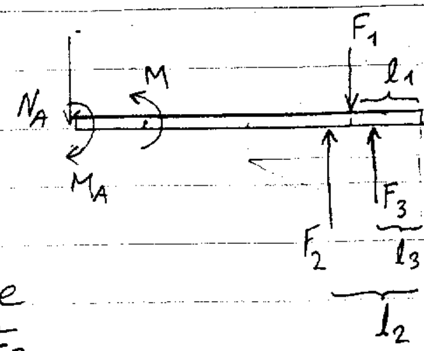
Sinussatsen $\Rightarrow$ $\sin\theta = \frac{L}{2}\cdot\frac{\sin 45°}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow \theta \approx 28{,}675°$

Vi får nu $T = 0{,}366\,mg + 0{,}1176\,kL$

Mek A TENTA 030111

4) Frilägg balken



Ersätt den rektangulära delen av den distribuerade lasten med en kraft F_2 som angriper $l_2 = 2{,}5/2 \text{ m} = 1{,}25 \text{ m}$ från höger ände och den triangulära delen av lasten med en kraft F_3 som angriper $l_3 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5 \text{ m} = 0{,}833 \text{ m}$ från höger ände.

$F_2 = 24 \cdot 2{,}5 \text{ kN} = 60 \text{ kN}$; $F_3 = \frac{60-24}{2} \cdot 2{,}5 \text{ kN} = 45 \text{ kN}$

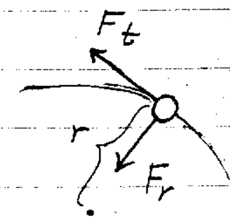
Kraftjämvikt ger $N_A = -F_1 + F_2 + F_3 = \underline{55 \text{ kN}}$.

Momentjämvikt ger

$$M_A = M - F_1(l - l_1) + F_2(l - l_2) + F_3(l - l_3) =$$
$$= \underline{252{,}5 \text{ kNm}}$$

Mek A TENTA 030111

5) Frilägg myntet



Newtons andra lag ger

- i tangentiell led

$$F_t = m\alpha r$$

- i radiell led

$$F_r = m r \omega^2$$

Vi behöver således ω.

Använd att $\alpha\, d\theta = \dot\theta\, d\dot\theta$ och integrera båda sidorna. Efter N varv har myntet färdats vinkeln $2\pi N$ (radianer)

Vi får $$\int_0^{2\pi N} \alpha\, d\theta = \int_0^{\omega} \dot\theta\, d\dot\theta$$

$$\Rightarrow 2\pi N\alpha = \frac{1}{2}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 4\pi N\alpha$$

Den totala kraften på myntet efter N varv är alltså

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{(m\alpha r)^2 + (m r 4\pi N\alpha)^2} =$$

$$= m\alpha r\sqrt{1 + (4\pi N)^2}$$

När denna kraft blir större än den maximala friktionskraften $\mu m g$ börjar myntet att glida.

$$\therefore\ \cancel{m}\alpha r\sqrt{1+(4\pi N)^2} = \mu \cancel{m} g$$

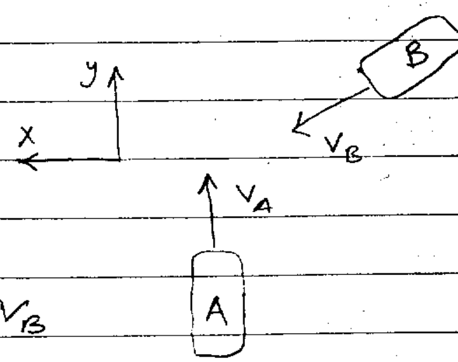
$$\Rightarrow N = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\alpha r}\right)^2 - 1}$$

Ser att om $\mu g < \alpha r$ börjar myntet att glida direkt.

Mek A TENTA 030111

6) Rörelsemängden är bevarad i båda x- och y-led.

Före:



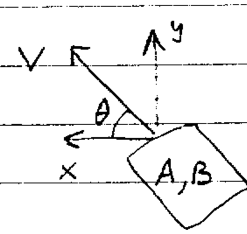
x-led:

$p_x = m_B v_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m_B v_B$

y-led:

$p_y = m_A v_A - m_B v_B \cos 60^\circ = m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B$

Efter:



x-led:

$\tilde{p}_x = v_x (m_A + m_B)$

y-led:

$\tilde{p}_y = v_y (m_A + m_B)$

$p_x = \tilde{p}_x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} m_B v_B = (m_A + m_B) v_x$

$\Rightarrow v_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_B v_B}{m_A + m_B} \approx 18{,}475 \text{ km/h}$

$p_y = \tilde{p}_y \Rightarrow m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B = (m_A + m_B) v_y$

$\Rightarrow v_y = \frac{m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B}{m_A + m_B} \approx 7{,}111 \text{ km/h}$

$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}80 \text{ km/h}$

$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = 21{,}05^\circ$

Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

Kurskod: FFM052.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 14 mars 2003 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Pär Arvidsson, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 och 2 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Det U-formade rörets skänklar har båda tvärsnittsarean 1 cm^2. Man häller först i 1 liter vatten med densiteten 1 g/cm^3. De båda vätskeytorna ligger då på nivån $h = 40$ cm enligt figuren. Man häller sedan i 5 cm^3 olja med densiteten 0,8 g/cm^3 i den vänstra skänkeln. Var kommer då den fria oljeytan i den vänstra skänkeln och vattenytan i den högra skänkeln att ligga?

   b) De två aporna har båda massan 30 kg och hänger till en början stilla i de positioner som har avbildats i figuren. Den vänstra apan börjar sedan att klättra uppåt med farten 0.50 m/s *relativt repet* medan den högra apan börjar att klättra nedåt med farten 0.25 m/s *relativt repet*. På vilket avstånd från B kommer den högra apan att befinna sig när den vänstra apan har kommit fram till A? (Repets massa kan försummas, och det löper friktionsfritt över de båda trissorna i A och B.)

2. a) En partikel rör sig i rummet med hastigheten $\mathbf{v}$. Visa att dess fart $v = |\mathbf{v}|$ och acceleration $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ uppfyller sambandet

$$\frac{d}{dt}v = v^{-1}\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

   b) En partikel med massan m och elektriska laddningen q som rör sig i ett magnetfält $\mathbf{B}$ påverkas av kraften

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

   Visa att partikelns fart är konstant. (*Ledning:* Använd den formel som skulle bevisas i deluppgift a).)

Vänd!

3. Bestäm de krafter som verkar på vevaxeln från lagren i A och B för att den skall vara i jämvikt när den påverkas av den pålagda kraften 150 N samt en kraft med verkningslinjen CD.

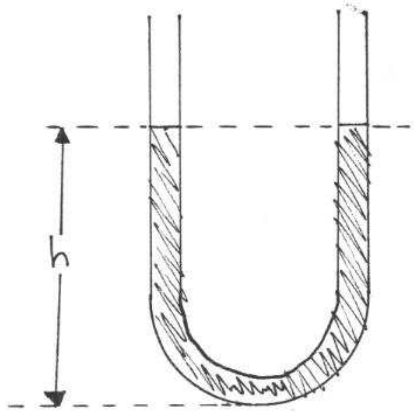
4. Bestäm det maximala böjmomentet i balken när den belastas med en kraftfördelning enligt figuren. (Balkens massa kan försummas.)

5. Bestäm accelerationen för kropparna A och B. (Massorna för rep och trissor samt friktionskrafterna kan försummas.)

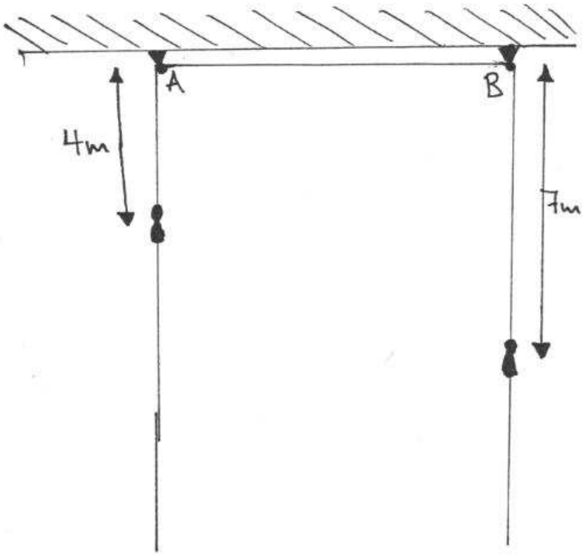
6. Bilen har massan m och hastigheten v_A när den passerar punkt A. Under färden nerför backen, som har lutningen 6% (definierad enligt figuren) och längden d, frikopplar föraren motorn och bromsar så att hastigheten när bilen passerar punkt B har minskat till v_B. Bilen påverkas även av luftmotståndet, som antas vara givet av en konstant kraft F. Beräkna den värmeenergi som har genererats i bromsarna under färden nerför backen.

Lycka till!

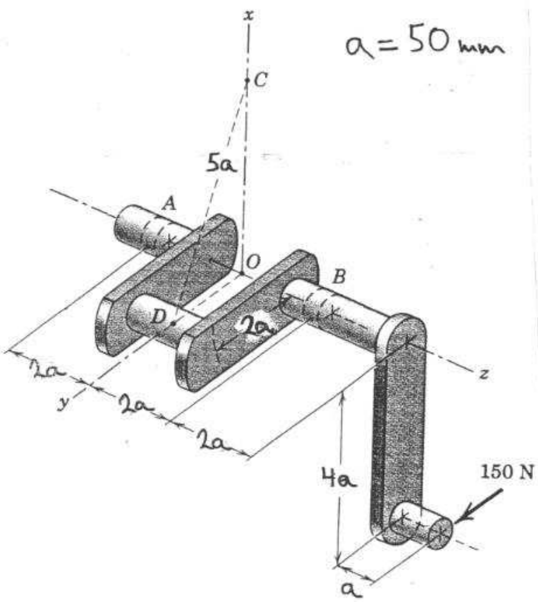
1. a)


h

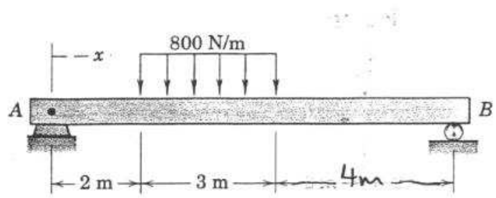
1. b)


A
B
4m
7m

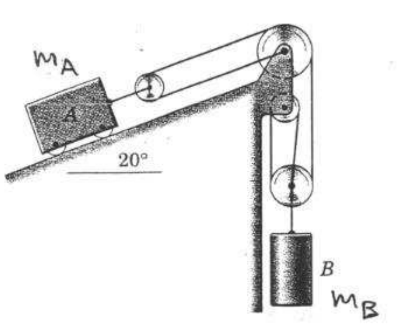
3.


a = 50 mm
x
C
5a
A
O
B
D
2a
z
y
2a
2a
2a
4a
150 N
a

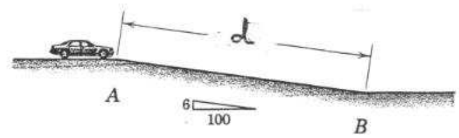
4.


x
800 N/m
A
B
2 m
3 m
4m

5.


mA
A
20°
B
mB

6.


d
A
6
100
B

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

14 mars 2003

1. (a) Oljan som tillsätts i den vänstra skänkeln har massan $0.8(\text{g/cm}^3) \cdot 5(\text{cm}^3) = 4$ g och upptar höjden 5 cm. För att jämvikt ska uppnås måste 2 g vatten strömma över till den högra skänkeln, det vill säga att vattennivån i den högra höjs med 2 cm. Samtidigt minskar då vattennivån med 2 cm i den vänstra, men oljans höjd tillkommer. Alltså blir nivåerna 43 cm i den vänstra och 42 cm i den högra.

   (b) Friläggning av aporna och repet ger att *båda* aporna påverkas av *samma* kraft uppåt. Detta innebär i sin tur att hur aporna än klättrar kommer de att röra sig på samma sätt relativt trissorna, alltså kommer den högra apan också att ha klättrat 4 m uppåt när den vänstra klättrat 4 m uppåt. Den högra apan kommer alltså att befinna sig 3 m nedanför B när den vänstra når A, oberoende av deras hastigheter relativt repet.

2. (a) Derivera uttrycket $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ med avseende på tiden. Detta ger att

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

   alltså gäller att

$$\frac{dv}{dt} = v^{-1}\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

   vilket skulle visas.

   (b) Newtons andra lag ger att

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}},$$

   vilket insatt i resultatet från (a) ger att

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{mv}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0,$$

   vilket skulle visas (kom ihåg att $\mathbf{v} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{B}$).

3. En friläggning ger att de krafter som verkar på vevaxeln är

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= F\hat{y} \qquad (\text{pålagd kraft, } F = 150 \text{ N}) \\
\mathbf{A} &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \qquad (\text{lagerkraft i A}) \\
\mathbf{B} &= B_x\hat{x} + B_y\hat{y} \qquad (\text{lagerkraft i B}) \\
\mathbf{T} &= T\mathbf{n}_{CD} = T\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\hat{x} + \frac{2}{5}\hat{y}\right) \qquad (\text{kraft längs CD})
\end{aligned}$$

   med de koordinataxlar som ges i figuren. Ortsvektorerna (från O) till lämpliga punkter på dessa krafters verkningslinjer är

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{F}} &= -4a\hat{x} + 5a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\text{A}} &= -2a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\text{B}} &= 2a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\text{T}} &= 2a\hat{y}.
\end{aligned}$$

   Newtons andra lag i $\hat{x}$-led och i $\hat{y}$-led ger att

$$\begin{aligned}
A_x + B_x - \frac{\sqrt{21}}{5}T &= 0 \\
A_y + B_y + F + \frac{2}{5}T &= 0.
\end{aligned}$$

   Momentjämvikt kring O ger nu att ($\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$)

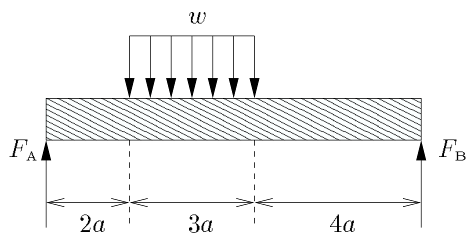
$$\begin{aligned}
-5aF + 2aA_y - 2aB_y &= 0 \qquad (\hat{x}) \\
-2aA_x + 2aB_x &= 0 \qquad (\hat{y}) \\
-4aF + 2a\frac{\sqrt{21}}{5}T &= 0 \qquad (\hat{z}),
\end{aligned}$$

totalt har vi alltså fem ekvationer och fem obekanta. Ekvationssystemet löses enkelt och resultatet blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= F\hat{x} + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) F\hat{y} \approx (150\hat{x} + 47.0\hat{y})\ \mathrm{N} \\
\mathbf{B} &= F\hat{x} + \left(-\frac{7}{4} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) F\hat{y} \approx (150\hat{x} - 328\hat{y})\ \mathrm{N},
\end{aligned}$$

oberoende av a.

4. Frilägg först *hela* balken för att bestämma stödkrafterna i A och B.



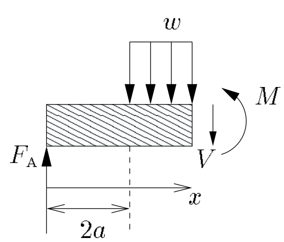
Låt $a = 1$ m och kraftfördelningen $w = 800$ N/m. Momentjämvikt medsols kring A ger att (den resulterande kraften från w ligger mitt i kraftfördelningen)

$$3aw\left(2a + \frac{3a}{2}\right) - 9aF_{\mathrm{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{B}} = \frac{7aw}{6} \approx 933\ \mathrm{N},$$

momentjämvikt medsols kring B ger sedan att

$$-3aw\left(4a + \frac{3a}{2}\right) + 9aF_{\mathrm{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{A}} = \frac{11aw}{6} \approx 1467\ \mathrm{N}.$$

Gör nu ett snitt genom balken i intervallet $2a < x < 5a$ och inför skjuvspänning och moment på vanligt sätt.



