MEKANIK 1

Föreläsning (1)
1/11-13

Idag: 2.1 - 2.2 Intro & krafter

VAD ÄR MEKANIK?

Mekanik = läran om sambandet mellan materiella kroppars växelverkan med varandra och deras rörelse

Några kända mekaniker

NAMN:	LEVDE:	GJORDE:	SA:
Arkimedes	200-tal f.Kr	badade, vattenskruv, hävstången	Heureka!
Galileo	1564-1642	fallrörelse, pendeln	och likväl rör hon sig...
Newton	1642-1727	gravitionen, kraft-begreppet	... Giants!
Einstein	1879-1955	relativitetsteorin	Gud spelar inte tärning
Bohr	1885-1962	kvantfysik	... skakat dig i grunden
Hawking	1942 →	Svarta hål	.. understand the Universe - that's what makes us special

KRAFTER

Föreläsning (2)
1/11-13

I mekaniken representerar vi påverkan på en "materiell kropp" (från andra kroppar) genom **krafter**

En **kraft** är alltså en matematisk modell för vissa aspekter av yttre påverkan

En kraft specificeras av sin **kraftvektor** och sin **angreppspunkt**

Vi skiljer noga mellan fysikaliska storheter som är

- **skalärer**: Specificeras av ett enda tal (storlek)

  Ex. tid, massa, energi

- **vektorer**: Specificeras av en storlek (som är en skalär) och en riktning i rummet

  Ex. kraft, hastighet, acceleration

Beteckningar för vektorer: $\mathbb{F}$, $\mathbf{F}$, $\bar{F}$, $\vec{F}$

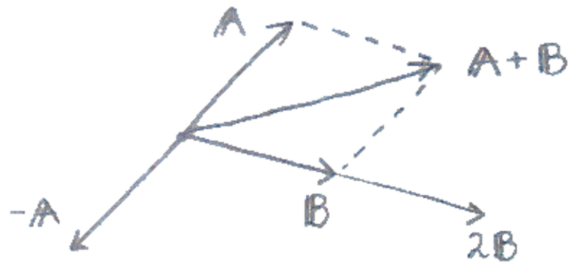
storlek (beloppet) av $\mathbb{F}$ är $F = |\mathbb{F}|$

Vektorer kan multipliceras med skalärer samt adderas med varandra, dvs vi kan bilda linjärkombinationer av vektorer

Ex. $\mathbb{F} = \alpha \mathbb{P} + \beta \mathbb{T}$

Skalära koefficienter

Addition representeras grafiskt enl. nedan:

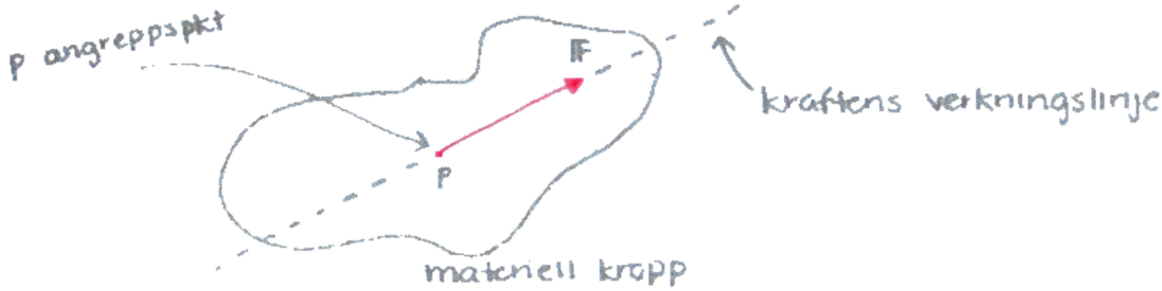


Observera att en vektor i sig inte är lokaliserad till en plats i rummet

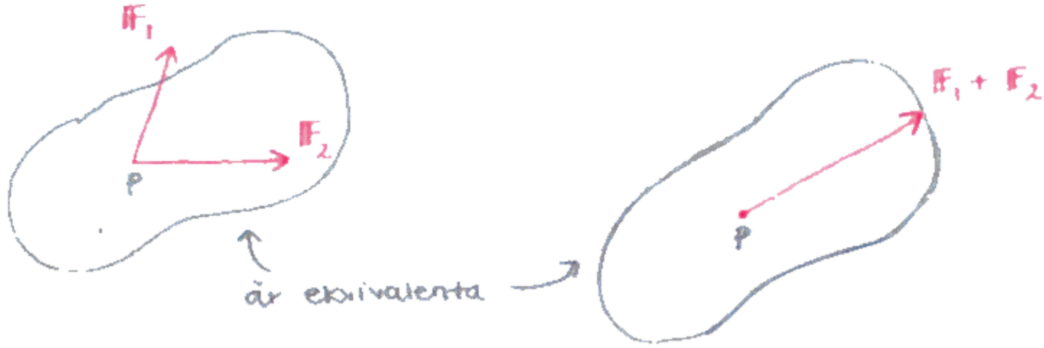
→

Föreläsning (3)
1/11 - 13

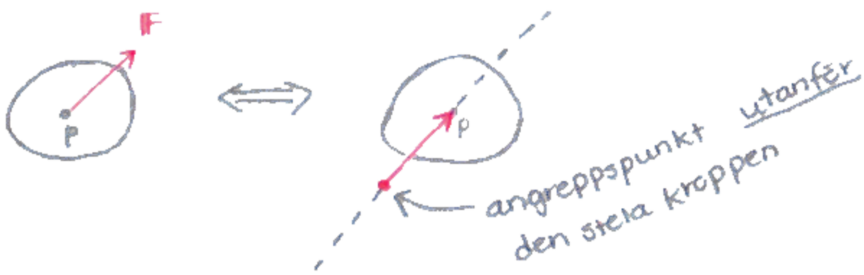
För att specificera en kraft behövs dess angreppspunkt



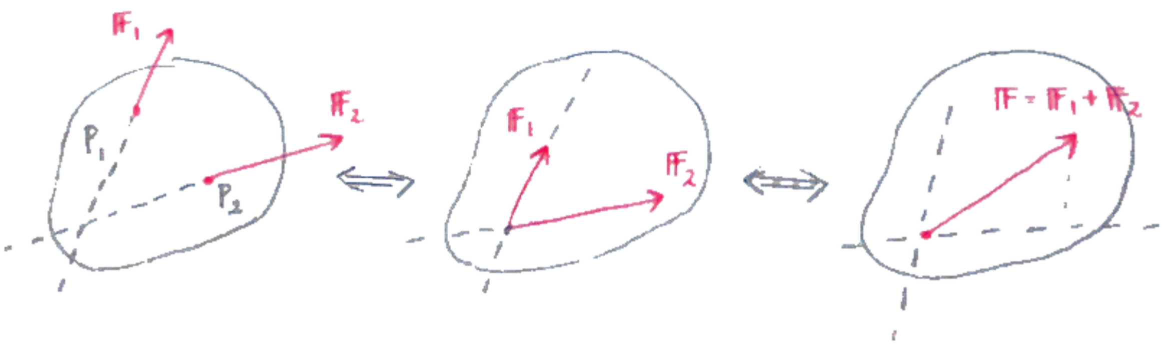
Flera krafter med <u>samma</u> angreppspunkt kan ersättas med en enda kraft (summan) med samma angreppspunkt



<u>Om</u> kraften angriper en <u>stel kropp</u> så kan dess angreppspunkt förskjutas längs med verkningslinjen och ändå ge samma påverkan ("sliding vector" i boken)



Detta kan användas till att förenkla ett givet system av krafter som verkar på en stel kropp



Föreläsning (4)
1/11-13

Klassificering av krafter

- Kontaktkraft: Direkt fysisk kraft, t.ex normalkraften på en kropp från underlaget
- kroppskraft: Ett kraftfält (t.ex. gravitation eller elektromagnetism) som påverkar varje del av en kropp
- koncentrerad kraft: Kraften angriper i endast en punkt
  Idealisering
- distribuerad kraft: Kraftens angrepp är fördelat över en linje/area eller volym

Viktiga delar från linjär algebra:

Kan man multiplicera två vektorer $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$?

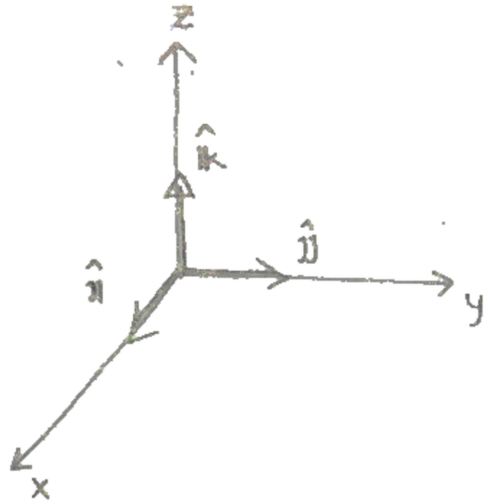
Ja, på två sätt: Skalärprodukt (dot product)

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}| \cdot \cos\phi$

vektorprodukt (cross product) $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ är en vektor med beloppet $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}| \sin\phi$

och $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ är vinkelrät mot $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$, samt $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ bildar ett högersystem

Föreläsning (2)
4/11-13



En godtycklig vektor $\mathbb{A}$ kan nu skrivas som en linjärkombination

$$\mathbb{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

där $A_x = \mathbb{A} \cdot \hat{i}$, $A_y = \mathbb{A} \cdot \hat{j}$, $A_z = \mathbb{A} \cdot \hat{k}$

A_x, A_y, A_z kallas för $\mathbb{A}$:s **komponenter**

$A_x \hat{i}$, $A_y \hat{j}$, $A_z \hat{k}$ kalla för $\mathbb{A}$:s **komposanter**

Dela upp vektor $\mathbb{B}$ på samma sätt

$$\mathbb{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

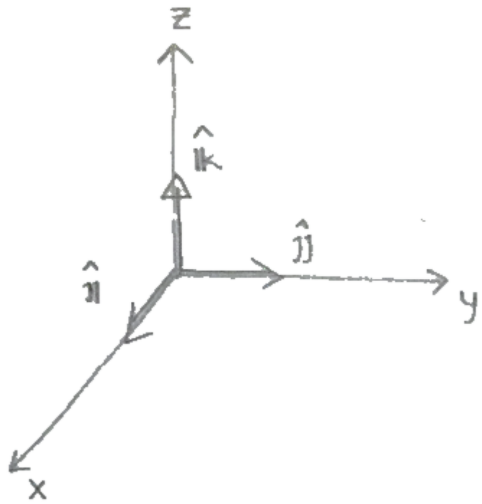
Skalär- eller vektorprodukt mellan $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ kan nu enkelt beräknas genom att multiplicera ihop dessa utvecklingar, och använda följande multiplikationstabeller

$\cdot$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

$\times$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$+\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$+\hat{i}$
$\hat{k}$	$+\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

första argumentet

Föreläsning (2)
4/11-13



En godtycklig vektor $\mathbb{A}$ kan nu skrivas som en linjärkombination

$$\mathbb{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

där $A_x = \mathbb{A} \cdot \hat{i}$, $A_y = \mathbb{A} \cdot \hat{j}$, $A_z = \mathbb{A} \cdot \hat{k}$

A_x, A_y, A_z kallas för $\mathbb{A}$:s **komponenter**

$A_x \hat{i}, A_y \hat{j}, A_z \hat{k}$ kalla för $\mathbb{A}$:s **komposanter**

Dela upp vektor $\mathbb{B}$ på samma sätt

$$\mathbb{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Skalär- eller vektorprodukt mellan $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ kan nu enkelt beräknas genom att multiplicera ihop dessa utvecklingar, och använda följande multiplikationstabeller

$\cdot$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

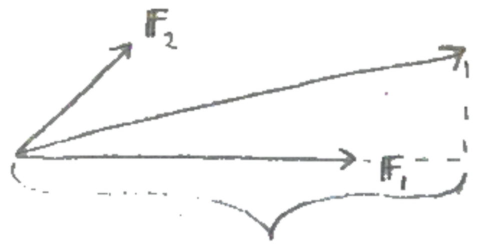
$\times$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$+\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$+\hat{i}$
$\hat{k}$	$+\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

första argumentet

Föreläsning (3)
4/11-13

OBS Blanda INTE ihop uppdelning av en kraft längs en HON-bas, beskrivet på föregående sida ($A_x = \mathbb{A} \cdot \hat{\imath}$ osv.) med sönderläggning av en vektor längs godtyckliga axlar.

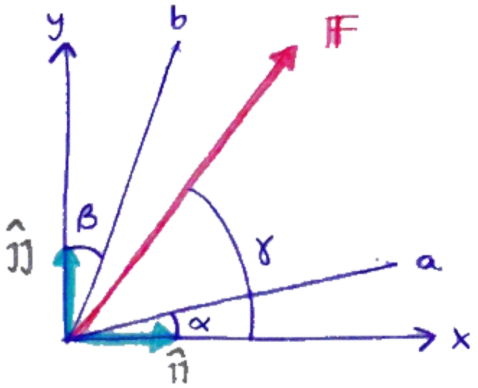
$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$



$$|\mathbb{F}_1| \neq \mathbb{F} \cdot \frac{\mathbb{F}_1}{|\mathbb{F}_1|}$$

Här får vi istället lösa ett ekvationssystem

Ex 2/22 Bestäm komponenterna F_a och F_b för kraften $\mathbb{F}$ längs a- och b-axeln



1) Dela upp $\mathbb{F}$ i komponenter längs ON-basvektorerna $\hat{\imath}$ och $\hat{\jmath}$

$$\mathbb{F} = F\cos\gamma\,\hat{\imath} + F\sin\gamma\,\hat{\jmath}$$

$F := |\mathbb{F}|$

2) Gör samma sak för $\mathbb{F}_a$ och $\mathbb{F}_b$

$$\begin{cases} \mathbb{F}_a = F_a\cos\alpha\,\hat{\imath} + F_a\sin\alpha\,\hat{\jmath} \\ \mathbb{F}_b = F_b\sin\beta\,\hat{\imath} + F_b\cos\beta\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Föreläsning (4)
4/11-13

$\mathbb{F}$ och $\mathbb{F}_a + \mathbb{F}_b$ ska vara ekvivalenta kraftsystem

$\Rightarrow \mathbb{F} = \mathbb{F}_a + \mathbb{F}_b$

I komponentform:

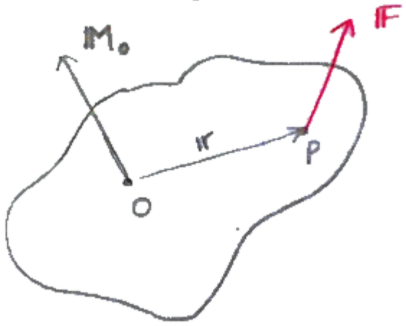
$\hat{\imath}$: $F\cos\gamma = F_a\cos\alpha + F_b\sin\beta$

$\hat{\jmath}$: $F\sin\gamma = F_a\sin\alpha + F_b\cos\beta$

Två ekvationer och två obekanta (F_a och F_b) $\Rightarrow$ Lös

2.4 VRIDMOMENT

Lat O vara en godtycklig referenspunkt



* Här är $\mathbb{r}$ = vektorn från O till P = punkten P:s ortsvektor m.a.p. O

En kraft $\mathbb{F}$ angriper i en annan punkt P. Vi säger att denna kraft utövar ett **vridmoment**

$$\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$ med avseende på momentpunkten O *

Tolkning av $\mathbb{M}_o$: Kraften $\mathbb{F}$ tenderar att rotera kroppen kring en axel genom O som är parallell med $\mathbb{M}_o$

I <u>tvådimensionella</u> problem är både $\mathbb{r}$ och $\mathbb{F}$ linjärkombinationer av $\hat{\imath}$ och $\hat{\jmath}$

Då är $\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \pm M_o \hat{\mathbb{k}}$ där $M_o = |\mathbb{M}_o|$

Då gäller att $M_o = Fd$ där $F = |\mathbb{F}|$ och d är det <u>vinkelräta</u> avståndet från kraftens verkningslinje till momentpunkten O

(ty $M_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = r \cdot F \cdot \sin[\mathbb{r}, \mathbb{F}]$)

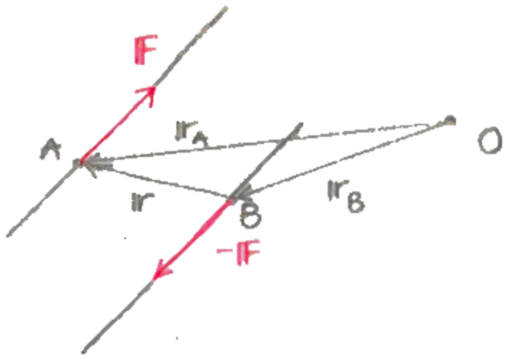
Föreläsning (5)
4/11-13

2.5 KRAFTPAR (Couple)

Två motsatta krafter $\mathbb{F}$ och $-\mathbb{F}$ utgör ett kraftpar

kraftsumman är

$\mathbb{F} + (-\mathbb{F}) = 0$



Vi beräknar kraftsystemets vridmoment m.a.p en godtycklig momentpunkt O

$$\underline{\underline{\mathbb{M}_O}} = \mathbb{r}_A \times \mathbb{F} + \mathbb{r}_B \times (-\mathbb{F}) = \underbrace{(\mathbb{r}_A - \mathbb{r}_B)}_{\mathbb{r}} \times \mathbb{F} = \mathbb{M}$$

skriv ut momentpunkten

vektorn från B till A

OBS oberoende av momentpunkt

Ofta representerar vi ett kraftpar med en symbol $\circlearrowleft$ $\mathbb{M}$

eller i två dimensioner $\circlearrowleft$ M (vinkelrät mot planet)

Observera att $\mathbb{M}$ INTE är en kraft utan ett vridmoment.

Det har ingen särskild "angreppspunkt"

$\Rightarrow$ beskrivs av en s.k. fri vektor (free vector)

Föreläsning (1)
8/11-13

MEKANIK

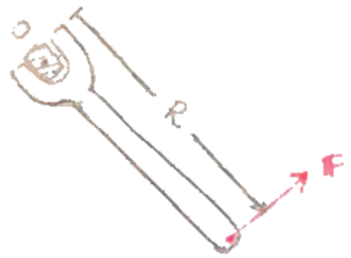
IDAG: Vridmoment, beräkningar

Stelkroppsekvivalenta kraftsystem

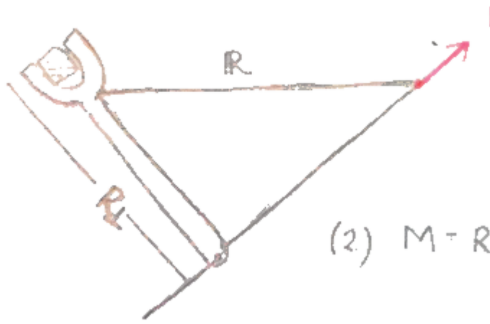
Kraftpar

Skruvkrafter

Ex



(1) $M = RF$

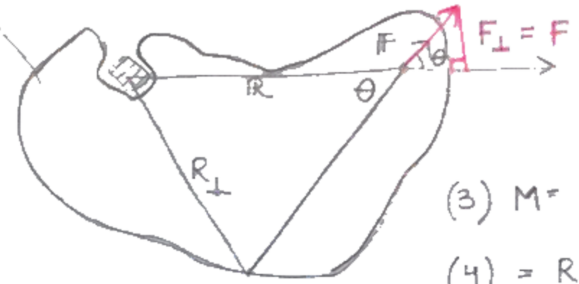


$R_\perp$: ⊥ mot kraftens verkan

(2) $M = R_\perp F$

Formen spelar ingen roll

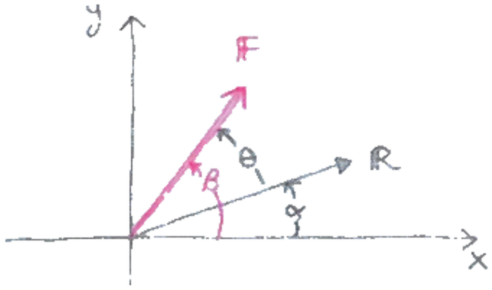
Vi kan flytta angreppspunkten ‖ med $\mathbb{F}$



$F_\perp = F \sin\theta$

(3) $M = R \sin\theta \, F = R(F \sin\theta) =$

(4) $= R F_\perp$



$\mathbb{R} = (\cos\alpha \, \hat{x} + \sin\alpha \, \hat{y}) R$

$\mathbb{F} = (\cos\beta \, \hat{x} + \sin\beta \, \hat{y}) F$

Obs $\mathbb{F}$ och $\mathbb{R}$ har olika enheter

$$\mathbb{R} \times \mathbb{F} = RF\left(\cos\alpha \sin\beta (\hat{x} \times \hat{y}) + \cos\beta \sin\alpha (\hat{y} \times \hat{x})\right)$$

$$= (\cos\alpha \sin\beta - \cos\beta \sin\alpha)\hat{z} \cdot RF =$$

$$= \sin(\beta - \alpha) RF \, \hat{z}$$

$$= \sin\theta \; RF \cdot \hat{z}$$

(5) $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{F}$ (def)

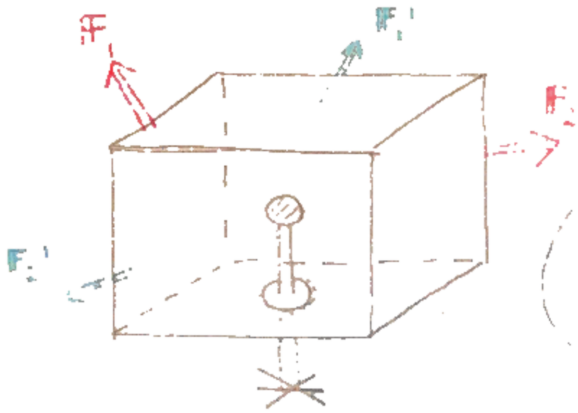
→

$$\mathbb{R} = (x, y, 0)$$

$$\mathbb{F} = (F_x, F_y, 0)$$

$$(5') \quad \mathbb{M} = (xF_y - yF_x)\,\hat{z}$$

STELKROPPSEKVIVALENTA KRAFTSYSTEM



- O – origo
- $\mathbb{F}$ – totala kraften
- $\mathbb{M}$ – totala vridmomentet

Stelkroppssystem

Def. om $\mathbb{F} = \sum_i \mathbb{F}_i$

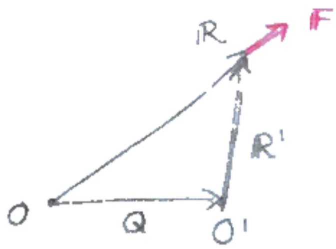
$$\mathbb{M} = \sum_i \mathbb{R}_i \times \mathbb{F}_i$$

om $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$

$\mathbb{M} = \mathbb{M}'$ $\Longrightarrow$ de två kraftsystemen är stelkroppsekvivalenta

---

Räkna fram $\mathbb{M}$ och $\mathbb{F}$ med annat val av origo



$$\mathbb{F}' = \sum_i \mathbb{F}_i' = \sum_i \mathbb{F}_i = \mathbb{F}$$

$$\mathbb{M}' = \sum_i \mathbb{R}_i' \times \mathbb{F}_i = \sum_i (-\mathbb{Q} + \mathbb{R}_i) \times \mathbb{F} =$$

$$= \sum_i (\mathbb{R}_i \times \mathbb{F}_i) - \sum_i (\mathbb{Q} \times \mathbb{F}_i) =$$

$$= \mathbb{M} - \mathbb{Q} \times \sum_i \mathbb{F}_i = \mathbb{M} - \mathbb{Q} \times \mathbb{F}$$

$$\boxed{\mathbb{M}' = \mathbb{M} - \mathbb{Q} \times \mathbb{F}} \qquad \boxed{\mathbb{F}' = \mathbb{F}}$$

$\mathbb{M}' = \mathbb{M} - Q \times \mathbb{F}$

$\mathbb{F}' = \mathbb{F}$

(A) Två stelkroppsekvivalenta kraftsystem är ekvivalenta runt alla andra punkter

Avst Q samma!