Kraftjämvikt för denna del av balken ger nu att

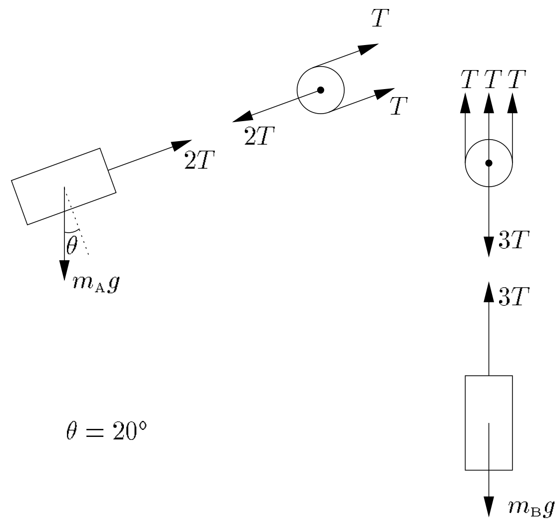
$$F_{\mathrm{A}} - w(x - 2a) - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{23aw}{6} - wx,$$

där vi har använt resultatet ovan för F_{A}. Maximala böjmomentet i balken fås då $V = 0$, alltså vid $x_{\max} = \frac{23a}{6}$, vilket ligger i intervallet. Momentjämvikt medsols kring A för detta x ger nu att ($V = 0$)

$$w(x_{\max} - 2a)\left(\frac{x_{\max} - 2a}{2} + 2a\right) - M = 0,$$

alltså blir det maximala böjmomentet i balken

$$M = \frac{w}{2}(x_{\max} - 2a)(x_{\max} + 2a) = \frac{385}{72}wa^2 \approx 4280\ \mathrm{Nm}.$$



5. Genom friläggning av kropparna och trissorna ser man att om kraften på A från linan är $2T$ måste kraften från linan på B vara $3T$. Observera att trissorna och linorna är masslösa, alltså måste de vara i jämvikt.

   Newtons andra lag för de båda kropparna blir nu (låt x_{A} vara avståndet från den stora trissan till A, positiv rikting nedåt längs planet, samt x_{B} avståndet från den stora trissan till B, positiv riktning nedåt)

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} g \sin\theta - 2T &= m_{\mathrm{A}} \ddot{x}_{\mathrm{A}} \\ m_{\mathrm{B}} g - 3T &= m_{\mathrm{B}} \ddot{x}_{\mathrm{B}}, \end{aligned}$$

   kravet att linan ska ha konstant längd ger dessutom det kinematiska tvånget

$$2\ddot{x}_{\mathrm{A}} + 3\ddot{x}_{\mathrm{B}} = 0.$$

   Genom att lösa detta ekvationssystem fås att

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\mathrm{A}} &= -\frac{6m_{\mathrm{B}} - 9m_{\mathrm{A}}\sin\theta}{9m_{\mathrm{A}} + 4m_{\mathrm{B}}} g \\ \ddot{x}_{\mathrm{B}} &= \frac{4m_{\mathrm{B}} - 6m_{\mathrm{A}}\sin\theta}{9m_{\mathrm{A}} + 4m_{\mathrm{B}}} g. \end{aligned}$$

6. Beteckna den mekaniska energin i punkten A med E_{A}, i punkten B med E_{B} samt den värmeenergi som förlorats i bromsarna med Q. Vi vet att ($\theta = \arctan\frac{6}{100}$)

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2 + mgd\sin\theta \\ E_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2 \end{aligned}$$

   Energikonservering ger att (luftmotståndet utför ett arbete Fd)

$$E_{\mathrm{A}} - Fd - Q = E_{\mathrm{B}},$$

   alltså blir värmeenergin i bromsarna

$$Q = E_{\mathrm{A}} - E_{\mathrm{B}} - Fd = \frac{1}{2} m(v_{\mathrm{A}}^2 - v_{\mathrm{B}}^2) + mgd\sin\theta - Fd.$$

Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM052.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 25 augusti 2003 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) De fyra klossarna är homogena rätblock med långsidorna 12 cm. De är staplade på varandra men sitter inte ihop. Hur stort kan avståndet $s = s_1 + s_2 + s_3$ maximalt vara utan att bygget rasar? (*Ledning:* Bestäm först s_1, därefter s_2 och slutligen s_3.)

   b) Bestäm kraften P så att klossarna i de två figurerna får samma acceleration. (Försumma friktionen och massorna för rep och block.)

2. En projektil rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ genom luften, och påverkas därvid av en luftmotståndskraft $\mathbf{F}$, som är motriktad $\mathbf{v}$. Luftmotståndskraften har storleken $|\mathbf{F}| = k|\mathbf{v}|^2$, där k är en konstant (med enheten Ns^2/m^2). Om vi inför ett Cartesiskt koordinatsystem med ortonormerade basvektorer $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ och $\mathbf{k}$ så kan vi skriva $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ och $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Uttryck kraftkomponenterna F_x, F_y och F_z med hjälp av hastighetskomponenterna v_x, v_y och v_z samt konstanten k.

3. De två krafterna som verkar på stolpen kan ersättas med en ekvivalent kraftskruv, det vill säga en resulterande kraft $\mathbf{R}$ med verkningslinje och ett därmed parallellt vridmoment $\mathbf{M}$. Bestäm vektorerna $\mathbf{R}$ och $\mathbf{M}$, samt koordinaterna för den punkt där verkningslinjen skär yz-planet.

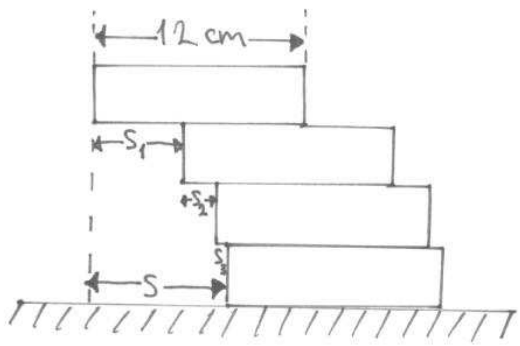
4. Cylindern har massan $m = 1200kg$, och friktionskoefficienterna mellan trucken och cylindern samt mellan cylindern och det lutande planet har båda värdet $\mu = 0,40$. Bestäm den minsta möjliga horisontella kraften från underlaget på truckens däck för att jämvikt skall kunna råda.

5. Kropp B rör sig neråt med hastigheten v_B. Bestäm hastigheten (horisontal och vertikalkomponent) för kropp A uttryckt i b, l, θ och v_B. (Kabeln som A hänger i antas hela tiden vara vertikal.)

6. Bestäm alla värden på vinkeln θ så att kroppen får accelerationen $9m/s^2$ åt höger.

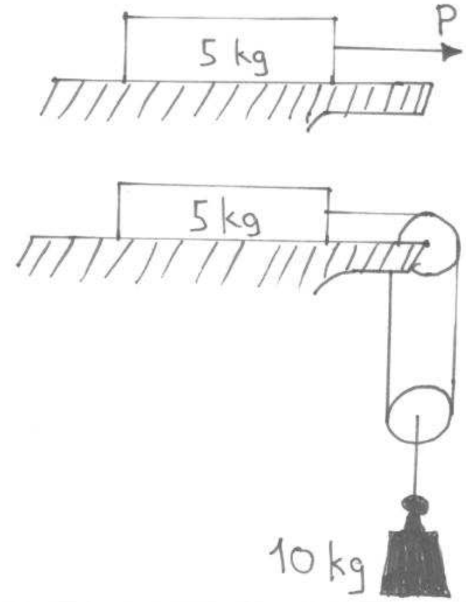
Lycka till!

1. a)



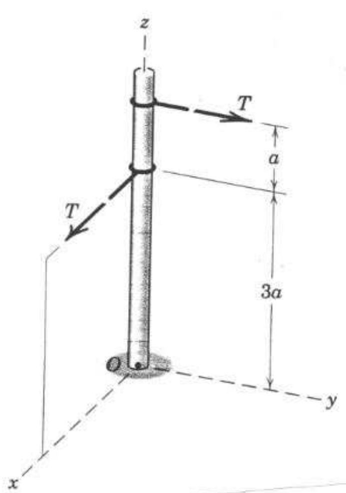
12 cm
S_1
S_2
S_3
S

1. b)



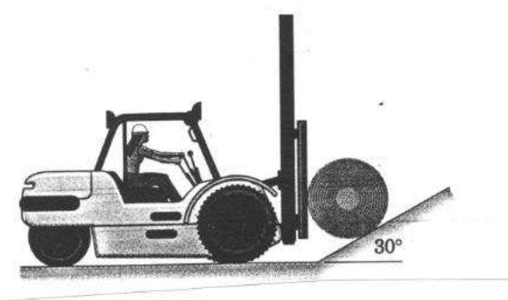
5 kg
P
5 kg
10 kg

3.



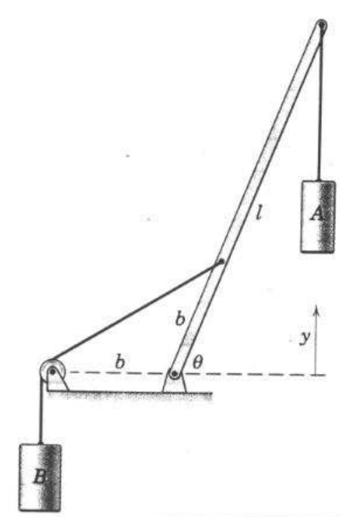
z
T
a
T
3a
O
y
x

4.



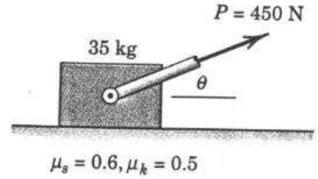
30°

5.



l
A
b
y
b
θ
B

6.



P = 450 N
35 kg
θ
$\mu_s = 0.6, \mu_k = 0.5$

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

25 augusti 2003

1. (a) Principen här är att bygga på stapeln underifrån och placera varje nytt blocks vänsterkant rakt under de ovanliggande blockens tyngdpunkt. Detta ger direkt det maximala avståndet, eftersom varje förflyttning av *något* block åt vänster gör att stapeln välter.
   I vårt fall fås först $s_1 = l/2$ trivialt. Dessa två blocks tyngdpunkt ligger $3l/4$ in från det översta blockets vänsterkant, alltså väljs $s_2 = l/4$. På samma sätt fås sedan $s_3 = l/6$. Slutsumman blir $s = 11l/12 = 11$ cm.

   (b) Inför en kraft T i linan och låt positiv riktning vara åt höger i figuren för klossarna ($m = 5$ kg) samt nedåt för tyngden ($M = 10$ kg). Newtons andra lag blir i det första fallet

$$P = ma$$

   och i det andra

$$\begin{aligned} T &= ma \\ Mg - 2T &= M\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

   Genom att eliminera T ur de två sista ekvationerna fås direkt att

$$a = \frac{2g}{1 + 4\frac{m}{M}},$$

   vilket ger att

$$P = ma = \frac{2mg}{1 + 4\frac{m}{M}} \approx 32.7 \text{ N}$$

2. En enhetsvektor riktad längs $\mathbf{v}$ är $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, vilket innebär att luftmotståndskraften kan skrivas

$$\mathbf{F} = -k|\mathbf{v}|^2 \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v},$$

   vilket på komponentform blir

$$\begin{aligned} F_x &= -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ F_y &= -kv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ F_z &= -kv_z\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \end{aligned}$$

3. Den resulterande kraften $\mathbf{R}$ fås direkt som summan av de utritade krafterna och blir

$$\mathbf{R} = T\hat{x} + T\hat{y}.$$

   Antag nu att den punkt P där kraftskruvens verkningslinje skär yz-planet är $\mathbf{x}_P = (0, y, z)$. Vektorerna från denna punkt till krafternas angreppspunkter i figuren är

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= -y\hat{y} + (4a - z)\hat{z} \\ \mathbf{r}_2 &= -y\hat{y} + (3a - z)\hat{z}. \end{aligned}$$

   Nu fås summan av vridmomenten kring P som

$$\mathbf{M}_P = -(4a - z)T\hat{x} + (3a - z)T\hat{y} + yT\hat{z}.$$

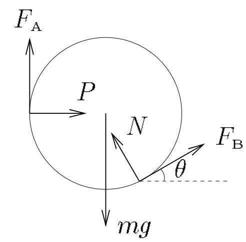
   För att vi ska få en kraftskruv i P krävs att $\mathbf{R}$ och $\mathbf{M}_P$ är parallella. Detta ger omedelbart att

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= \frac{7a}{2}, \end{aligned}$$

   och det resulterande momentet blir

$$\mathbf{M} = -\frac{a}{2}T\hat{x} - \frac{a}{2}T\hat{y}.$$

4. Frilägg cylindern enligt figur. Observera riktningen hos friktionskrafterna F_{A} och F_{B}.



Kraftjämvikt och momentjämvikt (kring cylinderns mitt) ger nu att

$$\begin{aligned} P - N\sin\theta + F_{\mathrm{B}}\cos\theta &= 0 \qquad (\hat{x}) \\ F_{\mathrm{A}} + N\cos\theta + F_{\mathrm{B}}\sin\theta - mg &= 0 \qquad (\hat{y}) \\ F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}} &= 0. \end{aligned}$$

Antag nu att gränsfriktion råder vid ytan mot trucken, alltså att $F_{\mathrm{A}} = \mu P$. Gränsfriktion måste enligt förutsättningarna råda vid någon av ytorna, annars skulle P kunna minskas utan att cylindern skulle glida utför planet.

Vi måste nu kontrollera att friktionen vid den andra ytan inte blir för stor. Ekvationerna ovan ger direkt att

$$\frac{F_B}{N} = \frac{\mu\sin\theta}{1+\mu\cos\theta} \approx 0.15 < 0.4,$$

alltså var vårt antagande korrekt. Hade vi antagit gränsfriktion vid den andra ytan hade $\mu > 0.4$ krävts vid ytan mot trucken, vilket är orimligt.

Genom att lösa ut P ur ekvationerna ovan fås nu att

$$P = \frac{mg\sin\theta}{\cos\theta + \mu(1+\sin\theta)} \approx 4010 \text{ N}.$$

Friläggning av trucken ger nu direkt att den horisontella kraften från underlaget på trucken är $P \approx 4010$ N.

5. Notera först att kropp A rör sig på exakt samma sätt som punkten P där linan från A fäster i stången. Beteckna koordinaterna (mätta från stångens infästning i planet) för punkten P med $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}})$. Trigonometri ger nu att

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{P}} &= l\cos\theta \\ y_{\mathrm{P}} &= l\sin\theta. \end{aligned}$$

Vi ser också att cosinusteoremet tillämpat på triangeln med yttervinkeln θ ger

$$s^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos(\pi - \theta) = 2b^2(1+\cos\theta),$$

där s är längden hos linsegmentet mellan trissan ovanför B och infästningen i stången. Notera att när B rör sig nedåt blir s mindre, ur detta resonemang inses direkt att $\dot{s} = -v_B$.