$\mathbb{M}_1' = \mathbb{M}_1 - \underbrace{Q \times \mathbb{F}}$

$\mathbb{M}_2' = \mathbb{M}_2 - \overbrace{Q \times \mathbb{F}}$

(B) Om $\mathbb{F} = 0$ kan vi fritt välja origo

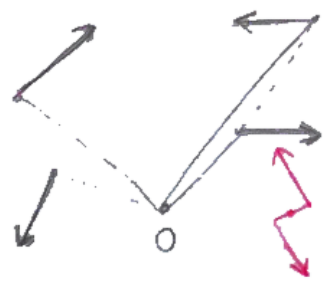
(C) Om $\mathbb{F}_3 = -\mathbb{F}_4$, dvs kraftpar, kan detta "flyttas"

(D) Vi kan flytta origo längs riktningen $\mathbb{F}$ och få samma $\mathbb{M}$ och $\mathbb{F}$

(E) om $\mathbb{F} = 0$ och $\mathbb{M} = 0$ runt O är $\mathbb{F}' = 0$ och $\mathbb{M}' = 0$ runt alla andra punkter

(F) Vi kan omvandla ett stelkroppssystem till en kraftskruv

(C)



KRAFTSKRUV

Stelkroppssystem där $\mathbb{M} \parallel \mathbb{F}$

För att formelera ett stelkroppssystem till en kraftskruv löser vi ekvationen *

$$* \begin{cases} \mathbb{M}' = \mathbb{M} - \mathbb{Q} \times \mathbb{F} \\ \mathbb{M}' \parallel \mathbb{F} \end{cases}$$

$$\mathbb{M}' = |\mathbb{M}|\, \hat{\mathbb{F}}, \quad \text{där} \quad \hat{\mathbb{F}} = \frac{\mathbb{F}}{|\mathbb{F}|}$$

Kolla Appendix C 7

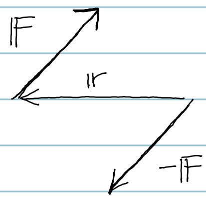
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

$$\boxed{\text{Resultat} \quad \mathbb{Q} = \frac{\hat{\mathbb{F}} \times \mathbb{M}}{|\mathbb{F}|}}$$

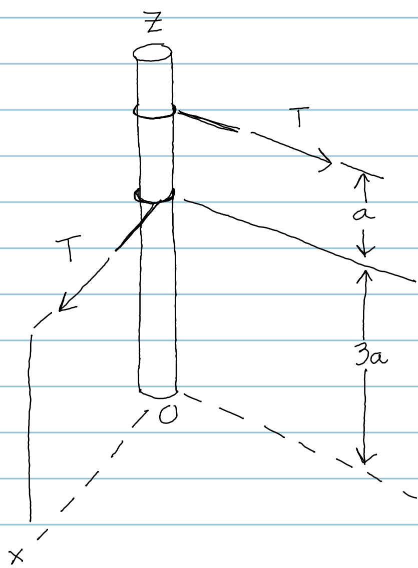
Föreläsning 15/11-13

<u>Errata</u> Kraftpar



Man kan parallellförflytta båda vektorerna (krafterna) längs ~~to~~ verkningslinjen oberoende av varandra utan att något förändras
(vektorprodukten blir samma)

2/164



Riktningen hos kraftskruven ges av kraftsumman för de två krafterna i problemet

Ersätt de två krafterna med en kraftskruv.
Bestäm var momentvektorn $\mathbb{M}$ skär y-z planet

<u>Lösning</u>: Kraftsystemet har kraftsumman

$$\mathbb{R} = T\hat{\imath} + T\hat{\jmath} \longrightarrow$$

och vridmomentet m.a.p. O är

$$\mathbb{M}_O = 3a\,\hat{\mathbb{k}} \times T\hat{\imath} + 4a\,\hat{\mathbb{k}} \times T\hat{\jmath}$$

$$= 3aT\hat{\jmath} - 4aT\hat{\imath}$$

Vi vill ersätta detta med en kraftskruv

Vi har alltså $\begin{cases} \mathbb{R} = T\hat{\imath} + T\hat{\jmath} & R = T\sqrt{2} \\ \mathbb{M} = M\dfrac{\mathbb{R}}{R} = M\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \end{cases}$

Kraftsumman stämmer. Vridmomentet m.a.p. O är

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r} \times \mathbb{R} + \mathbb{M} = (y\hat{\jmath} + z\hat{\mathbb{k}}) \times (T\hat{\imath} + T\hat{\jmath}) +$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = -yT\hat{\mathbb{k}} + zT\hat{\jmath} - zT\hat{\imath} + \frac{M}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

$$= \left(\frac{M}{\sqrt{2}} - zT\right)\hat{\imath} + \left(\frac{M}{\sqrt{2}} + zT\right)\hat{\jmath} - yT\hat{\mathbb{k}}$$

De två uttrycken för $\mathbb{M}_O$ ska överensstämma

Det ger följande ekvationssystem

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{\imath}: & -4aT = \dfrac{M}{\sqrt{2}} - zT \\ \hat{\jmath}: & 3aT = \dfrac{M}{\sqrt{2}} + zT \\ \hat{\mathbb{k}}: & 0 = -yT \end{array}\right\}$$

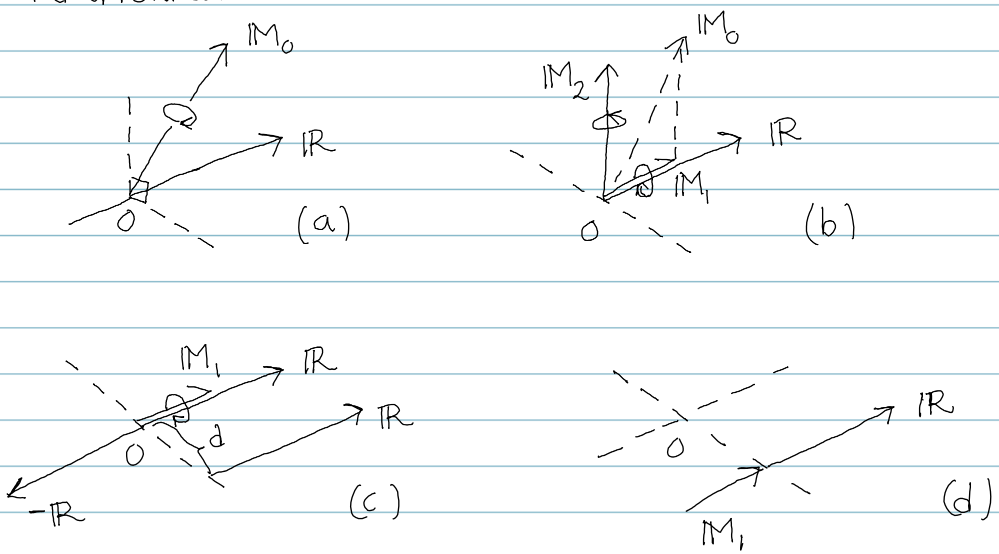
3 ekvationer och 3 obekanta (y, z, M)

Lös! $\longrightarrow$

Lösningen till ekv. syst:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = \dfrac{7a}{2} \\ M = \dfrac{aT}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Kraftskruv:



JÄMVIKT

Recept för att lösa nästan alla mekanikproblem

1) Dela upp det givna systemet i väldefinierade delkroppar på lämpligt sätt (oberoende på frågeställningen)

2) Betrakta en delkropp i taget
   Rita en separat figur för varje delkropp
   T.ex en "sprängskiss" av det givna systemet

   Påverkan på en delkropp från andra delkroppar representeras genom krafter och vridmoment.
   Detta kallas för att <u>frilägga</u> delkroppen.

3) Hur påverkan på en kropp A från en kropp B ser ut beror på hur A och B växelverkar, t.ex hur de är sammanfogade
   Se $\boxed{\text{figur } 3/1}$ i boken

Rita alltid in den mest allmänna kraft och vridmoment som denna typ av förbindelse tillåter

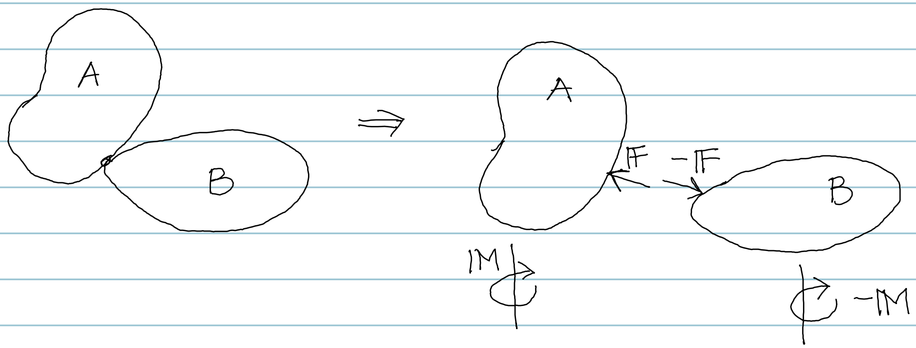
4) I den här kursen växelverkar en kropp med andra kroppar som den är i kontakt med samt med resten av jordklotet genom gravitationskraften

→

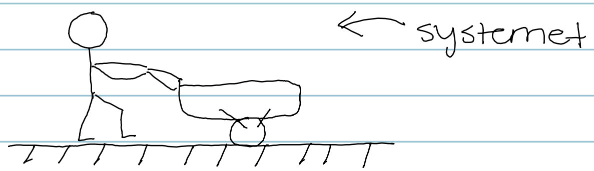
5) Om en kropp A påverkar en kropp B med en kraft $\mathbb{F}$ och ett vridmoment $\mathbb{M}$ så påverkar B A med $-\mathbb{F}$ och $-\mathbb{M}$. Detta kallas <u>Newtons tredje lag</u>

Observera att krafter och vridmoment på en kropp alltid kommer från någon annan kropp i systemet.