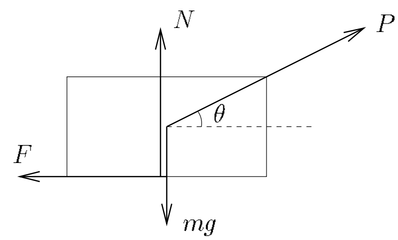
Genom att derivera tvången ovan med avseende på tiden fås nu att

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= -l\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}_P &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ 2s\dot{s} &= -2b^2\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Eliminering av $\dot{\theta}$ ger nu att $(\mathbf{v}_A = (v_x, v_y) = (\dot{x}_P, \dot{y}_P))$

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{l}{b}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,v_B \\ v_y &= \frac{l}{b}\frac{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{\tan\theta}\,v_B. \end{aligned}$$

6. Frilägg kroppen enligt figur.



Newtons andra lag tillämpad på klossen ger nu att

$$\begin{aligned} P\cos\theta - F &= ma \\ N + P\sin\theta - mg &= 0. \end{aligned}$$

I och med att kroppen har en acceleration råder fullt utvecklad *kinetisk* friktion (oavsett om kroppen råkar befinna sig i vila eller i rörelse vid den aktuella tidpunkten), alltså gäller att

$$F = \mu_k N.$$

Ekvationerna ovan ger nu att

$$\cos\theta + \mu_k \sin\theta = \frac{m(a + \mu_k g)}{P} \equiv A.$$

Vi har infört en dimensionslös storhet A för att göra lösningen mer läsbar.

Denna ekvation kan lösas genom att utnyttja att

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

vilket efter omkastning av termer och en kvadrering ger att

$$\sin^2\theta - \frac{2\mu_k A}{1 + \mu_k^2}\sin\theta + \frac{A^2 - 1}{1 + \mu_k^2} = 0.$$

Denna andragradsekvation har rötterna

$$\sin\theta = \frac{\mu_k A \pm \sqrt{1 + \mu_k^2 - A^2}}{1 + \mu_k^2},$$

vilket ger vinklarna

$$\theta \approx \begin{cases} 41.3^\circ \\ 11.9^\circ \end{cases}$$

som båda satisfierar de ursprungliga ekvationerna (alltså inga falska rötter).

Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 10 januari 2004 08.45-12.45 i V.
Jourhavande assistent: Pär Arvidsson, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Går det att bestämma massan M så att konstruktionen är i jämvikt, om spännkraften i linan inte får överstiga 500 N? (Friktion samt massor för lina och trissor kan försummas.)

   b) Emil har under jullovet byggt en bil av Mecano. Ovanpå bilen har han monterat ett 'vindkraftverk', vars propeller är förbunden med bilens hjul genom ett system av kugghjul och drivremmar. Tanken är att när han blåser på propellern med en hårtork, så skall bilen röra sig. Men kan en sådan konstruktion verkligen röra sig *mot* vindriktningen?

2. Visa att tyngdkraftsfördelningen på en godtycklig tredimensionell stel kropp (inte nödvändigtvis med konstant densitet) kan ersättas med en enda punktkraft (vars angreppspunkt G kallas för kroppens tyngdpunkt.) Man skall alltså visa att tyngdkraftsfördelningen och punkt-kraften inte bara har samma kraftsumma, utan även samma vridmoment med avseende på någon godtycklig referenspunkt.

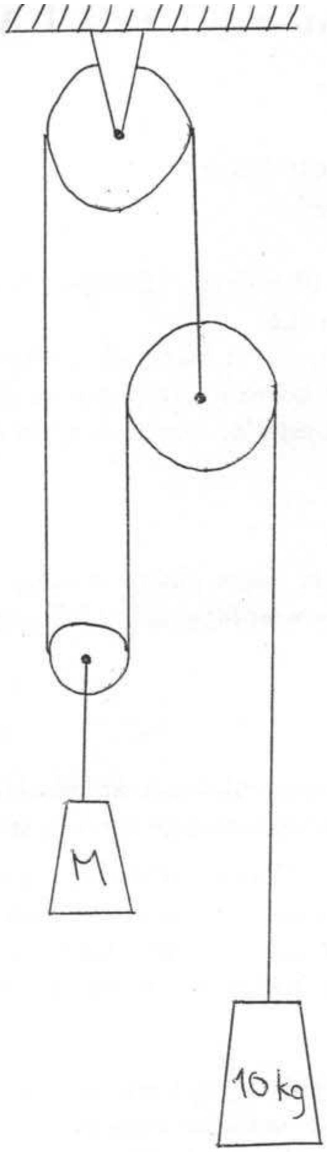
3. Trumman och axeln har tillsammans massan 50 kg och tyngdpunkten i G. Axeln påverkas av ett yttre 120 Nm vridmoment enligt figuren, men hindras att rotera genom linan som är fäst i trumman och i punkten C. Bestäm reaktionskrafterna (till storlek och riktning) från lagren i A och B på axeln då jämvikt råder. Angivna mått är i mm.

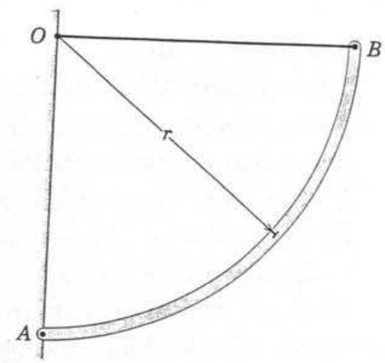
4. Den homogena kvartscirkeln har massan m och befinner sig i ett vertikalplan. Den kan vrida sig fritt kring punkten A och hålls på plats av den horisontella linan OB. Bestäm reaktionskraften (till storlek och riktning) från väggen på kvartscirkeln i punkten A.

5. Bestäm hastigheten v_B uttryckt i hastigheten v_A och vinkeln θ. (Linan som går från taket, över trissorna i A och B och är fäst i axeln till trissa A är otänjbar och hålls spänd av fjädern.)

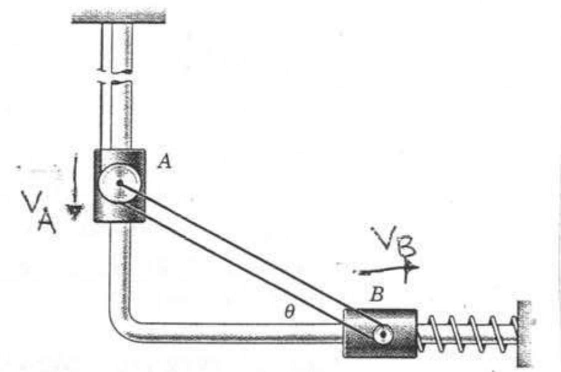
6. Linan är fäst i och lindad kring trissan i O. Konstruktionen släpps i vila då vinkeln $\theta = 0$. Bestäm cylinderns hastighet v då $\theta = 30^o$. (Friktion samt massor för lina, trissor och armarna som vikterna sitter på försummas.)

Lycka till!

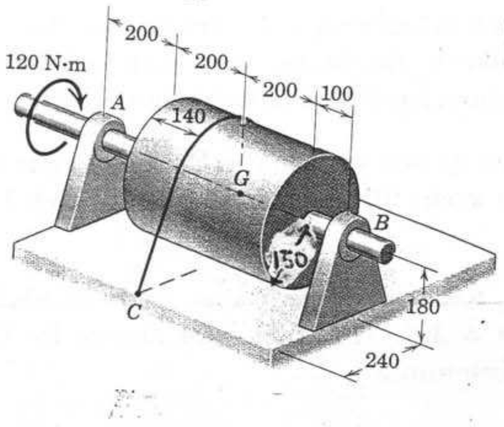

M
10 kg


O
B
r
A

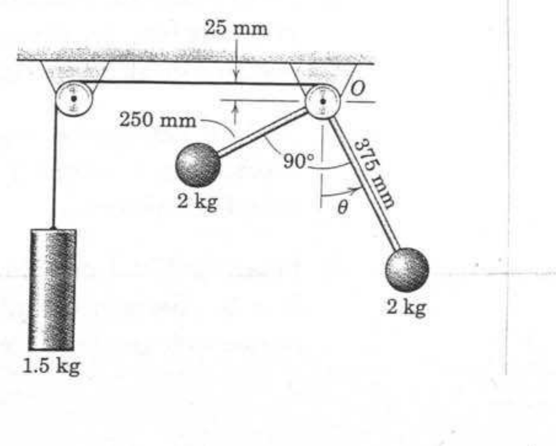
5.


A
V_A
V_B
B
θ

3.


120 N·m
200
200
200
100
A
140
G
B
150
C
180
240

6.


25 mm
O
250 mm
90°
375 mm
2 kg
θ
2 kg
1.5 kg

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

10 januari 2004

1. (a) Nej! Tänk t.ex. på att kraften i linan måste vara densamma överallt, vilket gör att den högra trissan ej kan vara i jämvikt.

   (b) Ja! En friktionskraft från underlaget verkar på bilen och ger den en acceleration framåt. Per-Olof Nilsson har ett sådant fordon bland sina fysikaliska leksaker.

2. Orientera ett koordinatsystem så att tyngdkraften verkar i negativ z-led. Det betyder att tyngdkraften på ett infinitesimalt volymselement dV i punkten $\mathbf{x}$ blir $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})g dV\,\hat{z}$, där $\rho(\mathbf{x})$ betecknar densiteten. Den totala kraften verkande på kroppen är då

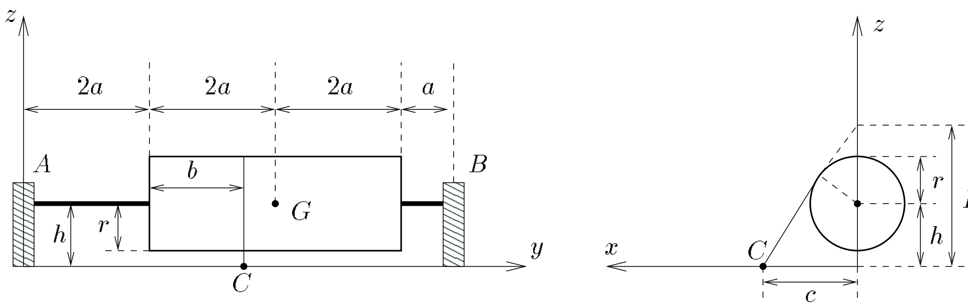
$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\int \rho(\mathbf{x})g dV\,\hat{z} = -\int dm\, g\hat{z} = -mg\hat{z},$$

där integralen är över kroppens volym. På samma sätt fås att vridmomentet kring origo (som ju är en godtycklig punkt) blir

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}\times d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\int \rho(\mathbf{x})g dV\,\mathbf{x}\times\hat{z} = \bar{\mathbf{x}}\times(-mg\hat{z}) = \bar{\mathbf{x}}\times\mathbf{F},$$

där $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{x}\,dm$ betecknar tyngdpunktens läge. Detta visar att tyngdkraftsfördelningen är ekvivalent med en punktkraft placerad i tyngdpunkten.

3. Inför beteckningar enligt figur.



En friläggning ger att de krafter som påverkar trumman och axeln är: en kraft $\mathbf{A} = A_x\hat{x}+A_z\hat{z}$ i lager A, en kraft $\mathbf{B} = B_x\hat{x}+B_z\hat{z}$ i lager B, en kraft $\mathbf{C} = C\frac{c\hat{x}-H\hat{z}}{\sqrt{c^2+H^2}}$ längs linan mot punkten C samt en tyngdkraft $-mg\hat{z}$ i G. Beteckna dessutom det yttre momentet med $\mathbf{M} = -M\hat{z}$. Sträckan H är inte given utan fås till $H \approx 561.9$ mm genom ekvationen (likformiga trianglar)

$$\frac{c}{H} = \frac{r}{\sqrt{(H-h)^2 - r^2}}.$$

Kraft- och momentjämvikt (kring A) ger nu att

$$\begin{aligned}
C\frac{c}{\sqrt{c^2+H^2}} + A_x + B_x &= 0 \qquad \text{(kraft, } \hat{x}\text{)}\\
-C\frac{H}{\sqrt{c^2+H^2}} + A_z + B_z - mg &= 0 \qquad \text{(kraft, } \hat{z}\text{)}\\
7aB_z - 4amg - (2a+b)C\frac{H}{\sqrt{c^2+H^2}} &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{x}\text{)}\\
rC - M &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{y}\text{)}\\
-7aB_x - (2a+b)C\frac{c}{\sqrt{c^2+H^2}} &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{z}\text{)}.
\end{aligned}$$

Ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{aligned}
A_x &\approx -161.6\,\mathrm{N}\\
A_z &\approx 588.6\,\mathrm{N}\\
B_x &\approx -152.6\,\mathrm{N}\\
B_z &\approx 638\,\mathrm{N}\\
C &= 800\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

4. Beteckna krafterna i x- respektive y-led från fästpunkten A på kvartscirkeln med A_x och A_y. Kraften från linan i B går enbart i x-led medan kraften på ett bågelement $d\theta$ är $dF = \frac{2m}{\pi r} grd\theta$ i negativ y-led. Kraftjämvikt i y-led ger direkt att $A_y = mg$. Momentjämvikt medsols kring punkten O ger vidare att

$$-A_x r + \int_0^{\pi/2} r\cos\theta \frac{2m}{\pi r} grd\theta = 0,$$

där θ är vinkeln mellan sträckan OB och $\mathbf{r}$. Detta ger att $A_x = \frac{2}{\pi} mg$.

5. Låt x_A vara sträckan från kröken till trissa A och x_B sträckan från kröken till trissa B. Det betyder att $v_A = -\dot{x}_A$ och $v_B = \dot{x}_B$. Linan är otänjbar, alltså måste

$$2\sqrt{x_\mathrm{A}^2 + x_\mathrm{B}^2} - x_\mathrm{A} = \text{konst.}$$

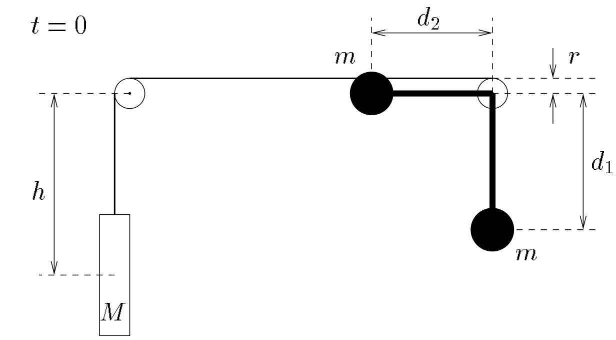
Derivering av detta uttryck ger att

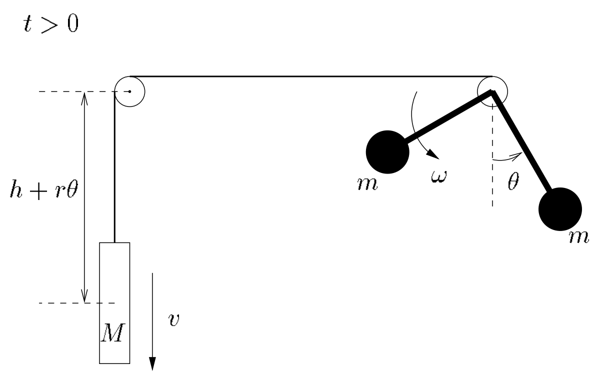
$$-2\sin\theta v_A + 2\cos\theta v_B + v_A = 0,$$

där vi har använt att $\sin\theta = \frac{x_\mathrm{A}}{\sqrt{x_\mathrm{A}^2 + x_\mathrm{B}^2}}$ och $\cos\theta = \frac{x_\mathrm{B}}{\sqrt{x_\mathrm{A}^2 + x_\mathrm{B}^2}}$. Vi ser direkt att

$$v_B = \left(\tan\theta - \frac{1}{2\cos\theta}\right) v_A.$$

6. Inför beteckningar enligt figur.





Med nollnivån i höjd trissorna fås att energin vid $t = 0$ är

$$\begin{cases} V = -Mgh - mgd_1 \\ T = 0, \end{cases}$$

medan energin när $t > 0$ är

$$\begin{cases} V = -Mg(h + r\theta) - mgd_1\cos\theta - mgd_2\sin\theta \\ T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(d_1^2 + d_2^2). \end{cases}$$

Dessutom vet vi att $v = r\omega$. Energikonservering ger nu, med numeriska värden insatta, att $v \approx 0.071$ m/s då $\theta = 30°$.

Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 12 mars 2004 14.15-18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ann-Marie Pendrill, ankn 3282.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Emil har fäst den ena änden av en fjäder, vars ospända längd är 48 cm, i en vägg och drar sedan i den andra änden med kraften 400 N. Fjädern förlängs därvid till 72 cm. Han tar därefter loss fjädern från väggen och sedan drar han och Emilia i var sin ände av fjädern åt motsatta håll. De avpassar dragkraften så att fjädern åter förlängs till 72 cm. Med vilken kraft drar då Emil i fjädern?

   b) Hur stor är tyngdaccelerationen på den höjd (ca 300 km över jordytan) där rymdfärjorna ligger i omloppsbana med astronauterna svävande inuti? (Tyngdaccelerationen är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till jordens centrum. Jorden har radien 6370 km, och vid jordytan är tyngdaccelerationen 9,8 m/s^2.)

2. En partikel med massan m rör sig i rummet under inflytande av kraften

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}.$$

   Här betecknar $\mathbf{r}$ partikelns ortsvektor med avseende på en fix punkt O, $r = |\mathbf{r}|$ är dess avstånd till O, och k är en konstant. Excentricitetsvektorn $\mathbf{E}$ definieras som

$$\mathbf{E} = \frac{m}{k}\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{1}{r}\mathbf{r},$$

   där $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ är partikelns hastighet. Visa att $\mathbf{E}$ är konstant, det vill säga att $\dot{\mathbf{E}} = 0$. (*Ledning:* Använd Newtons andra lag, samt identiteten $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, som gäller för godtyckliga vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$.)

3. Behållaren med last har massan m. Bestäm tryckspänningen P i stagen i triangeln ABC.

Vänd!

4. Cylindern har massan m och hålls på plats med linan som är fäst i punkterna A och B. Den statiska friktionskoefficienten mellan cylindern och underlaget är μ_s. Hur stor måste kraften P vara för att cylindern skall börja glida?

5. Cylindern rör sig fram och tillbaka längs med stången så att dess avstånd r till den vertikala axeln beror av tiden t enligt $r = r_0 + b \sin \omega t$. Samtidigt vrider sig stången kring den vertikala axeln med vinkelhastigheten $\Omega = \dot{\theta}$. Här antas r_0, b, ω och Ω vara givna konstanter. Bestäm värdet på r i det ögonblick då cylinderns acceleration inte har någon radiell komponent.

6. Kropparna A och B har samma massor. Systemet släpps från vila i det avbildade läget då $x = y$. All rörelse sker sedan i ett vertikalplan. Friktionen försummas. Bestäm den maximala hastigheten för kroppen B.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Mekanik F del A den 12 mars 2004

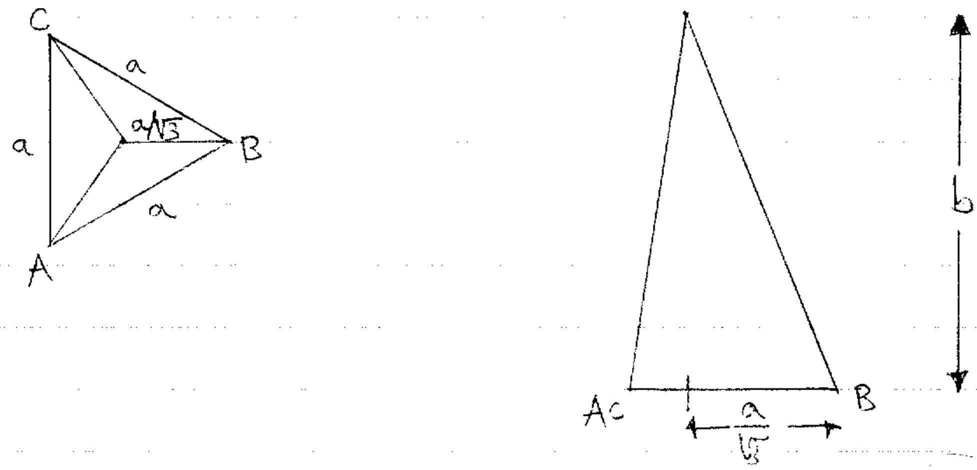
1a. Han drar med 400 N även i det fallet. Fjädern är i jämvikt eftersom den även påverkas av en motriktad kraft med storleken 400 N, i det första fallet från väggen, i det andra fallet från Emilia.

1b. Man får $9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot \left(\frac{6370 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{6370 \cdot 10^3\,\mathrm{m} + 300 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\right)^2 = 8{,}9\,\mathrm{m/s^2}$

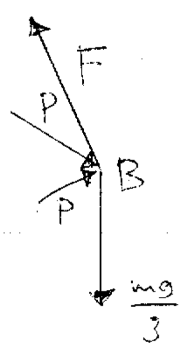
d v s nästan lika mycket som på jordytan. Orsaken till att astronauterna svävar är att de och rymdfärjan befinner sig i fritt fall när de rör sig runt jorden.

2.
$$\dot{\mathbb{E}} = \frac{m}{k}\dot{\mathbb{V}} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{m}{k}\mathbb{V} \times (\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{V}) + \frac{m}{k}\mathbb{V} \times (\mathbb{r} \times \dot{\mathbb{V}})$$
$$+ \frac{\mathbb{r} \cdot \dot{\mathbb{r}}}{r^3}\mathbb{r} - \frac{1}{r}\dot{\mathbb{r}}$$
$$= \frac{1}{k}\mathbb{F} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{1}{k}\mathbb{V} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{F}) + \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{V}\,\mathbb{r} - \frac{1}{r}\mathbb{V}$$
$$= -\frac{1}{r^3}\mathbb{r} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{V}\,\mathbb{r} - \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{r}\,\mathbb{V}$$
$$= 0$$

3. Konstruktionen sedd uppifrån och från sidan:



Vi frilägger ett av hörnen, t ex det i B.
Det påverkas av tyngdkraften, $\frac{mg}{3}$, spännkraften F i linan samt tryckkrafter P i två stag



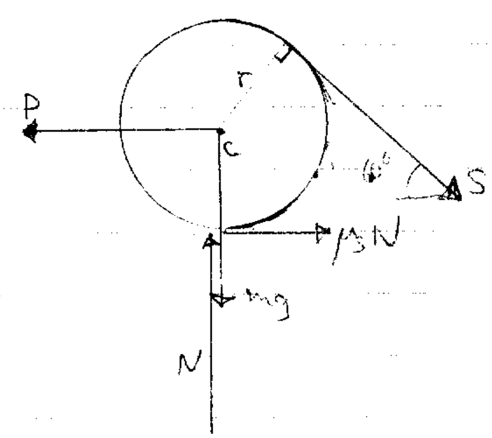
Beteckna spännkraftens horisontal och vertikalkomponenter med F_x respektive F_y. Det gäller då att $\frac{F_x}{F_y} = \frac{a/\sqrt{3}}{b}$. Jämvikt i horisontell och vertikal led ger att $F_y = \frac{mg}{3}$ och att $2P\cos 30° = F_x$.

Härur fås den sökta tryckspänningen

$$P = \frac{1}{9}\,\frac{mga}{b}.$$

4.

Vi frilägger cylindern och den del av snöret som ligger an mot cylindern då glidningen börjar:



Jämviktsekvationerna lyder (med r = cylinderns radie)

$$\begin{cases} \rightarrow : & S\cos 60^\circ + \mu_s N - P = 0 \\ \uparrow : & N - S\sin 60^\circ - mg = 0 \\ \curvearrowright c : & Sr - \mu_s N r = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$P = \frac{3mg\mu_s}{2-\sqrt{3}\,\mu_s}$$

5. Radialkomponenten av cylinderns acceleration är

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$= -b\omega^2 \sin \omega t - (r_0 + b\sin \omega t)\Omega^2$$

$$= -r_0\Omega^2 - b\sin \omega t \left(\omega^2 + \Omega^2\right)$$

Villkoret $a_r = 0$ ger att

$$b\sin \omega t = -\frac{r_0\Omega^2}{\omega^2 + \Omega^2}$$

så att

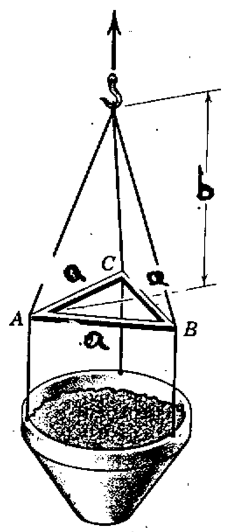
$$r = r_0 - \frac{r_0\Omega^2}{\omega^2+\Omega^2} = r_0\frac{\omega^2}{\omega^2+\Omega^2}$$

6. B's hastighet är maximal då den befinner sig rakt ovanför A, eftersom A's fallsträcka då är maximal och A's hastighet är noll.
Betecknas kropparnas massor med m så ger energiprincipen B's hastighet v enligt

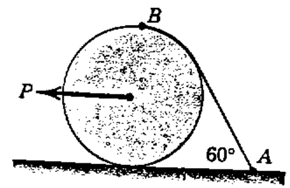
$$\frac{mv^2}{2} = mg\left(\frac{L}{\sqrt{2}} + L\right)$$

d v s $\quad v = \sqrt{gL\left(2+\sqrt{2}\right)}$

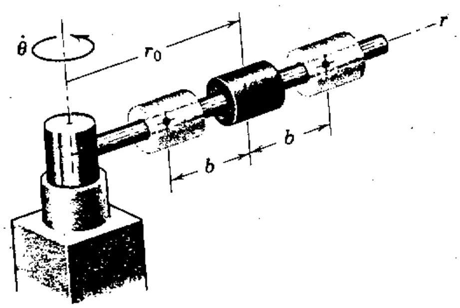
3.



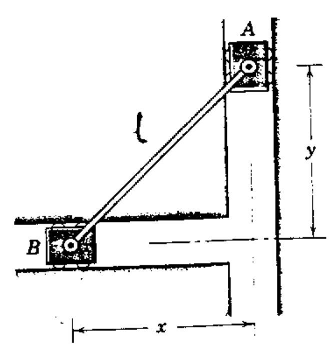
4.



5.



6.



Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 18 juni 2004 08.45-12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ann-Marie Pendrill, ankn 3282.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Vardera vikten har massan 5 kg, plattan som vågen står på har massan 0,8 kg, vågen har massan 2,3 kg, och cylindern som står på vågen har massan 1,5 kg. Vad visar vågen? (Linornas massor samt friktionen i trissorna försummas.)

   b) Två kroppar med massor m_A och m_B kolliderar med varandra, varvid deras hastigheter ändras från $\mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_B$ till $\mathbf{v}'_A$ och $\mathbf{v}'_B$. Är det möjligt att $|\mathbf{v}'_B| > |\mathbf{v}_B|$ samtidigt som $|\mathbf{v}'_B| > |\mathbf{v}_A|$ vid en sådan process? (Detta innebär alltså att kroppen B's fart efter kollisionen är större än både kroppen B's fart före kollisionen och kroppen A's fart före kollisionen.)

2. Två partiklar med massorna m_1 och m_2 påverkar varandra med krafter som är parallella med (eller motriktade) vektorn från den ena partikeln till den andra. Inga andra krafter verkar på partiklarna. Visa att deras sammanlagda rörelsemängdsmoment med avseende på en godtycklig fix punkt är konstant under rörelsen. (Rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O$ med avseende på en fix punkt O för en partikel med massan m är $\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, där $\mathbf{r}$ är partikelns ortsvektor med avseende på O och $\mathbf{v}$ dess hastighet.)

3. Dörrens tyngdpunkt är belägen i skivans mittpunkt. Dess tyngd upptas helt av gångjärnet i A. Bestäm storleken av den kraft som verkar på gångjärnet i B.

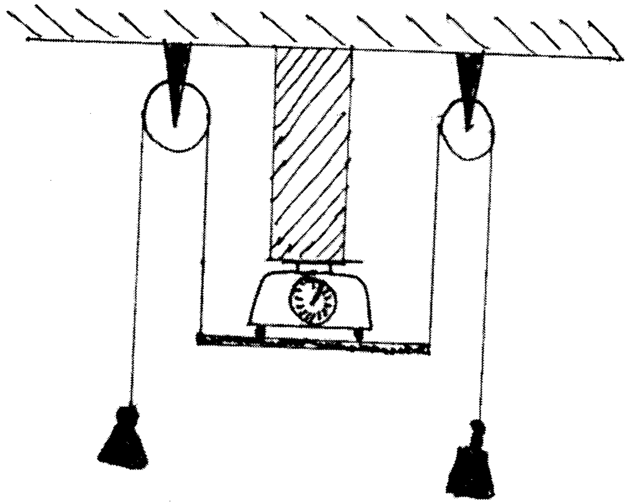
4. Den homogena stången sänks sakta med hjälp av linan som är fäst i dess övre ände och löper under trissan. När $\theta = 40^\circ$ börjar stångens undre ände att glida. Bestäm den statiska friktionskoefficienten mellan stången och underlaget.

5. Bestäm accelerationerna för kropparna A och B samt spänningen i linan. (Trissornas och linans massa samt friktionen försummas.)

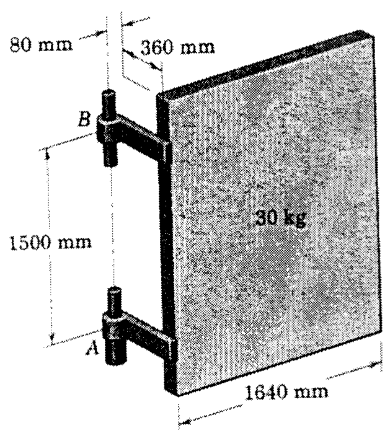
6. Klotet har massan $m = 1,5$ kg och ges en utgångsfart $v_A = 2,5$ m/s i punkten A. De horisontella fjädrarna, som båda har fjäderkonstanten $k = 1800$ N/m, är då ospända. Klotet följer sedan den streckade banan i ett vertikalplan. Bestäm dess fart v_B i punkten B, som befinner sig 125 mm rakt under punkten A.

Lycka till!

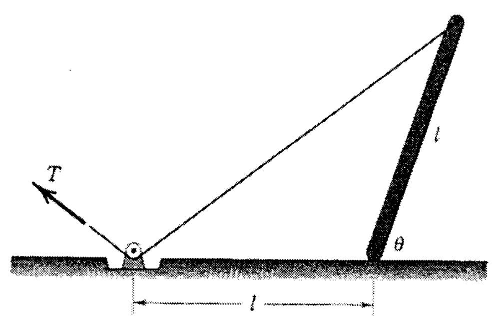
1, a)



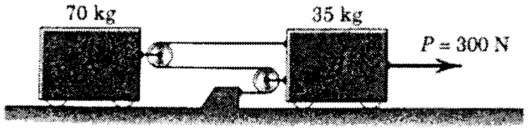
3.


80 mm
360 mm
B
30 kg
1500 mm
A
1640 mm

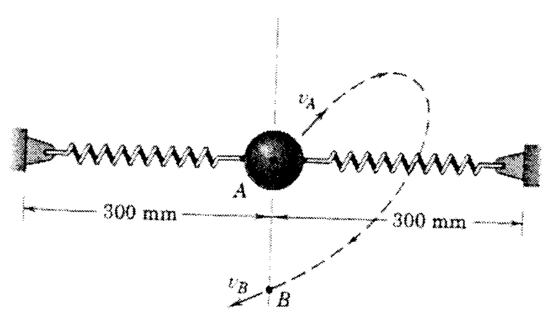
4.


T
l
θ
l

5.


70 kg
35 kg
P = 300 N

6.


v_A
A
300 mm
300 mm
v_B
B

Lösningsförslag, extratentamen 18 juni 2004

1a)
M=5kg, m_v=2.3kg, m_p=0.8kg, cylinderns massa är oväsentlig

- Vågens utslag N/g ges av Normalkraften, N, på vågens översida.
- Friläggning av vågen ger att kraften mellan våg och platta blir (N + $m_v g$)
- Spänningen i vardera linan ges av T=Mg
- Krafter på plattan: $m_p g + (N + m_v g) - 2T = 0$
- Detta ger $N/g = 2T/g - m_p - m_v = (10 - 2.3 - 0.8)\text{kg} = 6.9$ kg

1b) Ja det är möjligt, när ett lätt föremål kolliderar med ett tyngre och de har motriktade hastigheter före rörelsen. (Eftersom relativa hastigheten byter tecken i en elastisk kollision kommer det lätta föremålets fart att vara större efter kollisionen.)