$\boxed{\text{Öva på fig 3/A, 3/B och 3/C}}$

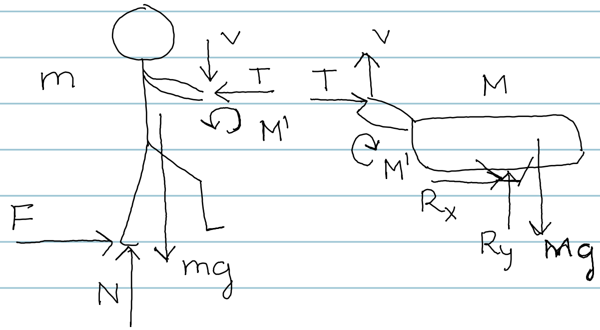


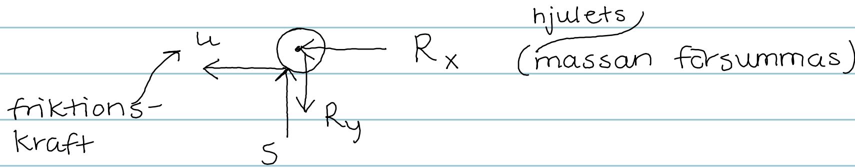
Exempel:



Vi delar upp systemet i tre delkroppar

mannen, skottkärran (utan hjul), hjulet





<u>Kommentarer:</u>

- $M' = 0$ om handleden ses som ett gångjärn
- $F = 0$ och $u = 0$ om det är väldigt halt (ingen friktion)

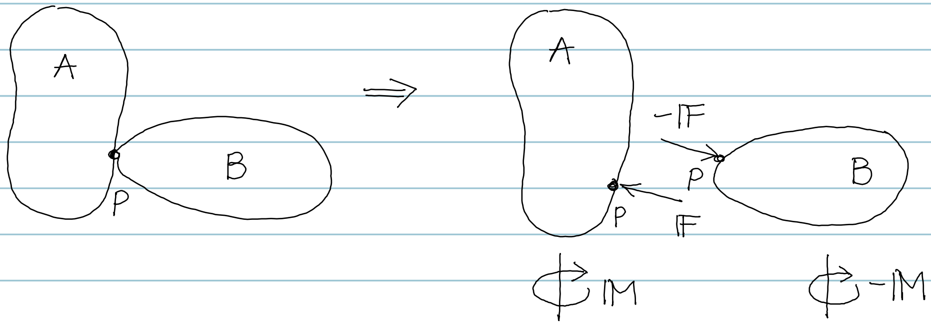
<u>Jämvikt</u> = rörelse utan acceleration
(viktigt specialfall: en statisk situation)

En kropp är i jämvikt $\iff$ kraftsumman $\mathbb{R} = 0$
vridmomentet $\mathbb{M}_O = 0$
godtycklig referenspunkt

$\Rightarrow \mathbb{M}_{O'} = 0$
en alternativ momentpunkt

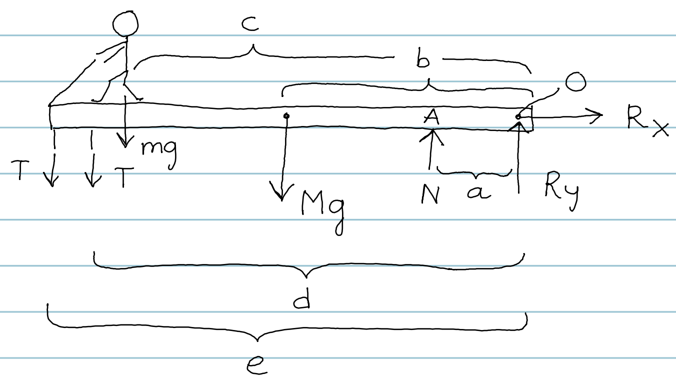
Föreläsning 18/11-13

Förra gången: $\boxed{\text{Friläggning}}$



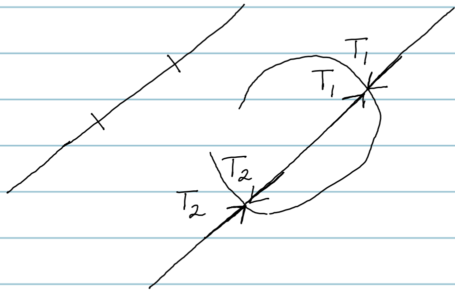
3/54 Plan: Tre obekanta ⇒ behöver 3 ekvationer
Jämvikt: x- o y-led
+ momentjämvikt

Frilägg balk med person och två repstumpar



→

<u>OBS</u> Spännkraften i en lina är densamma i alla punkter. Dela upp i mindre delar

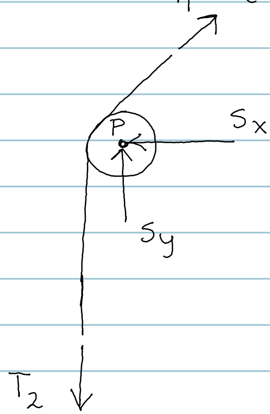


Kraftsumman på mittbiten = 0

$\Rightarrow \quad T_1 - T_2 = 0$

Vad händer vid en trissa?

(fritt vridbar)



Vridmomentet m a p axeln genom P

$\circlearrowleft \; M_P = rT_1 - rT_2 = 0$

$\Rightarrow \quad T_1 = T_2$

Ställ upp jämviktsekvationerna

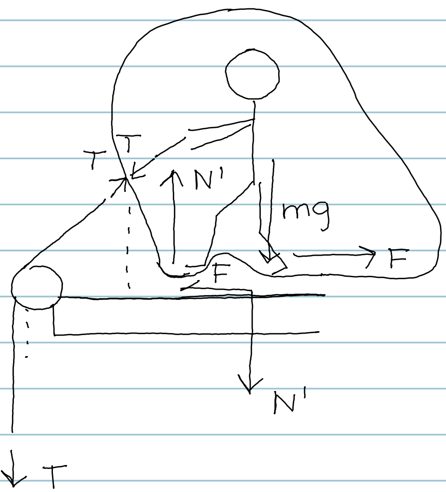
$\uparrow: \quad -T - T - mg - Mg + N + R_y = 0$

$\rightarrow: \quad R_x = 0$

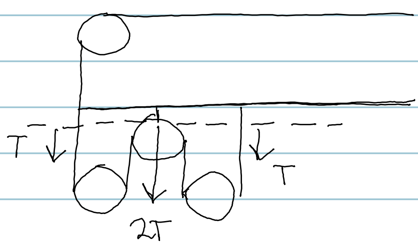
$\circlearrowleft O: \quad eT + dT + cmg + bMg - aN = 0$

Tre ekvationer, tre obekanta (R_x, R_y, N)

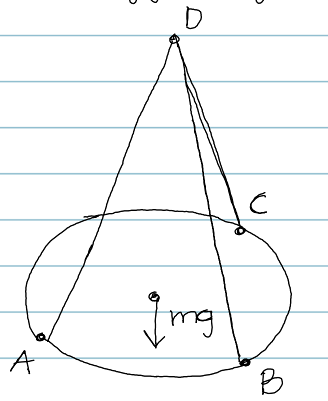
Lös! den sökta kraften är $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R_y$

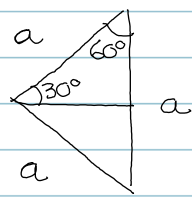


OBS I verkligheten har vi ofta fler obekanta än ekvationer, och alltså inte någon entydig lösning. I räkneuppgifterna har vi dock entydiga lösningar.



Ex ?/77 Frilägg ringen



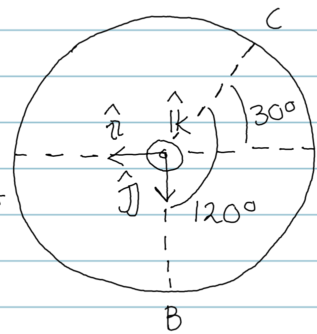


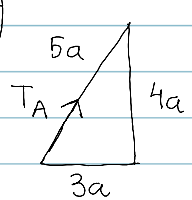
Ställ upp jämviktsekvationen

$$\mathbb{M}_D = 0$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \sqrt{3}/2$





Kraftjämvikt:

$$0 = -mg\hat{k} + T_A\left(-\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{k}\right) +$$

$$+ T_B\left(-\frac{3}{5}\hat{j} + \frac{4}{5}\hat{k}\right) +$$

$$+ T_C\left(\frac{4}{5}\hat{k} + \frac{3}{5}\left(\cos 30°\,\hat{i} + \sin 30°\,\hat{j}\right)\right)$$

$$= \hat{i}\left(-\frac{3}{5}T_A + \frac{3\sqrt{3}}{10}T_C\right)$$

$$+ \hat{j}\left(-\frac{3}{5}T_B + \frac{3}{10}T_C\right)$$

$$+ \hat{k}\left(-mg + \frac{4}{5}\left(T_A + T_B + T_C\right)\right) \longrightarrow$$

Vi får ekvationssystemet

$$\left.\begin{array}{rrrcl} -\frac{3}{5}T_A & & +\frac{3\sqrt{3}}{10}T_C & = & 0 \\ & -\frac{3}{5}T_B & +\frac{3}{10}T_C & = & 0 \\ \frac{4}{5}T_A & +\frac{4}{5}T_B & +\frac{4}{5}T. & = & mg \end{array}\right\}$$

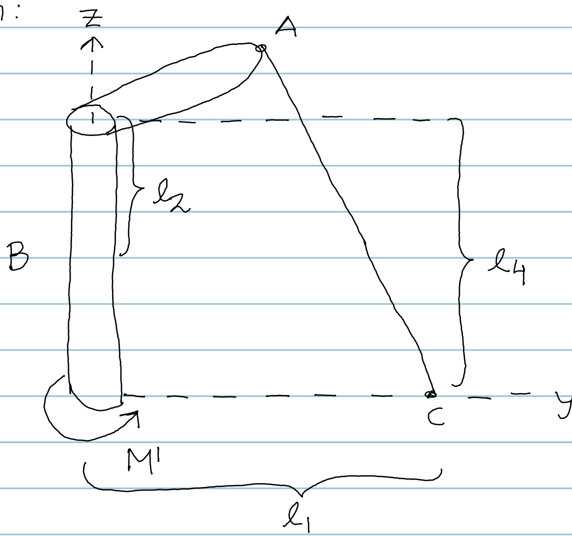
3 ekv.
3 obekanta
(T_A, T_B, T_C)

$\Rightarrow$ Lös!

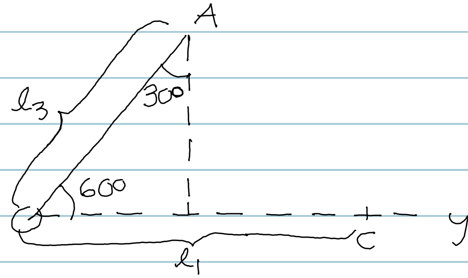
Ex 3/94 Sökt vridmomentet M, tryckkraften P, skjuvkraften V vid B

Frilägg metalldelen:

Från sidan:



Ovanifrån



Vi behöver bestämma kraften i kabeln, hur gör vi?

~~Momentjämvi~~ Momentjämvikt kring z-axeln!