Exempel:

- Studsa liten boll ovanpå stor boll ner mot marken.
- Racket mot boll
- "Slingshot"-banor för raketer där man utnyttjar rörelsemängd hos t.ex. månen eller en planet.

Eftersom det finns exempel kan det räcka att ge något, och förklara vad som är väsentligt i situationen.

2: Visa rörelsemängdens bevarande för två partiklar som växelverkar med en kraft utmed förbindelselinjen.

- $\mathbf{H}_o = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2$
- För att visa rörelsemängdens bevarande visar vi att tidsderivatan blir noll:
- $d\mathbf{H}_o/dt =$
  $\mathbf{r}_1 \times m\,\mathbf{a}_1 + 0 + \mathbf{r}_2 \times m\,\mathbf{a}_2 + 0$
- (Vi har utnyttjat att $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$, enligt definitionen av vektorprodukt)
- Utnyttja Newtons 2:a, dvs $\mathbf{F}_i$

3) Dörren. Momentjämvikt. Alla krafter i z-led tas upp i gångjärn A. Vi betraktar i fortsättningen endast moment m.a.p. A Jag lägger koordinatsystemet (x,y,z) så att A ligger i origo och:

- **B**=(0,0,b), där b=1500mm
- Masscentrum: **G** = (a,c,b/2), a=0.360m, c= (80 + 1640/2)mm=0.900m
- Krafter:
  - Tyngdkraft: (0,0,-mg)
  - Krafter i gångjärn B: (Fx, Fy,0)
- Sätt upp momentjämvikt kring A
  - Moment pga tyngdkraften: **G** x (0,0,-mg) = (-c mg, a mg,0)
  - Moment från B: (0,0,b) x (Fx, Fy,0)= (-bFy, bFx, 0)
- Om summan av momenten skall vara

$= m\,\mathbf{a}_i$

- Newtons 3:a ger för växelverkan mellan partiklarna:
- $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$
- Vi får alltså: $d\mathbf{H}_o/dt = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = 0$
- Detta uttryck blir noll eftersom $\mathbf{F}_1$ är i samma riktning som $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$

noll får vi alltså

- $-bFy - c\, mg = 0$, dvs $Fy = -c\, mg/b$
- $bFx + a\, mg = 0$, dvs $Fx = -a\, mg/b$

4) **Givet** Stångens massa M, längd l, vinkel då stången börjar glida: θ. Inför också en okänd spänning, **T**, i linan och en normalkraft, **N**.

Sökt: friktionskoefficienten μ_s

- Momentjämvikt kring A: $Mg\, l/2 \cos\theta = T\, l \sin\theta/2$
- Kraftjämvikt, horisontell led: $\mu_s N - T \cos\theta/2 = 0$
- Kraftjämvikt, vertikal led: $Mg - N + T \sin\theta/2 = 0$

Ur momentjämvikten erhålles
$T = mg \cos\theta / \sin\theta/2$
Insättning leder till ett uttryck för friktionskoefficienten:

$\mu_s = \cos\theta \cot(\theta/2) / (2 + \cos(\theta)) = 0.76$

Obs. uttrycket är oberoende av M (och l).

5) Låt y beteckna längden mellan vänstra trissan och linans fäste och x längden mellan linans fäste och högra trissan.

- Eftersom linans längd bevaras får vi:
- $3x + 2y = \text{konst}$
- Detta uttryck leder till $3\, a_B - 2\, a_A = 0$, dvs
- $a_A = 3\, a_B/2$
- Frilägg de två blocken:
  - $2T = m_A a_A$
  - $P - 3T = m_B a_B$
- Kombinera:
  - $m_A a_A = 3\, m_A a_B/2 = 2T$
  - Detta ger $T = 3\, m_A a_B/4$
  - $m_B a_B = P - 3T = P - 9\, m_A a_B/4$

Vi får alltså

$a_B = P/(m_B + 9\, m_A/4)$

Insättning av numeriska värden ger $a_A = 2.3\ \text{m/s}^{/2}$, $a_B = 1.56\ \text{m/s}^{/2}$ och $T = 82\text{N}$

6) Ett typiskt problem att lösas med energiprincipen. Det finns för lite information för att försöka bestämma någon bana - men det spelar inte någon roll när man bara ska bestämma farten i en viss punkt.

m = 1.5kg, v_A=2.5m/s, h = 0.125m, k=1800N/m, l=0.300,

- Vid starten har klotet rörelseenergin $mv_A^2/2 = 4.69$J
- Vid punkten B har klotet förlorat mgh i lägesenergi pga tyngdkraften (=1,84J)
- Systemet har samtidigt ökat energin i de två fjädrarna som förlängts från 0.300m till $l+x= (l^2 + h^2)^{1/2} = 0.325$m, dvs x=0.025m
- Energin i vardera fjädern blir då $kx^2/2$, totalt kx^2 (=1.125J)
- Klotet har i detta läge rörelseenergin $mv_B^2/2$
- Energikonservering ger: $mv_A^2/2 = mv_B^2/2 + mgh - kx^2$
- Detta ger ett uttryck
- $v_B = (v_B^2 + 2gh - 2kx^2/m)^{0.5}$
- Insättning ger $v_B = 2.68$m/s

(Kommentar: Det är inte nödvändigt att räkna ut mellanresultat för rörelseenergin i början, eller för mgh och kx^2, men jag gjorde det för att se att resultatet verkade rimligt - skulle farten t.ex. öka eller minska?)

Kommentarer

Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 23 augusti 2004 14.15-18.15 i V.
Jourhavande assistent: Måns Henningson, 0737-296826.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Med hjälp av åtta likadana fjädrar har man gjort det båda avbildade konstruktionerna. Var och en av dem kan ersättas av en enda fjäder med lämpligt vald fjäderkonstant. Vilken av konstruktionerna (den vänstra eller den högra) svarar då mot en fjäder med högst fjäderkonstant?

   b) En partikel rör sig i rummet under inflytande av en kraft $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$, där $\mathbf{v}$ är partikelns momentana hastighet och $\mathbf{n}$ är en given konstant vektor. Partikeln ges en utgångshastighet $\mathbf{v}_0$ som har en komponent parallell med och en komponent vinkelrät mot $\mathbf{n}$. Beskriv kvalitativt partikelbanans form under den fortsatta rörelsen.

2. En partikel med massan m är fäst i ena änden av en fjäder med fjäderkonstanten k och ospända längden l. Den andra änden av fjädern är fäst i en fix punkt O. Partikeln glider friktionsfritt på ett horisontalplan genom O, och kan därvid utföra en cirkelrörelse runt O. Bestäm omloppstiden T för en sådan rörelse som funktion av cirkelns radie r, då $r > l$.

3. Tre identiska stålkulor, vardera med massan m, ligger i den cylindriska ringen som är placerad på ett horisontellt bord. Ringens radie är sådan att kulorna precis rör vid varandra, och dess höjd är något större än kulornas radie. En fjärde likadan kula placeras ovanpå de tre kulorna. Bestäm storleken av den horisontella kraft varmed ringen påverkar var och en av de tre undre kulorna. (*Ledning:* Rita figurer ovanifrån och från sidan.)

Vänd!

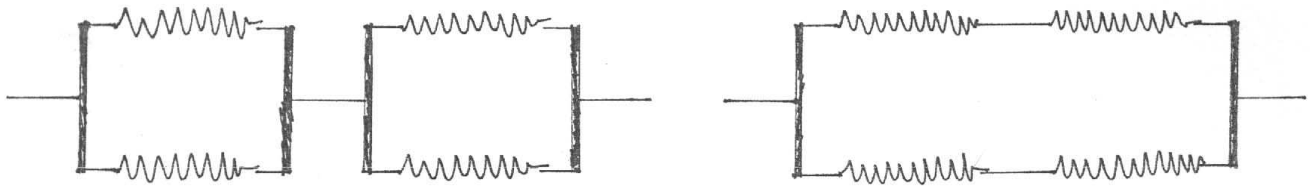
4. Den homogena stången har längden l och är placerad i öppningen med bredden d så att den bildar vinkeln 30^o med horisontalplanet. Den statiska friktionskoefficienten vid A och B är $\mu_s = 0,40$. Bestäm de värden på kvoten l/d för vilka stången kan vara i jämvikt.

5. En kula med massan m kan röra sig friktionsfritt på en ring med radie r, som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω kring en vertikal axel. Efter att eventuella svängningsrörelser har dött ut ligger kulan stilla i förhållande till ringen i den avbildade positionen, karaktäriserad av vinkeln θ. Uttryck ω i de givna storheterna.

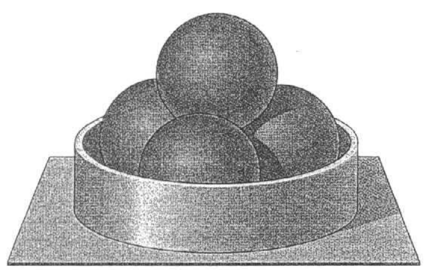
6. Kroppen A med massan 3 kg släpps från vila i det avbildade 60^o läget, och träffar sedan vagnen B med massan 1 kg, som befinner sig i vila. Stöten är fullständigt elastisk. Bestäm avståndet s från punkten C till den punkt där B vänder. Friktionen försummas.

Lycka till!

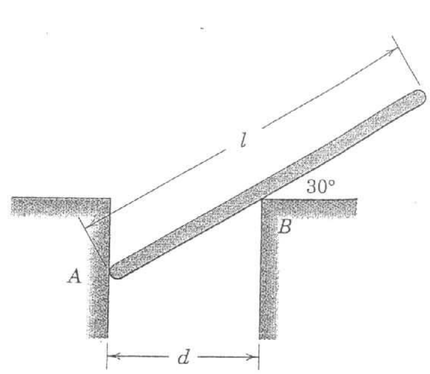
1. a)



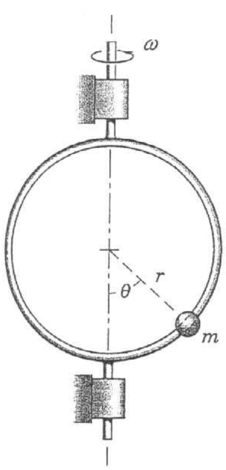
3.



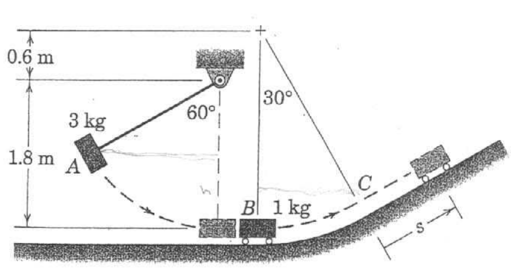
4.



5.



6.



Lösningar till tentamen i Mekanik F del A den 23 augusti 2004

1. a) Beteckna de ingående fjädrarnas fjäderkonstant med k.
Den vänstra konstruktionen har då fjäderkonstanten

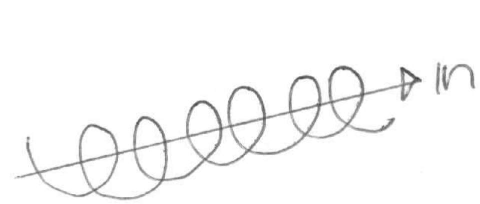
$$1/\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right) + 1/\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right) = k$$

och den högra har fjäderkonstanten

$$1/\left(\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+k}\right) = k$$

d v s de har samma fjäderkonstant.

b) Partikelns hastighetskomponent parallell med m är konstant under förloppet, medan hastighetskomponenten vinkelrät mot m kommer att rotera.
Banan blir alltså skruvformig.



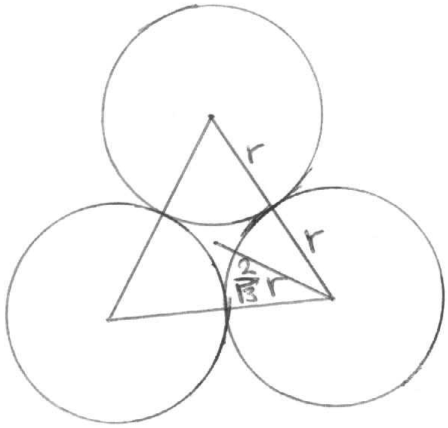
2. Newtons andra lag för partikeln lyder i polära koordinater

$$-k(r-l) = -mr\dot{\theta}^2$$

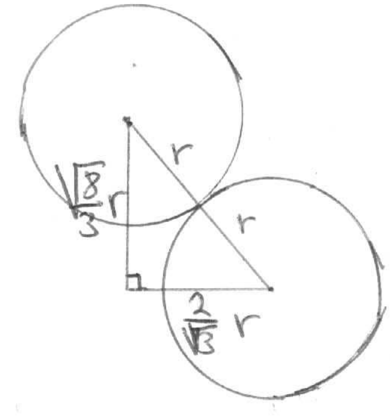
varur följer att omloppstiden T ges av

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{k(r-l)}}$$

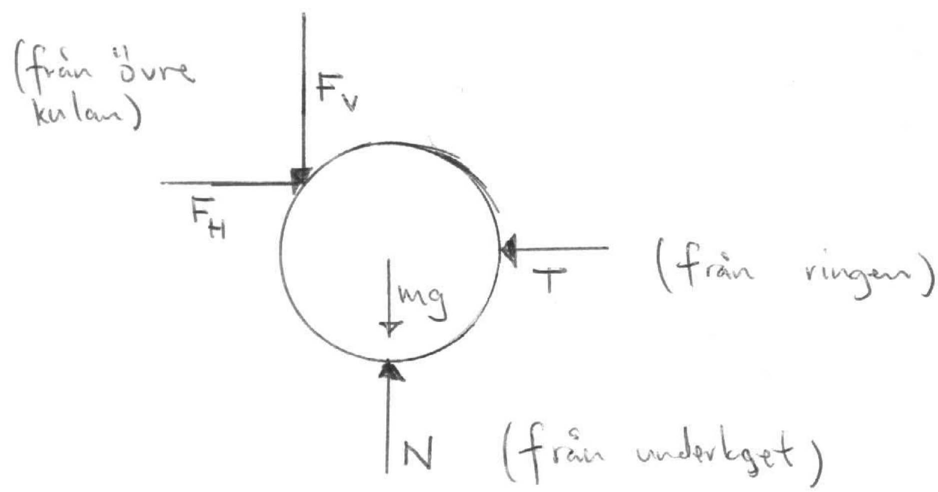
3. Ovanifrån



från sidan



Frilägg en av de undre kulorna

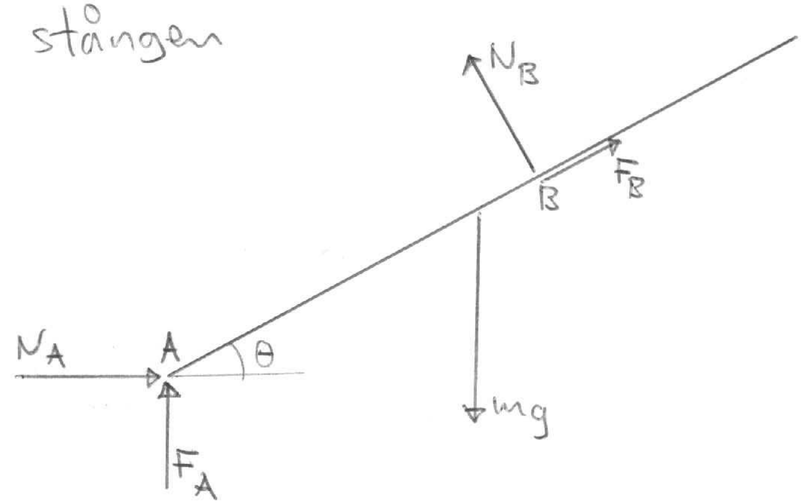


Friläggning av den övre kulan ger att $F_V = \frac{mg}{3}$.

Kraftjämvikt i horisontalled ger att den sökta kraften är

$$T = F_H = F_V \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Big/ \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_V = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$

4. Frilägg stången



och ställ upp jämviktsekvationerna:

$$
\begin{aligned}
\rightarrow &\quad \begin{cases} N_A - N_B \sin\theta + F_B \cos\theta = 0 \\ F_A - mg + N_B \cos\theta + F_B \sin\theta = 0 \\ -\frac{l}{2}\cos\theta \; mg + \frac{d}{\cos\theta} N_B = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

($\rightarrow$, $\uparrow$, $\overset{\curvearrowleft}{A}$)

Då glidning neråt precis sker är $F_A = \mu_s N_A$ och $F_B = \mu_s N_B$.

Ekvationerna ger då att

$$\frac{l}{d} = \frac{2N_B}{mg\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta(\cos\theta + 2\mu\sin\theta - \mu^2\cos^2\theta)} \approx 2,4$$

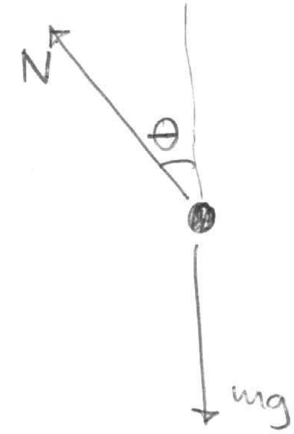
Då glidning uppåt precis sker är $F_A = -\mu_s N_A$ och $F_B = -\mu_s N_B$

Ekvationerna ger då att

$$\frac{l}{d} = \frac{2N_B}{mg\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta(\cos\theta - 2\mu\sin\theta - \mu^2\cos^2\theta)} \approx 8,1$$

Jämvikt råder alltså för $2,4 < \frac{l}{d} < 8,1$

5. Frilägg kulan, och ställ upp Newtons andra lag i cylindriska koordinater i



$$\uparrow \quad \begin{cases} N\cos\theta - mg = 0 \\ -N\sin\theta = -mr\sin\theta\,\omega^2 \end{cases} \quad \rightarrow$$

Varav följer att

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{mr}} = \sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$$

Detta förutsätter dock att $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$.

Om $\omega < \sqrt{\frac{g}{r}}$ blir $\theta = 0$ då jämvikten har inställt sig.

6. Låt

$m_A = 3\,kg$, $m_B = 1\,kg$, $r = 1{,}8\,m$ $R = 3{,}4\,m$

v_A = A's hastighet omedelbart före stöten

v_A' = A's 〃 efter 〃

v_B' = B's 〃 efter 〃

Vi får då följande ekvationer:

$$\begin{cases} m_A g r(1-\cos 60°) = \frac{1}{2} m_A v_A^2 & \text{(energiprincipen för A's fallrörelse)} \\ m_A v_A = m_A v_A' + m_B v_B' & \text{(bevarande av rörelsemängd i stöten)} \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 & \text{(energiprincipen för stöten)} \\ \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g\left[R(1-\cos 30°) + s \sin 30°\right] & \text{(energiprincipen för B's fortsatta rörelse)} \end{cases}$$

Härur fås att

$$v_A = \sqrt{gr}$$

$$v_B' = \sqrt{gr}\,\frac{2m_A}{m_A + m_B}$$

$$s = 2\left[\frac{v_B'^2}{2g} - R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{v_B'^2}{g} - R(2-\sqrt{3})$$

$$= r\,\frac{4m_A^2}{(m_A+m_B)^2} - R(2-\sqrt{3})$$

Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 8 januari 2005 kl 08.30-12.30 i V.
Jourhavande assistent: Måns Henningson, 0737-296826.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En metallbit är infrusen i en isbit som flyter i ett glas med vatten. Isbiten börjar smälta, så småningom lossnar metallbiten och sjunker till botten, och därefter smälter isbiten fullständigt. Beskriv hur vattenytans läge relativt glaset ändras under de olika faserna av detta förlopp.

   b) Ett nöjesfält planerar en ny attraktion, som skall bestå av en bana på vilken en vagn kan rulla under inflytande av gravitationskraften och normalkraften från banan (friktionen försummas). Den övre startpunkten A och den nedre slutpunkten B är givna. Den *kortaste* banan från A till B är som bekant en rät linje, men ungefär hur ser den *snabbaste* banan ut?

2. Två partiklar med massorna m_1 och m_2 växelverkar med varandra så att det påverkas av de totala krafterna $\mathbf{F}$ respektive $-\mathbf{F}$. Visa att vektorn $\mathbf{r}$ från den ena partikeln till den andra uppfyller en differentialekvation av formen

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}},$$

   samt uttryck konstanten M i de givna massorna m_1 och m_2.

3. Bestäm storlekarna av den kraft och det vridmoment som verkar i punkten O då jämvikt råder.

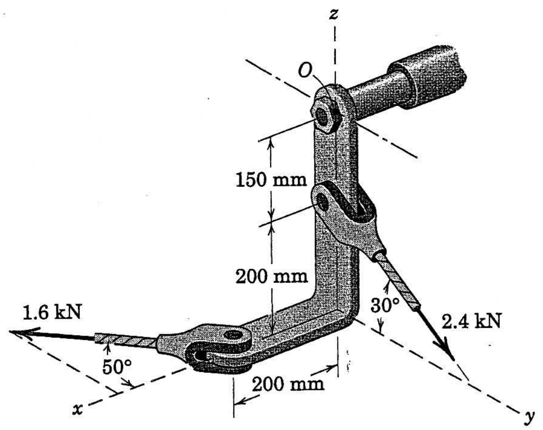
4. Tre identiska homogena cylindrar är lagda på varandra på ett horisontell underlag enligt figuren. Bestäm det minsta värdet på den statiska friktionskoeficienten μ_s (antages vara samma i alla kontaktpunkter) för att jämvikt skall kunna råda.

5. Klossen P startar i vila från punkten A vid tiden $t = 0$ och rör sig sedan med likformig acceleration a uppför det lutande planet. Bestäm tidsderivatan $\dot{r}$ av avståndet r som funktion av tiden t.

6. Systemet släpps från vila i det avbildade läget. Cylindern som väger 6 kg kan fritt passera genom öppningen, men ringen som ligger ovanpå cylindern är så stor att den blir liggande ovanpå öppningen. Bestäm höjden h som 8 kg cylindern stiger innan den vänder.

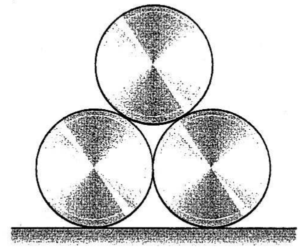
God fortsättning!

3.

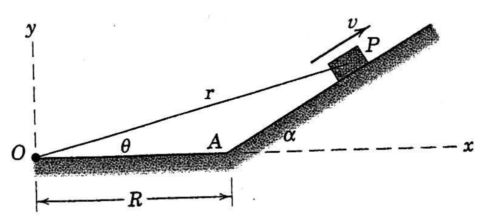


z
O
150 mm
200 mm
1.6 kN
30°
2.4 kN
50°
200 mm
x
y

4.



5.



y
v
P
r
O
θ
A
α
x
R

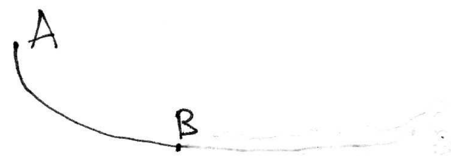
6.

4 kg
400 mm
h
6 kg
8 kg

Lösningar till Mekanik F del A 2005-01-08

1. a) Använd Arkimedes princip:
När isbiten smälter så kompenserar smältvattnets volym precis minskningen av den undanträngda volym som behövs för att upprätthålla jämvikt. Vattenytans läge är alltså oförändrad under dessa faser. Däremot sjunker vattenytans läge då metallbiten lossnar, eftersom metallen tar upp en mindre volym än samma massa vatten gör.

b) Banan ligger i det vertikalplan som bestäms av A och B och ser ut ungefär så här:



2. Beteckna partiklarnas ortsvektorer (m a p en fix punkt O) med $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\mathbf{F} - \frac{1}{m_2}(-\mathbf{F}) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}$$

d v s $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}}$ där

$$M = 1 \Big/ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3. Låt $F_1 = 1{,}6\,kN$, $F_2 = 2{,}4\,kN$, $a = 200\,mm$, $b = 150\,mm$

De två givna krafterna har summan

$$\mathbb{F} = F_1(\hat{\mathbb{i}}\cos 50° - \hat{\mathbb{j}}\sin 50°) + F_2(\hat{\mathbb{j}}\cos 30° - \hat{\mathbb{k}}\sin 30°)$$

$$= \hat{\mathbb{i}}\,F_1\cos 50° + \hat{\mathbb{j}}(-F_1\sin 50° + F_2\cos 30°) + \hat{\mathbb{k}}(-F_2\sin 30°)$$

och utövar ett vridmoment $\mathbb{M}_o$ m a p punkten O

$$\mathbb{M}_o = (a\hat{\mathbb{i}} - (a+b)\mathbb{k}) \times F_1(\hat{\mathbb{i}}\cos 50° - \hat{\mathbb{j}}\sin 50°)$$

$$+ (-b\hat{\mathbb{k}}) \times F_2(\hat{\mathbb{j}}\cos 30° - \mathbb{k}\sin 30°)$$

$$= \hat{\mathbb{i}}\left(-F_1(a+b)\sin 50° + F_2 b\cos 30°\right)$$

$$+ \hat{\mathbb{j}}\left(-F_1(a+b)\cos 50°\right) + \hat{\mathbb{k}}\left(-F_1 a\sin 50°\right)$$

Kraften och vridmomentet som verkar i infästningen i O skall vara motsatta dessa, och alltså ha storlekarna

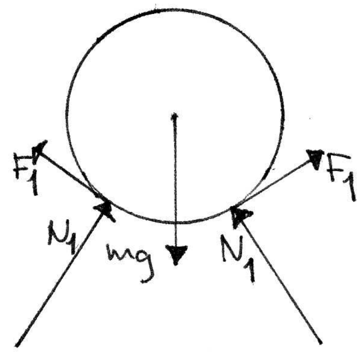
$$|-\mathbb{F}| = \sqrt{(F_1\cos 50°)^2 + (-F_1\sin 50° + F_2\cos 30°)^2 + (-F_2\sin 30°)^2}$$

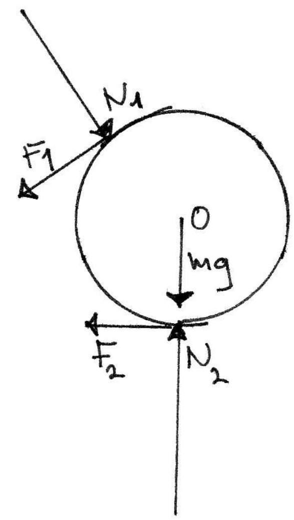
$$\approx 1{,}8\,kN$$

$$|-\mathbb{M}_o| = \sqrt{(-F_1(a+b)\sin 50° + F_2 b\cos 30°)^2 + (-F_1(a+b)\cos 50°)^2 + (-F_1 a\sin 50°)^2}$$

$$\approx 0{,}45\,kNm$$

4. Frilägg den övre och den högra cylindern:





Jämviktsekvationerna lyder

$$
\begin{cases}
\uparrow & 2N_1\cos 30^\circ + 2F_1 \sin 30^\circ - mg = 0 \\
\rightarrow & 0 = 0 \\
\uparrow & -N_1\cos 30^\circ - F_1\sin 30^\circ + N_2 - mg = 0 \\
\rightarrow & N_1 \sin 30^\circ - F_1\cos 30^\circ - F_2 = 0 \\
\curvearrowleft O & F_1 - F_2 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
F_1 = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \\
F_2 = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \\
N_1 = \frac{1}{2}mg \\
N_2 = \frac{3}{2}mg
\end{cases}
$$

Varur fås att $\mu_s \geq \frac{F_1}{N_1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}27$

5. Enligt cosinussatsen är

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\tfrac{1}{2}at^2\right)^2 - 2R\,\tfrac{1}{2}at^2 \cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{R^2 + \tfrac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2 \cos \alpha}$$

Varur fås att

$$\dot{r} = \frac{a^2t^3 + 2Rat \cos \alpha}{2\sqrt{R^2 + \frac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2 \cos \alpha}}$$

6. Låt $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 6$ kg, $s = 0{,}4$ m

Beteckna systemets fart då ringen når öppningen v.

Energiprincipen på de två förloppen ger då

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2 = (m_2 + m_3 - m_1)gs \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_3)v^2 = (m_1 - m_3)g(h - s) \end{cases}$$

Varur fås att

$$h = s\,\frac{2m_1m_2}{(m_1 - m_3)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Torsdagen den 17 mars 2005 på eftermiddagen i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den homogena horisontella plattan har massan m. Bestäm spännkraften i linorna AD, BD och CD.

2. Klossens massa M, vinklarna α och β samt den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan klossen och det lutande planet är givna. (Övrig friktion försummas.) Bestäm det intervall för vagnens massa m i vilket jämvikt kan råda.

3. Ramen rör sig med den konstanta accelerationen a åt höger. Hylsan A glider friktionsfritt på stången, som bildar vinkeln θ med horisontalplanet. Hylsans position kan beskrivas med hjälp av avståndet s. Bestäm $\ddot{s}$, det vill säga hylsans acceleration relativt stången.

4. De båda bilarna har massorna m_A och m_B och rör sig med farterna v_A och v_B i vinkeln α mot varandra när de kolliderar i punkten P och fastnar i varandra. Bestäm deras gemensamma fart v och vinkeln θ omedelbart efter kollisionen.

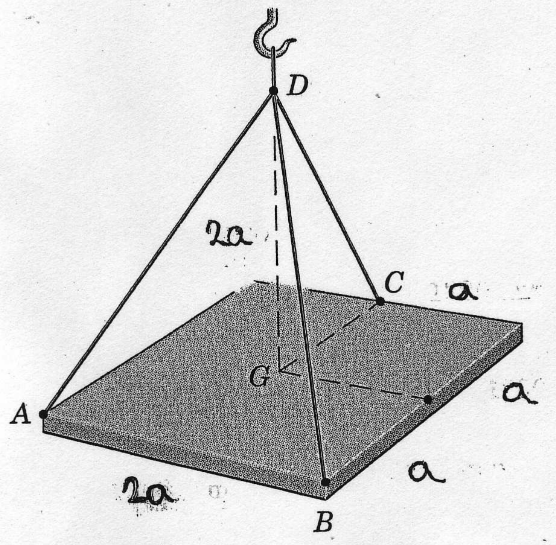
Överkursuppgifter

5. Bestäm skjuvkraften V och böjmomentet M i balken som funktioner av avståndet x från infästningspunkten A. (Tyngdkraften på balken är inkluderad i lasten w.)

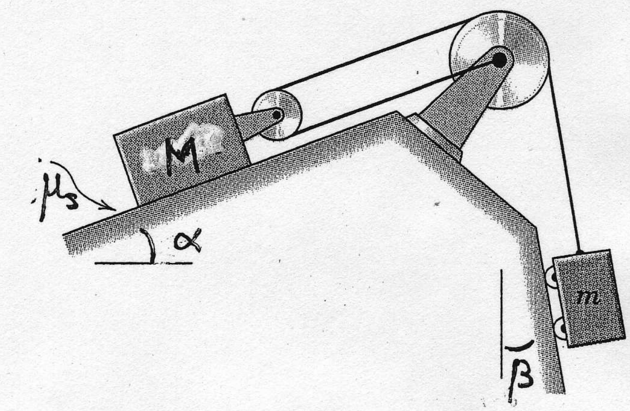
6. Stången med de två kloten roterar med vinkelhastigheten ω samtidigt som dess mittpunkt G rör sig med farten v i positiva x-axelns riktning. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_0$ med avseende på O då G har koordinaterna x och y. (Stångens massa och klotens radie försummas.)