Uttryck kraften $\mathbb{F}$ och dess angreppspunkt $\mathbb{r}$ i termer av vektorer då vi ska räkna ut momentet kring B

en obekant, behöver bara en ekv

$$\begin{cases} \mathbb{r} = \ell_2 \hat{\mathbb{k}} - \ell_3 \overbrace{\cos 30°}^{\sqrt{3}/2} \hat{\imath} + \ell_3 \overbrace{\sin 30°}^{1/2} \hat{\jmath} \\ \mathbb{F} = \alpha \left(\left((\ell_2 - \ell_4) \hat{\mathbb{k}} + \ell_1 \hat{\jmath} \right) - \left(\ell_2 \hat{\mathbb{k}} - \ell_3 \cos 30° + \ell_3 \sin 30° \hat{\jmath} \right) \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}_B = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \alpha \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbb{k}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \ell_3 & \frac{\ell_3}{2} & \ell_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_3 & \ell_1 - \frac{\ell_3}{2} & -\ell_4 \end{vmatrix} =$$

$(*)$

$$= \alpha \hat{\mathbb{k}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \ell_3 \left(\ell_1 - \frac{\ell_3}{2} \right) - \frac{\ell_3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_3 \right) + \ldots$$

Momentjämvikt ger

$$M' + \cancel{M_B} \cdot \underbrace{\mathbb{M}_B \cdot \hat{\mathbb{k}}}_{\text{komponenten i z-led}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\ell_1 \ell_3} M'$$

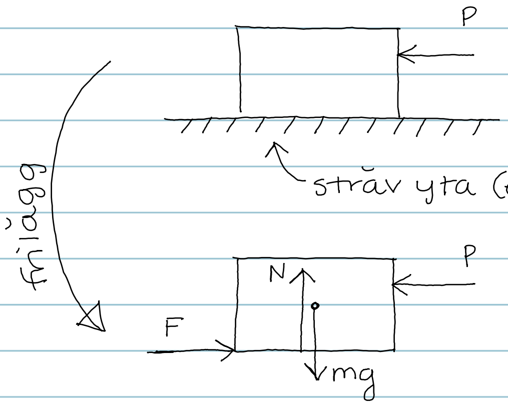
Nu får vi P som $\hat{\mathbb{k}}$-komponenten av $\mathbb{F}$

Vi får V som kraften i x-y planet

Slutligen, momentet vinkelrät mot axeln i punkten B fås från (*)

Föreläsning 22/11-13

IDAG: 6.1 - 6.3 Friktion



Vad vet vi om friktionskraften F?

Empiriskt finner vi att friktionskraften F har ett maximalt möjligt värde F_{max} då kropparna inte rör sig i förhållande till varandra

Vi inför en enkel modell (torr friktion eller Coulomb friktion)

$$F_{max} = \mu_s N$$

den statiska friktionskoefficienten (dimensionslös). Beror på materialet och utförandet av ytorna etc.

Ofta har vi att $0 < \mu < 1$ inte alltid!

I jämvikt har vi alltså $F < F_{max} = \mu_s N$

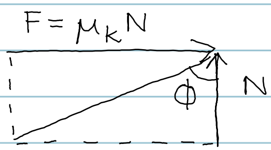
Om $P > F_{max} = \mu_s N$ kan jämvikt inte råda. Kroppar får då en accelerande rörelse. Vi beskriver friktionskraften med en förenklad modell (torr eller Coulomb friktion)

$F = \mu_k N$

den kinetiska friktionskoefficienten
Vanligtvis är $\mu_k < \mu_s$, men ibland approximerar vi $\mu_s = \mu_k = \mu$

Friktionsvinkel

I rörelse



Den resulterande kraften bildar en vinkel $\phi = \arctan \mu_k$ med normalen till kontaktytan

Olika typer av friktionsproblem

1. Vi vet att glidning sker i en viss kontaktyta
Sätt då
$$F = \mu_k N$$

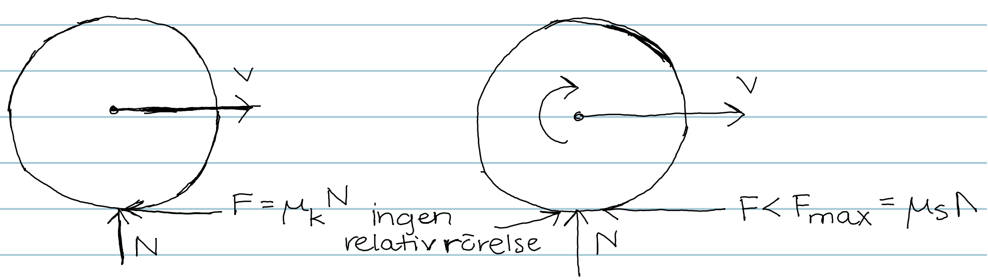
2. Vi söker villkoret för att glidning precis skall inträda
$$F = F_{max} = \mu_s N$$

3. Vi vet ej om glidning sker i en viss kontaktyta
Antag att glidning inte sker
Bestäm F från jämviksekvationerna

Om $F < F_{max} = \mu_s N$ så var antagandet korrekt.
Annars var antagandet felaktigt och vi får gå till punkt 1

OBS I

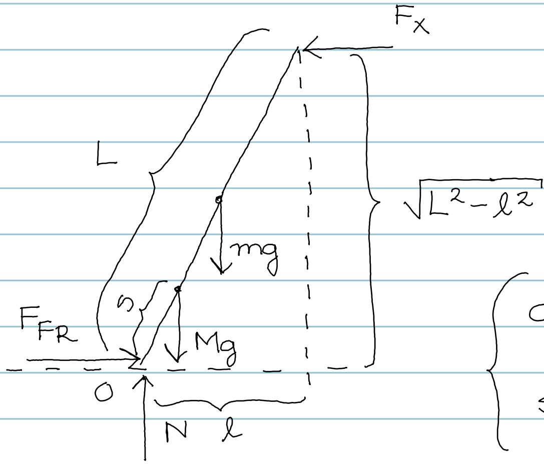
Skilj på ett hjul som glider eller rullar



OBS II I ett komplicerat problem med många kontaktytor kan man ha glidning i vissa ytor men inte i andra

Ex 6/27 Sökt: Avståndet s då stegen börjar glida

Frilägg systemet



$$\begin{cases} \cos\alpha = \ell/L \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{L^2-\ell^2}}{L} \end{cases}$$

Friktionskraft är μ_s

Plan: Hur många okända? $\{F_{FR}, N, F_x\} + s$
$\Rightarrow$ 3 st

Vi behöver använda alla tre jämviktsekvationerna + villkoret att $F_{FR} = F_{max} = \mu_s N$

Ställ upp jämviktsekv.

$\uparrow$: $N - mg - Mg = 0 \Rightarrow N = (m+M)g$

$\rightarrow$: $F_{FR} - F_x = 0 \Rightarrow F_x = F_{FR}$

$\circlearrowleft O$: $F_x L \sin\alpha - mg\frac{L}{2}\cos\alpha - Mg\,s\cos\alpha = 0 \quad (*)$

Väljer O för att två okända krafter går genom O

Villkor då stegen börjar glida

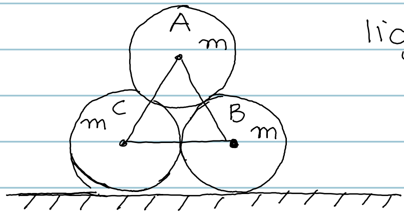
$$F_{FR} = \mu_s N = \mu_s g(m+M)$$

$$(*) \Rightarrow \quad s = \frac{L}{M}\left(\mu_s(m+M)\frac{\sqrt{L^2-\ell^2}}{\ell} - \frac{m}{2}\right)$$

OBS! kolla dimensioner

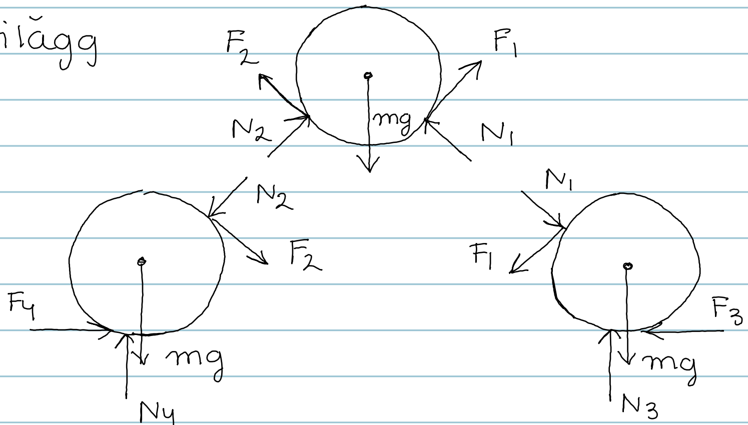
Ex 6/38

Tre likadana cylindrar ligger på varann



Vad är villkoret för att jämvikt ska råda?

Frilägg



Ställ upp jämviktsekv.

$\uparrow$: $$-mg + \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 + \frac{1}{2} F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 + \frac{1}{2} F_2$$

$\rightarrow$: $$-\frac{1}{2} N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 + \frac{1}{2} N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 = 0$$

$\curvearrowleft A$: $$rF_1 - rF_2 = 0$$

$\uparrow$: $$-mg + N_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - \frac{1}{2} F_1 = 0$$

$\rightarrow$: $\quad -F_3 + \frac{1}{2} N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 = 0$

$\circlearrowleft B$: $\quad r F_{\cancel{4}3} - r F_{\cancel{2}1} = 0$

$\uparrow$:

$\rightarrow$:

$\circlearrowleft C$:

8 obekanta $(F_1, \dots, F_4, N_1, \dots, N_4)$

9 ekv., men dessa är inte linjärt oberoende

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$$

Lös:

$$\Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{mg}{2(2+\sqrt{3})} \\ N_3 = N_4 = \dfrac{3}{2} mg \\ N_1 = N_2 = \dfrac{mg}{2} \end{cases}$$

Beräkna kvoterna $\quad (F_{max} = \mu_s N)$

$$\frac{F_1}{N_1} = \frac{F_2}{N_2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\frac{F_3}{N_3} = \frac{F_4}{N_4} = \frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$$

$\rightarrow$

$\Rightarrow$ Om $\mu < \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ sker alltså

glidning mellan cylindrarna i övre
kontaktytorna. Rullning mot underlaget

Mekanik 1 L7

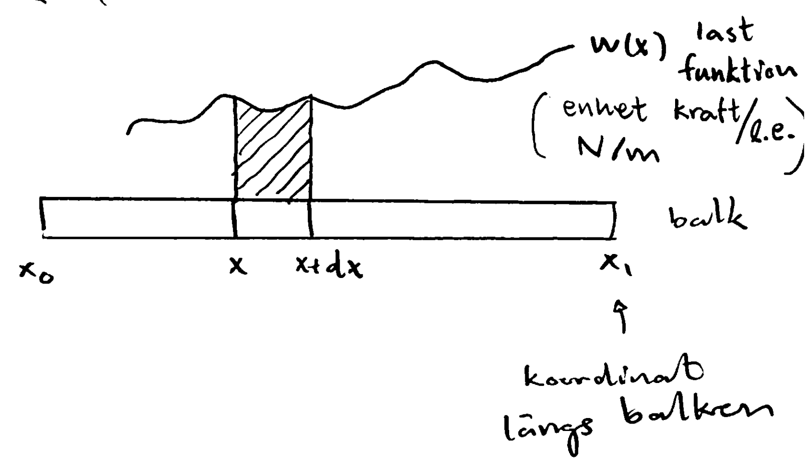
Förra gången: Friktion

Idag: 5.1 – 5.5 Kraftfördelningar

— en endimensionell kurva

<u>Exempel</u> En balk med last $w(x)\,dx$ i intervallet mellan x och $x+dx$.

$$\text{Total last} = \int_{x_0}^{x_1} w(x)\,dx$$ ← (mer om detta nästa förel.)



— en tvådimensionell yta:

Tryck i en fluid (gas eller vätska).

Tryck: p = kraft/ytenhet $\quad 1\ N/m^2 = 1\ Pa$

— en tredimensionell volym:

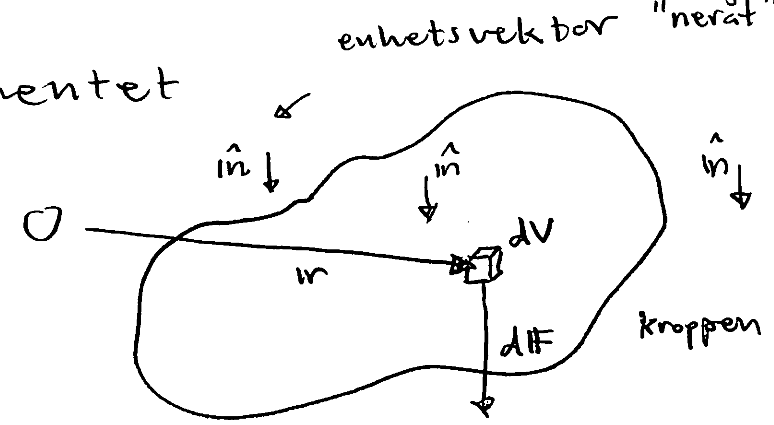
Tyngdkraft: kraft/volymsenhet $\quad N/m^3$

<u>Tyngdkraftsfördelning</u>

Vi betraktar en kropp med (variabel) densitet $\rho = \rho(\mathbf{r})$ — ortsvektor m a p O för en punkt i kroppen

Det lilla volymselementet

$$dV = \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{Cartesiska koordinater}}$$



har massan

$$dm = \rho(\mathbf{r})\, dV$$

Kroppens totala massa

$$m = \int_{\text{kroppen}} dm = \int \rho \, dV = \underbrace{\int \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}_{\text{om vi vill använda Cartesiska koord.}}$$

Tyngdkraften på det lilla volymselementet är

$$d\mathbf{F} = dm\, g\, \hat{\mathbf{n}}$$

← enhetsvektor "neråt"

tyngd-accelerationen

Totala tyngdkraften blir

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int_{\text{kroppen}} g\hat{\mathbf{n}}\, dm = g\hat{\mathbf{n}} \int_{\text{kroppen}} dm = m g \hat{\mathbf{n}}$$

totala massan

Vi beräknar tyngdkraftfördelningens vridmoment $\mathbf{M}_o$ m a p O:

$$\mathbf{M}_o = \int_{\text{kroppen}} d\mathbf{M}_o = \int_{\text{kroppen}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \int_{\text{kroppen}} \mathbf{r} \times (dm\, g\hat{\mathbf{n}}) =$$

$$= \left(g \int \mathbf{r}\, dm \right) \times \hat{\mathbf{n}}$$

Sats Detta är lika med vridmomentet för en punktkraft $\mathbb{F}$ som angriper i en punkt G (tyngdpunkten) med ortsvektor

$$\mathbb{r}_G = \frac{1}{m}\int_{\text{kroppen}} dm\,\mathbb{r}$$

Tyngdpunktens ortsvektor $\mathbb{r}_G$ är alltså ett "viktat medelvärde" av ortsvektorerna för alla masselement i kroppen.

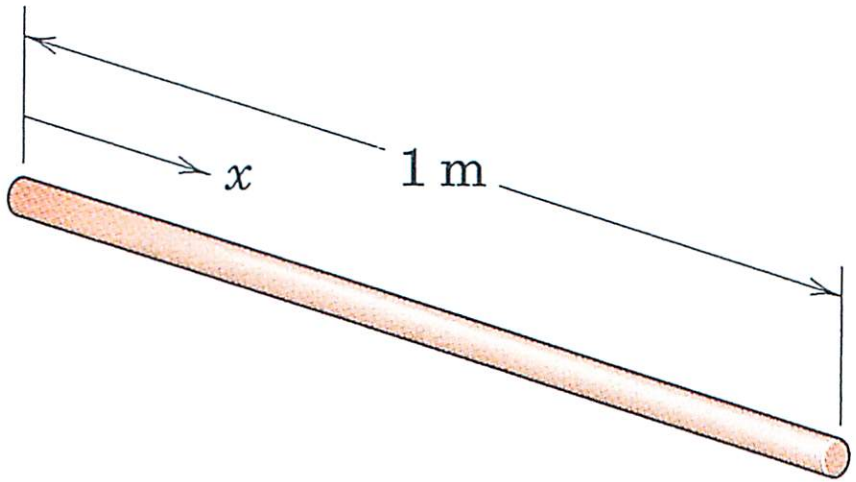
Bevis En sådan punktkraft $\mathbb{F}$ i G har vridmoment m a p O

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r}_G \times \mathbb{F} = \left(\frac{1}{\cancel{m}}\int dm\,\mathbb{r}\right) \times \cancel{m} g\,\hat{\mathbb{n}} = \left(g\int dm\,\mathbb{r}\right) \times \hat{\mathbb{n}}$$

precis som för tyngdkraftsfördelningen.

Om kroppen är stel kan vi alltså ersätta tyngdkraftsfördelningen med en punktkraft som angriper i tyngdpunkten G.

5/19 The mass per unit length of the slender rod varies with position according to $\rho = \rho_0(1 - x/2)$, where x is in meters. Determine the location of the center of mass of the rod.



Problem 5/19

Ex 5|19 Enligt texten: Avståndet = x meter ← dvs x dim lös

Bättre: Låt x ha dimension längd

så att avståndet = x.

Formeln för densiteten blir då

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{\ell} \right)$$ där $\ell = 1$ m är stavens längd.

← (behövs i formeln för r_G)

Stavens totala massa är

$$m = \int_{\text{staven}} dm = \int_0^{\ell} \rho\, dx = \int_0^{\ell} \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{\ell} \right) dx$$

$$= \rho_0 \left(\ell - \frac{1}{4} \ell \right) = \rho_0 \frac{3}{4} \ell$$

Tyngdpunktens läge är

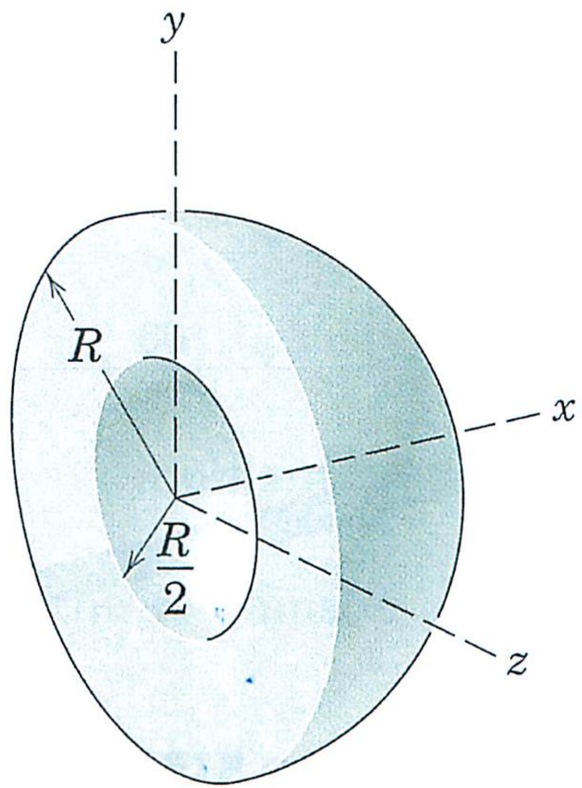
$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_{\text{staven}} x\, dm = \frac{1}{m} \int_0^{\ell} x \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{\ell} \right) dx$$

Vanlig beteckning för tyngdpunkt

$$= \frac{\rho_0}{m} \left(\frac{1}{2} \ell^2 - \frac{1}{6} \ell^2 \right) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{m} \ell^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\cancel{\rho_0}\, \ell^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho_0} \frac{3}{4} \cancel{\ell}} = \frac{4}{9} \ell = \underline{\underline{\frac{4}{9} \text{ meter}}}$$

5/62 Determine the x-coordinate of the mass center of the homogeneous hemisphere with the smaller hemispherical portion removed.



Problem 5/62

Ex 5/62 (5/46 8ed) OBS: Tyngdpunkten har $\bar{y} = \bar{z} = 0$ av symmetriskäl.

Enligt allmänna resonemanget är

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{\text{kroppen}} x\,dm = \frac{1}{M-\mu}\left(\int_{\text{stor halvsfär}} x\,dm - \int_{\text{liten halvsfär}} x\,dm\right)$$

m: kroppens massa

M: massa för halvsfär med radie R

μ: massa för halvsfär med radie $R/2$

Beteckna kroppens densitet med ρ = konstant (homogen kropp)

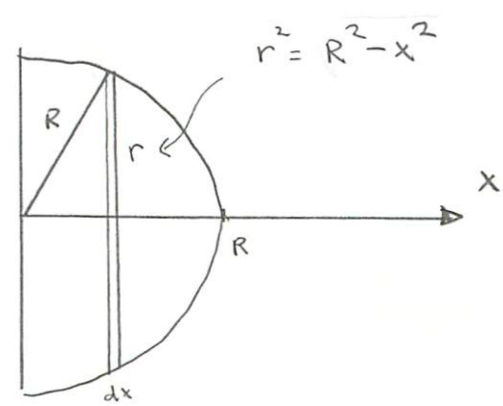
Då har vi

$$M = \rho\int_{\text{stor halvsfär}} dV = \rho\,\frac{1}{2}\,\frac{4\pi R^3}{3} = \rho\,\frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\mu \underset{\text{genväg!}}{=} \rho\,\frac{2\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \rho\,\frac{2\pi R^3}{3}\,\frac{1}{8}$$

$$\int_{\text{stor halvsfär}} x\,dm = \rho\int_{\text{stor halvsfär}} x\,dV = \rho\int_0^R x\pi(R^2-x^2)\,dx$$

$$= \rho\pi R^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \rho\frac{\pi R^4}{4}$$



På samma sätt fås

$$\int x\,dm = \frac{\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^4}{4} = \frac{\rho\pi R^4}{4}\cdot\frac{1}{16}$$

liten
halvsfär

Vi får alltså

$$\bar{x} = \frac{1}{\rho\frac{2\pi R^3}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)}\cdot\frac{\rho\pi R^4}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right) = R\,\frac{3}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{7}\cdot\frac{15}{16} = R\,\frac{45}{112}$$

tyngdpunktens
x-koordinat

Föreläsning 2/12-13

Förra gången: Kraftfördelningar

Idag: 5.6 – 5.8 Balkar

BALKAR

Vi betraktar en belastad balk

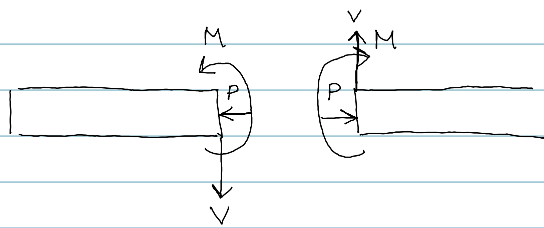
(vertikala) kraften per längdenhet

koordinat längs balken

Dessutom påverkas balken av krafter och vridmoment från infästningen.