Lycka till!

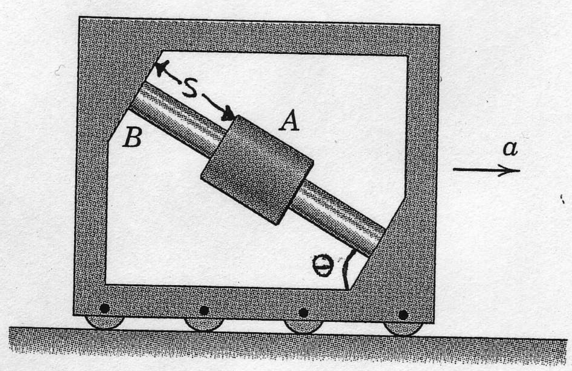
1.


D
2a
C
a
G
a
A
2a
a
B

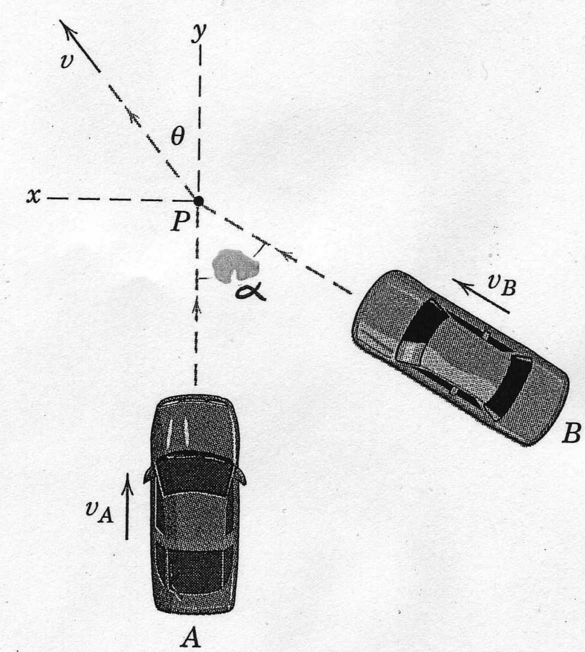
2.


M
μ_s
α
m
β

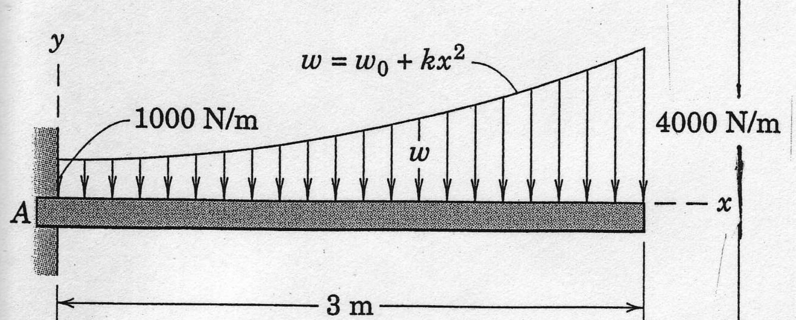
3.


s
A
B
a
θ

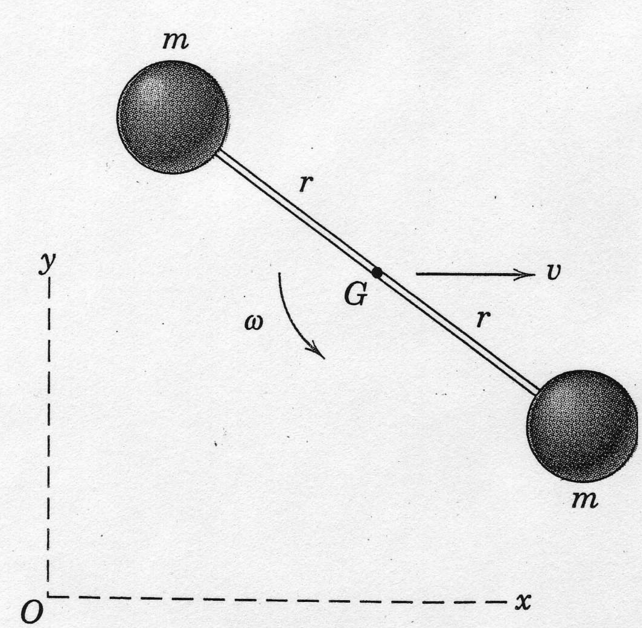
4.


v
y
θ
x
P
α
v_B
B
v_A
A

5.

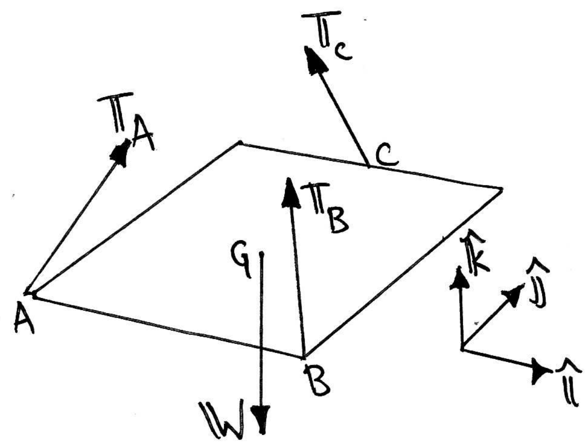

y
$w = w_0 + kx^2$
1000 N/m
4000 N/m
w
A
x
3 m

6.


m
r
y
v
G
ω
r
m
O
x

1. Plattan angrips av krafterna

$$\begin{cases} \mathbf{T}_A = T_A \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{T}_B = T_B \frac{1}{\sqrt{6}} (-\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{T}_C = T_C \frac{1}{\sqrt{5}} (-\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{W} = -mg\,\hat{k} \end{cases}$$



i punkterna A, B, C och G vars ortsvektorer m a p G är

$$\begin{cases} \mathbf{r}_A = a(-\hat{\imath} - \hat{\jmath}) \\ \mathbf{r}_B = a(\hat{\imath} - \hat{\jmath}) \\ \mathbf{r}_C = a\,\hat{\jmath} \\ \mathbf{r}_G = 0 \end{cases}$$

Kraftjämvikt ger att

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C + \mathbf{W} \\ &= \hat{\imath}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_A - \frac{1}{\sqrt{6}} T_B\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_A + \frac{1}{\sqrt{6}} T_B - \frac{1}{\sqrt{5}} T_C\right) + \hat{k}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} T_A + \sqrt{\frac{2}{3}} T_B + \frac{2}{\sqrt{5}} T_C - mg\right) \end{aligned}$$

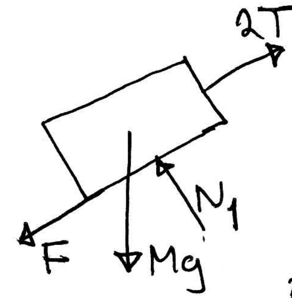
och momentjämvikt kring G ger att

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{T}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_C \times \mathbf{T}_C + \mathbf{r}_G \times \mathbf{W} \\ &= \hat{\imath}\, a\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} T_A - \sqrt{\frac{2}{3}} T_B + \frac{2}{\sqrt{5}} T_C\right) + \hat{\jmath}\, a\left(\sqrt{\frac{2}{3}} T_A - \sqrt{\frac{2}{3}} T_B\right) \end{aligned}$$

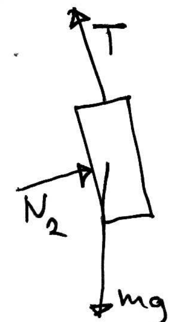
Varur fås att

$$T_A = T_B = mg\sqrt{\frac{3}{32}} \quad \text{och} \quad T_C = mg\sqrt{\frac{5}{16}}$$

2. Jämviktsekvationerna lyder



$$\begin{cases} 2T - F - Mg\sin\alpha = 0 \\ N_1 - Mg\cos\alpha = 0 \\ T - mg\cos\beta = 0 \\ N_2 - mg\sin\beta = 0 \end{cases}$$



varur fås att $\begin{cases} F = 2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha \\ N_1 = Mg\cos\alpha \end{cases}$

I gränsfallet med glidning uppåt (neråt) är

$F = \mu_s N_1$ $(F = -\mu_s N_1)$ så att

$$\mu_s = \frac{2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha} \qquad \left(\mu_s = -\frac{2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha}\right)$$

varur fås att

$$m = M\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta} \qquad \left(m = M\frac{-\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}\right)$$

Förutsatt att $\mu_s \leq \tan\alpha$ råder alltså jämvikt då

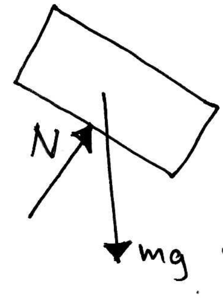
$$M\frac{-\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta} \leq m \leq M\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}$$

Om $\mu_s > \tan\alpha$ får vi istället intervallet

$$0 \leq m \leq M\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}$$

3. Newtons andra lag för hylsan ger

$\searrow \quad mg\sin\theta = m(a\cos\theta + \ddot{s})$



Varur fås att

$$\ddot{s} = g\sin\theta - a\cos\theta$$

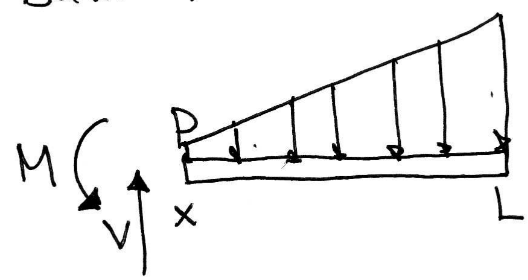
4. Rörelsemängdens bevarande ger

$$\begin{cases} \uparrow \quad m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha = (m_A + m_B) v \cos\theta \\ \leftarrow \quad m_B v_B \sin\alpha = (m_A + m_B) v \sin\theta \end{cases}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} \theta = \arctan \dfrac{m_B v_B \sin\alpha}{m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha} \\ v = \dfrac{1}{m_A + m_B} \sqrt{(m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha)^2 + (m_B v_B \sin\alpha)^2} \end{cases}$$

5. Gör ett snitt i punkten P på avståndet x från den vänstra ändpunkten och frilägg den högra delen av balken:



Kraftjämvikt ger nu skjuvkraften

$$V = \int_x^L (w_0 + ks^2)\,ds = w_0(L-x) + \frac{k}{3}(L^3 - x^3)$$

och momentjämvikt kring P ger böjmomentet

$$M = \int_x^L (w_0 + ks^2)(s-x)\,ds$$

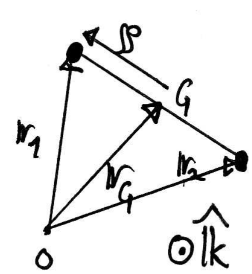
$$= \frac{w_0}{2}(L^2 - x^2) - w_0 x (L-x) + \frac{k}{4}(L^4 - x^4) - \frac{kx}{3}(L^3 - x^3)$$

6. $\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_1 \times m\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\dot{\mathbf{r}}_2$

$$= (\mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}) \times m(\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\boldsymbol{\rho}}) + (\mathbf{r}_G - \boldsymbol{\rho}) \times m(\dot{\mathbf{r}}_G - \dot{\boldsymbol{\rho}})$$

$$= 2m(\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}})$$

$$= 2m\hat{\mathbf{k}}(-yV + \omega r^2)$$



Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 22 augusti 2005 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den homogena plattan med massan m har formen av en liksidig triangel. Bestäm spänningen i de tre linorna. (Avståndet MG, där G är plattans tyngdpunkt, är en tredjedel av avståndet MC.)

2. Klossen har massan m och ligger i vila på det lutande planet. Den statiska friktionskoefficienten är μ_s. Bestäm den minsta horisontella kraft P som får klossen att börja glida.

3. Klossen har massan m och friktionskoefficienten mot underlaget är μ. Bestäm klossens acceleration när man drar i linan med kraften F.

4. Systemet släpps i vila. Bestäm vikten B's fart när den har fallit sträckan s. (Friktionen försummas.)

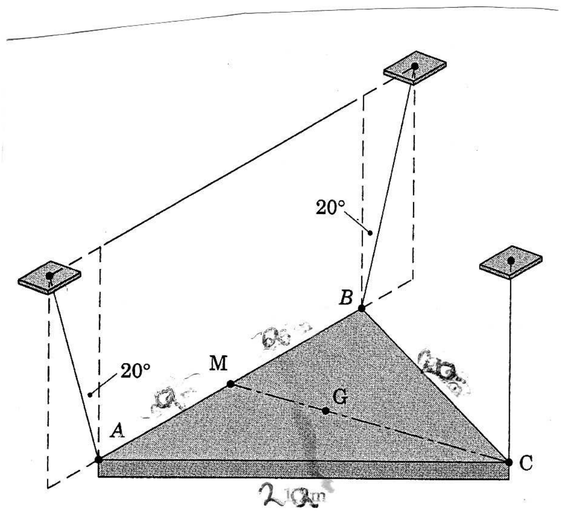
Överkursuppgifter

5. Bojen har formen av en cylinder med radien r, längden l och massan m. Den flyter enligt figuren så att längden h sticker upp ovanför vattenytan. Vattnet har densiteten ρ. Bestäm spänningen i den kabel som förankrar bojen i havsbottnen.

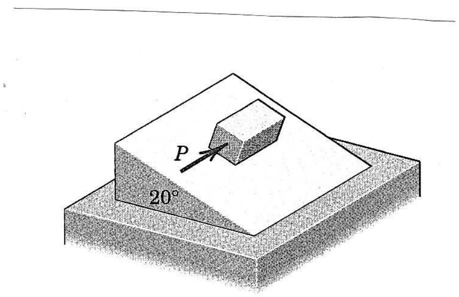
6. Kedjan har längden L och massan ρ per längdenhet. Dess övre ände sänks med den konstanta hastigheten $\dot{x} = v$ genom att man påverkar den med en viss kraft P. Bestäm vågens utslag uttryckt i ρ, x, v och tyngdaccelerationen g.

Lycka till!

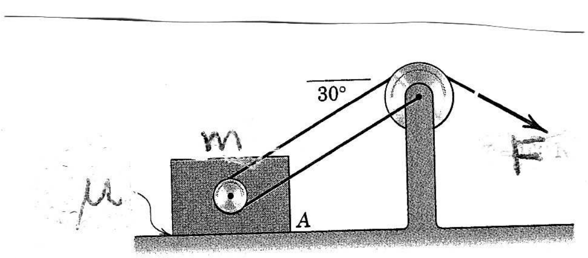
1.



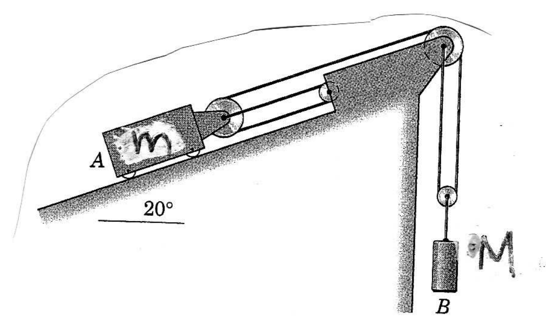
2.



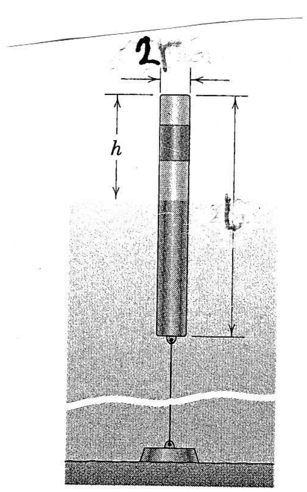
3.