Gör ett tänkt snitt i balken vid koordinaten x

Hur påverkar de olika delarna varandra?



Benämningar: Tryckkraft (dragkraft om $p<0$)

Skjuvkraft V (vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis i tavlans plan)

Böjmoment M (vrider kring en axel vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis vinkelrät mot tavlan)

Torsionsmoment T (vrider kring en axel längs balken)

Storheterna P, V, M och T är i allmänhet funktioner av läget x längs balken

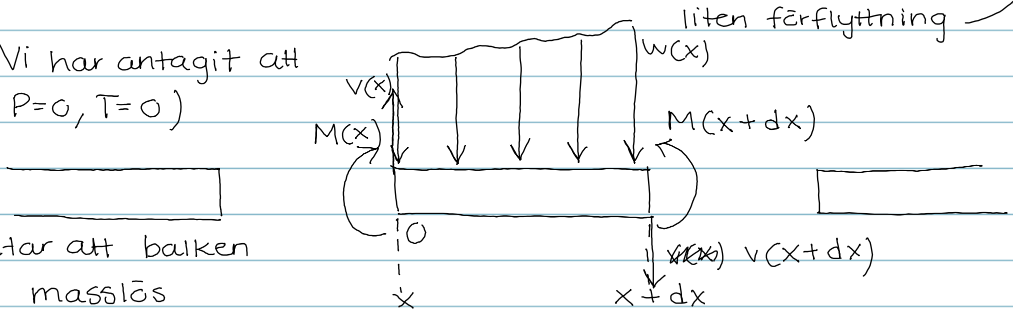
$$V = V(x), \quad M = M(x), \ldots$$

Vi vill finna differentialekvationer, som, tillsammans med randvärden, bestämmer dessa

Vi gör två tänkta snitt i balken vid x och $x+dx$

liten förflyttning

(Vi har antagit att $P=0$, $T=0$)



Antar att balken är masslös

Ställ upp jämviktsekvationerna för den lilla biten balk:

$\uparrow$: $$V(x) - V(x+dx) - w(x)dx = 0$$

$\curvearrowleft O$: $$-V(x+dx)dx + M(x+dx) - M(x) - \underbrace{\tfrac{1}{2}dx}_{\text{hävarm}}\ \underbrace{w(x)\,dx}_{\text{kraft}} = 0$$

Använd Taylors formel

$$\begin{cases} V(x+dx) = V(x) + V'(x)\,dx + \cancel{\tfrac{1}{2}V''(x)(dx)^2} + \dots \\ M(x+dx) = M(x) + M'(x)\,dx + \cancel{\tfrac{1}{2}M''(x)(dx)^2} + \dots \end{cases}$$

Insättning i jämviktsekvationenerna:

$$\begin{cases} \cancel{V(x)} - \cancel{V(x)} - V'(x)\,dx - w(x)\,dx = 0 \\ -dx\,V(x) + \cancel{M(x)} + M'(x)\,dx - \cancel{M(x)} = 0 \end{cases}$$

dividera med dx

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) & (1) \\ M'(x) = V(x) & (2) \end{cases}$$

Om vi vill kan vi kombinera (1) och (2) till

$$M''(x) = -w(x)$$

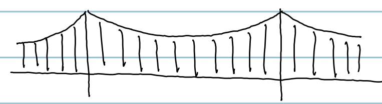
Om $w(x)$ är en känd funktion så bestämmer (1) funktionen $V(x)$ om vi även känner t.ex. $V(x_0)$

en viss punkt

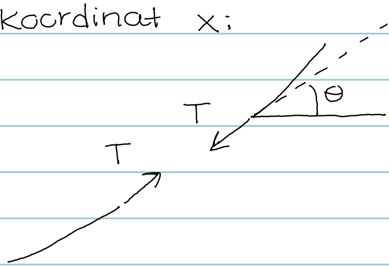
På samma sätt bestämmer (2) tillsammans med $M(x_0)$ funktionen $M(x)$

KABLAR (ej på tentan)

Tänk på Älvsborgsbron

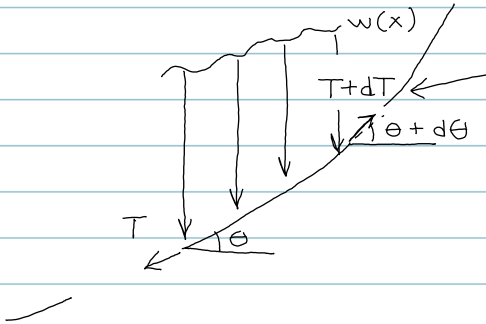


Gör ett snitt i kabeln vid en koordinat x:



Hur varierar T och θ med läget längs kabeln?

Gör två snitt och frilägg delen i mitten



ökning i spännkraft

w(x) vertikal last

Ställ upp jämviktsekv:

$\uparrow: \quad (T + dT)\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta - w(x)dx = 0$

$\rightarrow: \quad (T + dT)\cos(\theta + d\theta) - T\cos\theta = 0$

Taylorutveckling

$$\begin{cases} \sin(\theta + d\theta) = \sin\theta + \cos\theta \, d\theta + O(d\theta^2) \\ \cos(\theta + d\theta) = \cos\theta - \sin\theta \, d\theta + O(d\theta^2) \end{cases}$$

Sätt in i ekvationen och försumma högre ordningens termer:

$$\begin{cases} \cancel{T\sin\theta} + T\cos\theta \, d\theta + dT\sin\theta - \cancel{T\sin\theta} - w(x)dx = \\ \qquad = 0 \\ T\cos\theta - T\sin\theta \, d\theta - T\cos\theta + dT\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\sin\theta = w \\ -T\sin\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

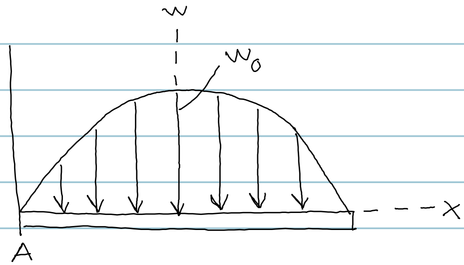
Se som ett linjärt ekv. system. med obekanta

$$\frac{dT}{dx} \quad \text{och} \quad \frac{d\theta}{dx}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$T'(x) \qquad \theta'(x)$$

Ex 5/153



Lasten ges av funktionen

$$w(x) = w_0\left(1 - \left(\frac{2}{\ell}\right)^2 x^2\right)$$

avståndet från ~~A~~ mitten av balken

$V(x)$ och $M(x)$ ska uppfylla diff. ekv.

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) \\ M'(x) = +V(x) \end{cases}$$

Men vi behöver även randvärden
Var ska vi välja att lägga våra randvärden?
Svar: vid $x = \ell/2$ (längst till höger)

$$\begin{cases} V(\ell/2) = 0 \\ M(\ell/2) = 0 \end{cases}$$

Frilägg sista delen av balken

Lös

$$V'(x) = -w(x) = w_0\left(-1 + \frac{4}{\ell^2}x^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad V(x) = w_0\left(-x + \frac{4}{3\ell^2}x^3 + \text{konstant}\right)$$

$$\underset{V\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0}{=} \quad w_0\left(-x + \frac{4x^3}{3\ell^2} + \frac{\ell}{3}\right)$$

$$M'(x) = V(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3} - x + \frac{4x^3}{3\ell^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad M(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2} + \text{konstant}\right)$$

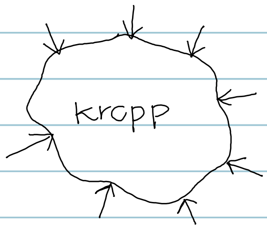
$$\underset{M\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0}{=} \quad w_0\left(\frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2} - \frac{\ell^2}{16}\right)$$

Föreläsning 6/12-13

Idag: 5.9. Fluidstatik

definieras som en inkompressibel fluid

En fluid (vätska eller en gas) i jämvikt kan bara utöva en normalkraft (inte någon skjuvkraft) på en annan kropp i en statisk situation



Normalkraft / ytenhet

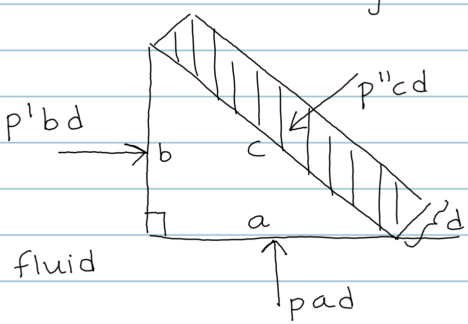
kallas för tryck

Enhet: N/m^2 = Pa (Pascal)

Teorem (Pascals lag)

Trycket i en fluid beror på läget, inte på kontaktytans orientering

BEVIS Frilägg ett litet prisma nedsänkt i den omgivande fluiden



tjockleken på prismat

djup d vinkelrät mot tavlan

→

Antag att eventuellt är p, p', p'' olika

Ställ upp jämviktsekvationerna:

$\uparrow$: $pad - p''cd \dfrac{a}{c} = 0$

den vertikala projektionen

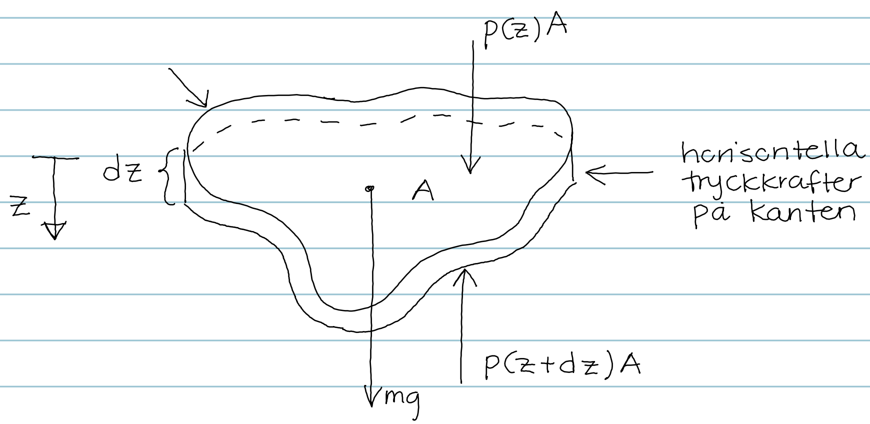
så att $p = p''$

På samma sätt inser vi att trycket $p = p(\mathbf{r})$ bara beror av läget $\mathbf{r}$

QED

Hur beror trycket av läget $\mathbf{r}$?