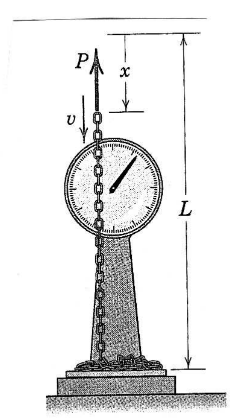
4.



5.



6.



1. Beteckna de tre krafterna med F_A, F_B resp F_C.

Jämviktsekvationerna lyder då

$$\begin{cases} F_A - F_B = 0 & \text{horisontellt} \\ F_A \cos 20^\circ + F_B \cos 20^\circ + F_C - mg = 0 & \text{vertikalt} \\ F_C - \frac{1}{3} mg = 0 & \text{momentjämvikt kring axeln } AB \end{cases}$$

varur fås att

$$F_A = F_B = \frac{mg}{3 \cos 20^\circ}, \quad F_C = \frac{mg}{3}$$

---

2. Normalkraften från planet på blocket betecknas med N. Friktionskraftens komponenter parallellt med och vinkelrät mot P betecknas med $F_{\parallel}$ respektive $F_{\perp}$.

Jämviktsekvationerna lyder då

$$\begin{cases} P - F_{\parallel} = 0 \\ N \cos 20^\circ + F_{\perp} \sin 20^\circ - mg = 0 \\ N \sin 20^\circ - F_{\perp} \cos 20^\circ = 0 \end{cases}$$

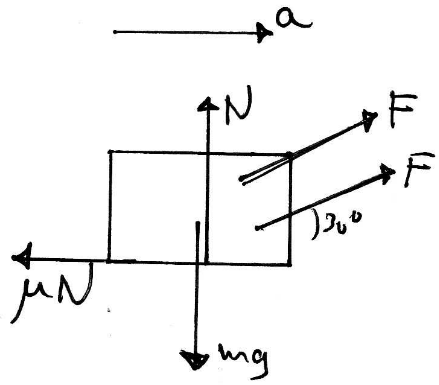
När glidningen precis börjar gäller dessutom att

$$\sqrt{F_{\perp}^2 + F_{\parallel}^2} = \mu N$$

varur fås att

$$P = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}$$

3. Frilägg klossen



och ställ upp Newtons andra lag:

$$\begin{cases} \rightarrow & 2F\cos 30^\circ - \mu N = ma \\ \uparrow & N - mg + 2F\sin 30^\circ = 0 \end{cases}$$

varur fås att

$$a = \frac{2F}{m}\left(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ\right) - \mu g$$

---

4. Energiprincipen ger att

$$\tfrac{1}{2} m v'^2 + \tfrac{1}{2} M v^2 = Mgs - mgs' \sin 20^\circ$$

där v och v' är farterna för B resp A när de har rört sig sträckorna s respektive s' från utgångsläget.

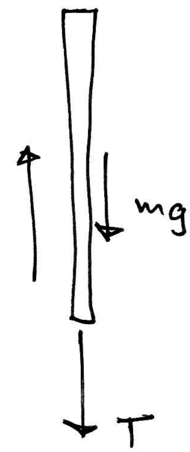
Det gäller att $s' = \frac{2}{3} s$ och $v' = \frac{2}{3} v$.

Man får nu att

$$v = \sqrt{\frac{\left(M - \frac{2m}{3}\sin 20^\circ\right) gs}{\frac{1}{2}M + \frac{2}{9}m}}$$

5. Frilägg bojen

$$\pi r^2 (l-h)\rho g$$



Kraftjämvikt ger nu spännkraften

$$T = \pi r^2 (l-h)\rho g - mg$$

---

6. Kraften från vågen är

$$F = \rho g x + \rho v^2$$

Den första termen är tyngden av den del av kedjan som ligger på vågen.

Den andra termen är den kraft som krävs för att ändra hastigheten från v till 0 för massan ρv per tidsenhet.

Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Lördagen den 7 januari 2006 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

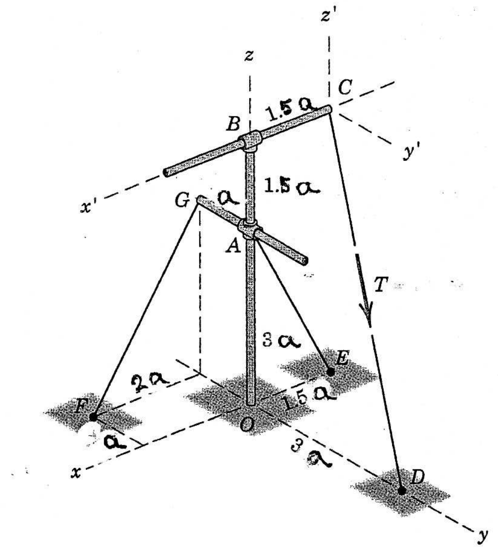
1. Den vertikala stången är fäst i punkten O så att den fritt kan vrida sig kring x- och y-axlarna men inte kring z-axeln. Bestäm spänningen i linorna FG och AE om spänningen T i linan CD och avståndet a är givna.
2. Mannen med massan $M = 80$ kg håller tunnan med massan $m = 34$ kg i jämvikt enligt figuren. Bestäm det maximala värdet på avståndet x för att han inte skall glida mot underlaget, om den statiska friktionskoefficienten är $\mu_s = 0.40$.
3. Mannen har massan M och vagnen har massan m. Mannen drar i repet med kraften F. Bestäm vagnens acceleration. Övriga massor samt friktionen försummas.
4. Klossen har massan m och påverkas av en kraft P som varierar linjärt från $P = 0$ vid tiden $t = 0$ till ett givet maximalt värde $P = P_{\max}$ vid tiden $t = t_{\max}$. Den statiska och kinetiska friktionskoefficienten mellan klossen och underlaget är μ_s respektive μ_k. Bestäm klossens hastighet vid tiden $t = t_{\max}$ om den startar i vila vid tiden $t = 0$.

Överkursuppgifter

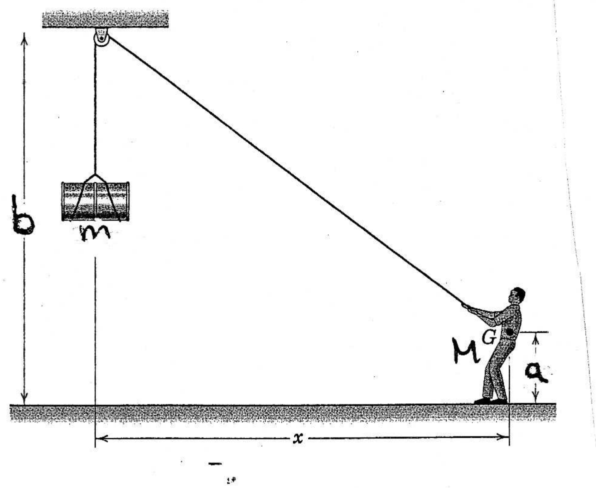
5. De halvsfäriska skalen har inner och ytterradierna r respektive R. Bestäm den kraft F som behövs för att dra isär dem om lufttrycket p_{inre} inne i klotet är mindre än det yttre lufttrycket p_{yttre}.
6. Bestäm accelerationen för tyngdpunkten för systemet som består av fyra tyngder vardera med massan m då det påverkas av krafter enligt figuren. Övriga massor samt friktionen försummas.

Lycka till!

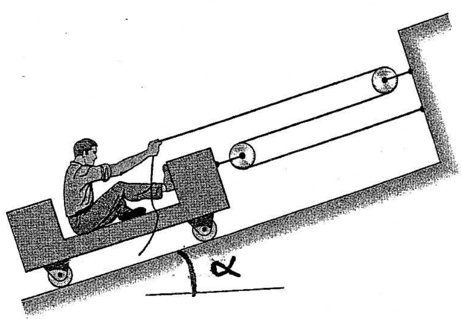
1.


z'
z
C
B
1.5a
y'
x'
G
a
1.5a
A
T
3a
E
2a
F
1.5a
O
a
x
3a
D
y

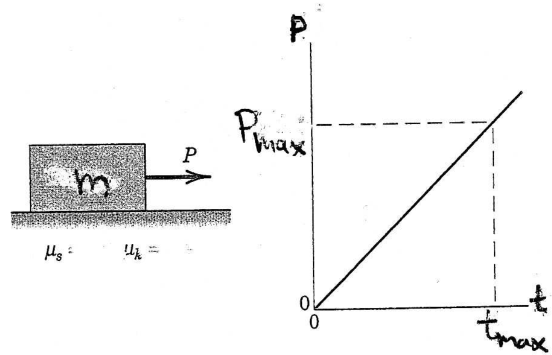
2.


b
m
M
G
a
x

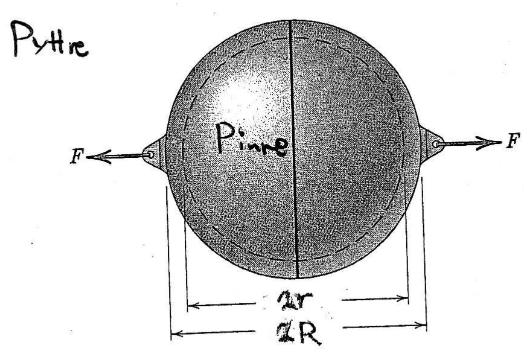
3.


α

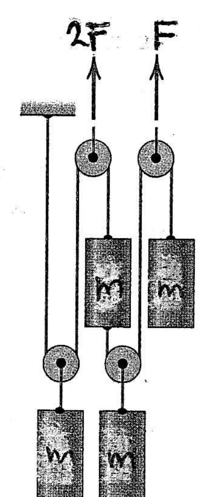
4.


m
P
μ_s
u_k
P
P_{max}
0
0
t
t_{max}

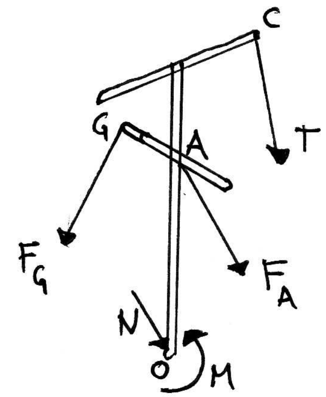
5.


Pyttre
F
Pinre
F
2r
2R

6.


2F
F
m
m
m
m

1. Frilägg stången:



Punkterna A, C och G har ortsvektorerna

$$\begin{cases} \mathbb{r}_A = (0,0,3)a \\ \mathbb{r}_C = (-\frac{3}{2}, 0, \frac{9}{2})a \\ \mathbb{r}_G = (0,-1,3)a \end{cases}$$

m a p origo O. I dessa punkter angriper krafterna

$$\begin{cases} \mathbb{F}_A = \frac{2}{\sqrt{45}}(-\frac{3}{2}, 0, -3)F_A \\ \mathbb{F}_G = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 0, -3)F_G \\ \mathbb{T} = \frac{2}{\sqrt{126}}(\frac{3}{2}, 3, -\frac{9}{2})T \end{cases}$$

Vid jämvikt gäller att

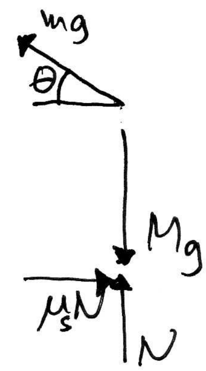
$$0 = \mathbb{M}_O = \mathbb{r}_A \times \mathbb{F}_A + \mathbb{r}_C \times \mathbb{T} + \mathbb{r}_G \times \mathbb{F}_G + (0,0,1)M$$

$$= \left(\frac{3a}{\sqrt{13}}F_G - \frac{27a}{\sqrt{126}}T, \frac{6a}{\sqrt{13}}F_G - \frac{3a}{\sqrt{5}}F_A, \ldots\right)$$

Varur fås att

$$\begin{cases} F_A = 3\sqrt{\frac{10}{7}}\,T \\ F_G = 3\sqrt{\frac{13}{14}}\,T. \end{cases}$$

2. Frilägg mannen och ställ upp jämviktsekvationer då glidning precis sker:



$$\begin{cases} \rightarrow & \mu_s N - mg\cos\theta = 0 \\ \uparrow & N - Mg + mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Härur fås att

$$\frac{1}{\mu_s}\cos\theta + \sin\theta = \frac{M}{m}$$

vilket kan skrivas som en andragradsekvation i variabeln $t = \tan\theta$:

$$t^2\left(1 - \left(\frac{M}{m}\right)^2\right) + \frac{2}{\mu} t = \left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{1}{\mu^2}$$

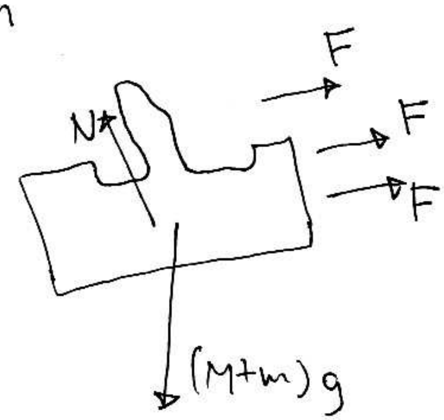
Med de givna värdena på m, M och μ har denna lösningarna

$t = 1{,}23 \qquad (t = -0.13)$

Det sökta avståndet är

$$x = \frac{b-a}{t}$$

3. Frilägg mannen och vagnen



Newtons andra lag längs med planet ger nu att

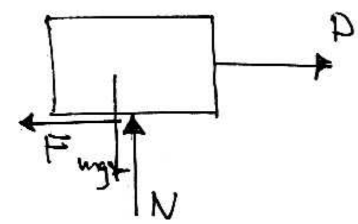
$$3F - (M+m)g\sin\alpha = (M+m)a$$

så att accelerationen blir

$$a = \frac{3F}{M+m} - g\sin\alpha$$

---

4. Frilägg klossen:



Klossen är i vila med

$$F = P = \frac{P_{max}}{t_{max}} t$$

ända tills tiden $t_0 = \frac{\mu_s mg}{P_{max}} t_{max}$

då den börjar glida.

(Om $\mu_s mg$ är större än P_{max} börjar den aldrig glida.)

Därefter är $F = \mu_k mg$ och accelerationen blir

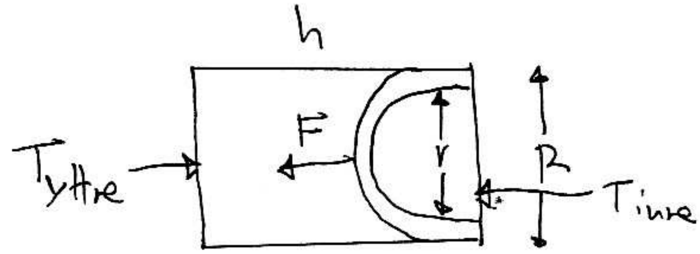
$$a = \frac{1}{m}(P - F) = \frac{1}{m}\frac{P_{max}}{t_{max}} t - \mu_k g$$

Den sökta hastigheten blir

$$V = \int_{t_0}^{t_{max}} a\,dt = \frac{1}{2m}\frac{P_{max}}{t_{max}}\left(t_{max}^2 - t_0^2\right) - \mu_k g\left(t_{max} - t_0\right)$$

$$= \frac{1}{2m} P_{max} t_{max}\left(1 - \left(\frac{\mu_s mg}{P_{max}}\right)^2\right) - \mu_k g t_{max}\left(1 - \frac{\mu_s mg}{P_{max}}\right)$$

5. Frilägg en cylinder med radie R och höjd $h > R$ där det ena halvklotet får plats:



Precis då halvkloten släpper från varandra har vi

$$F = T_{yttre} - T_{inre} = \pi R^2 p_{yttre} - \pi r_2 p_{inre}$$

---

6. Kraften i linan som sitter fast i taket är F.

Systemet påverkas alltså av den totala kraften

$4F - 4mg$

och har massan $4m$.

Tyngdpunktens acceleration blir då

$$a = \frac{4F - 4mg}{4m} = \frac{F}{m} - g$$