Frilägg en tunn horisontell skiva fluid med area A och tjocklek dz i vertikalled mellan koordinaterna z och $z+dz$



Skivans massa $m = \rho(z) A\, dz$

fluidens densitet

Ställ upp jämviktsekv. i vertikalled

$$\uparrow: \quad \underbrace{p(z+dz)}_{= p(z) + p'(z)dz + \ldots} A - p(z)A - mg = 0$$

så att $\quad p'(z)\, dz\, A = \rho(z)\, A\, dz\, g$

$$\Longrightarrow \boxed{p'(z) = \rho(z)\, g}$$

I allmänhet finns det för en fluid ett visst samband mellan tryck och densitet ρ i en punkt

Ex. Allmänna gaslagen $\quad p = \frac{nR}{V} T$

partiklar/volym

$p \sim \rho$

Viktigt exempel i denna kurs:

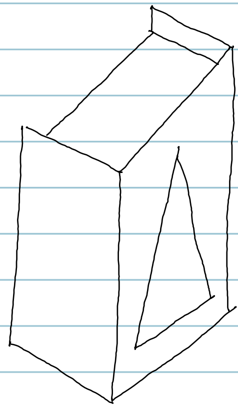
En inkompressibel fluid (en vätska) har ρ = konstant oberoende av p

Lösningen till $p'(z) = \rho(z)\, g$ blir då

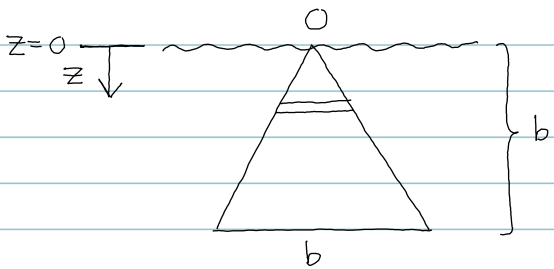
$$p(z) = \rho g z + p_0$$

trycket vid $z = 0$

Ex. 5/205



Vi bestämmer den totala tryckkraften genom att integrera tryckkraftsfördelningen över fönstret



En strimla på djupet z har bredden

$$b \cdot \frac{z}{b} = z \quad \text{(horisontellt)}$$

linjär funktion av z,
ska vara noll för $z=0$
och lika med b för $z=b$

Kraften blir $R = \int_{\text{fönstret}} p\,dA = \int_0^b \Big(\underbrace{dz\, z}_{=dA}\; p(z)\Big) =$ →

det yttre lufttrycket

$$= \int_0^b z(\rho g z + p_0)\, dz$$

Men om vi är intresserade av tryckskillnaden mellan de två sidorna av glaset så kan vi sätta $p_0 = 0$

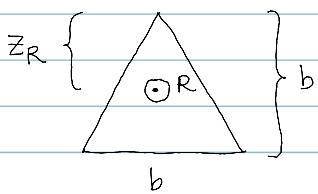
$$\Longrightarrow \quad R = \frac{\rho g b^3}{3}$$

Bestäm det djup z_R där en punktkraft R ska angripa för att vara stelkroppsekvivalent med tryckkraftsfördelningen

Kraftfördelningens vridmoment m.a.p O är

$$M_0 = \int_0^b dz\, z \rho g z \cdot z = \frac{1}{4} \rho g b^4$$

hävarmen



Detta ska vara lika med punktkraftens vridmoment m.a.p. O som är

$$M_0 = z_R R = z_R \frac{\rho g b^3}{3}$$

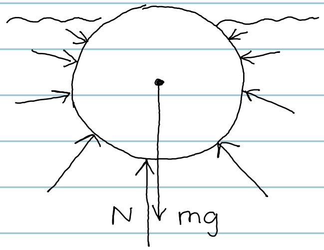
$$\Longrightarrow \quad \boxed{z_R = \frac{3}{4} b}$$

5/201

Arkimedes princip

Frilägg klotet när det ligger på botten

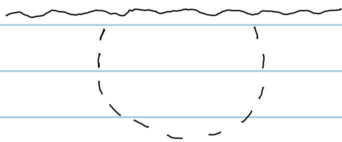
(bortser från lufttrycket)



Det är lite besvärligt att integrera tryckkraften över sfären (olika riktningar i olika punkter)

Fantastiskt knep!

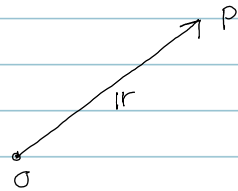
Tänk bort sfären och ersätt delvis med mera fluid så att nivån behålls



Föreläsning 21/01-14

Kinematik (= rörelsegeometri)
Beskrivning av en kropps rörelse utan att blanda in de krafter som är verksamma

Vi beskriver läget P för en partikel genom att ge dess ortsvektor $\mathbf{r}$ m.a.p en fix referenspunkt O



I allmänhet är $\mathbf{r}$ tids-beroende.
Vi definierar hastighets-vektorn

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$$

och accelerationsvektorn

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}$$

OBS:

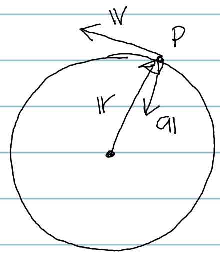
$r = |\mathbf{r}|$ = avståndet till O
$v = |\mathbf{v}|$ = farten (hastighetens storlek)
$a = |\mathbf{a}|$ (accelerationens storlek

OBS:

$$v = |\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}r = \dot{r}$$

$$a = |\mathbf{a}| = |\dot{\mathbf{v}}| = \left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}v = \dot{v}$$

exempel



Rörelse på en cirkelbana med konstant fart och radie r:

$$r = |\mathbf{r}| = \text{konstant s.a. } \dot{r} = 0$$

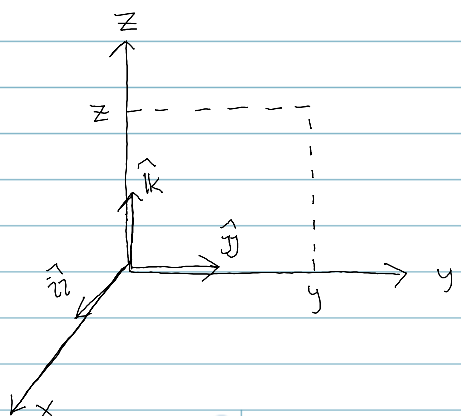
$$\text{men } v = |\mathbf{v}| = \text{konstant} \neq 0$$

Vidare är $\dot{v} = 0$ men $\mathbf{a} \neq 0$ (riktad mot O) och därmed är $a = |\mathbf{a}| \neq 0$ Alltså $a \neq \dot{v}$

Läs själva om rörelse i en dimension

I flera dimensioner inför vi basvektorer $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ och $\hat{\mathbf{k}}$ längs koordinataxlarna så att

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{skriv ej } \mathbf{r} = (x, y, z))$$



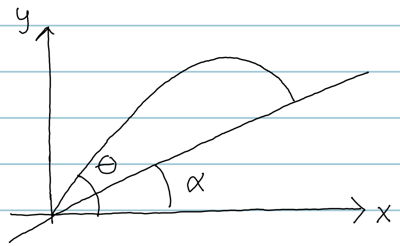
Vi har då att

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

(ty $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ konstanta)

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Ex 2/95



Givet utgångsfarten v_0, hur ska θ väljas så att skottvidden blir maximal

Partikeln har en likformigt accelererad rörelse med

$$\mathbf{a} = \underbrace{-g\,\hat{\mathbf{j}}}_{\text{konstant } 9.8\ m/s^2}$$

Hastigheten är

$$\mathbf{v} = -gt\,\hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\mathbf{v}_0}_{\text{hastigheten då } t=0} = -gt\,\hat{\mathbf{j}} + v_0(\underbrace{\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}}_{\text{enhetsvektor i utgångsriktningen}})$$

Ortsvektorn blir $(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{r} = -g\frac{t^2}{2}\hat{\mathbf{j}} + v_0(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})t + \underbrace{\mathbf{r}_0}_{\text{läge i } t=}$$

$$\mathbf{r} = \underbrace{v_0\cos\theta\, t\,\hat{\mathbf{i}}}_{x\text{-koordinat}} + \underbrace{\left(v_0\sin\theta\, t - \frac{gt^2}{2}\right)}_{y\text{-koordinat}}\hat{\mathbf{j}}$$

Vid nedslaget gäller: $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{v_0\sin\theta\, t - gt^2/2}{v_0\cos\theta\, t}$

så att $t = \dfrac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$

Då är alltså x-koordinaten

$$x_1 = v_0\cos\theta\,\frac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$$

Vi vill välja θ så att x_1 blir så stor som möjligt

→

$$\frac{dx_1}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\left[-\sin\theta(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta) + \cos\theta(\cos\theta + \tan\alpha\sin\theta)\right] = \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos 2\theta + \tan\alpha\sin 2\theta\right] =$$

$= 0$ vid maximum

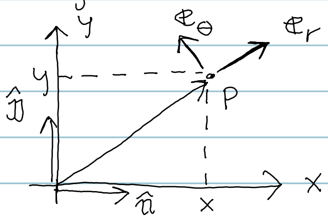
$$\Rightarrow \tan 2\theta = -\cot\alpha \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}$$

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cot\beta\right]$$

Kontroll: $\alpha = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4$

Polära koordinater

I två dimensioner kan vi bestämma läget för en punkt P med Cartesiska koordinater (x, y) eller polära koordinater (r, θ) relaterade enligt figuren



Vi inför även motsvarande basvektorer $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ resp. $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$

Pekar sig alltså i riktningen

- $\mathbf{e}_r$ om r ökar medan θ hålls fixt
- $\mathbf{e}_\theta$ om θ ökar medan r hålls fixt

$\longrightarrow$

Vi har

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1 \qquad \text{enhetsvektorer}$$
$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \qquad \text{ortogonala}$$

En godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna $\hat{\imath}$ o $\hat{\jmath}$
Tillämpa detta på $\mathbf{e}_r$ o $\mathbf{e}_\theta$

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

eller omvänt

$$\hat{\imath} = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\hat{\jmath} = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$$

I allmänhet rör sig punkten P, alltså är r och θ tidsberoende. Detta gäller även basvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$

konstanta

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dfrac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\right) = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right) = \\ \quad = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \dfrac{d}{dt}\left(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right) = \dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}\right) = \\ \quad = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r \end{cases}$$

Föreläsning 22/01-14

Vi uttrycker nu vektorerna $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta) = \ddot r\mathbf{e}_r + \underbrace{\dot r\dot{\mathbf{e}}_r}_{=\dot\theta\mathbf{e}_\theta} + \dot r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{e}_\theta + r\dot\theta\underbrace{\dot{\mathbf{e}}_\theta}_{=-\dot\theta\mathbf{e}_r}$$

$$= \ddot r\mathbf{e}_r + \dot r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + \dot r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{e}_\theta - r\dot\theta^2\mathbf{e}_r$$

$$= (\ddot r - r\dot\theta^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\mathbf{e}_\theta$$

Sammanfattning:

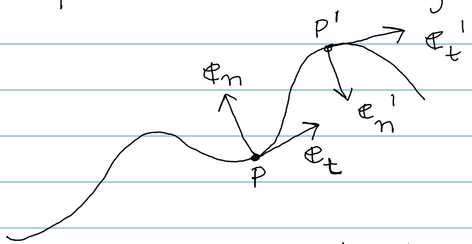
$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta \quad : \quad v_r = \dot r, \quad v_\theta = r\dot\theta$$

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta \quad : \quad a_r = \ddot r - r\dot\theta^2, \quad a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$$

Tangential och normalkoordinater

En partikel som rör sig längs en kurva i planet:



Vi inför koordinater

$\mathbf{e}_t$ i hastighetens riktning

$\mathbf{e}_n$ vinkelrät mot banan riktad mot krökningscentrum

→

Observera att $\mathbb{e}_n$ byter riktning i banans inflektionspunkter
Vi uttrycker $\mathbb{v}$ och $\mathbb{a}$ i basen $\mathbb{e}_t$ och $\mathbb{e}_n$:

$$\mathbb{v} = v\,\mathbb{e}_t$$

$$\mathbb{a} = \frac{d}{dt}\mathbb{v} = \frac{d}{dt}(v\,\mathbb{e}_t) = \dot{v}\,\mathbb{e}_t + v\,\dot{\mathbb{e}}_t$$

$$= \frac{v^2}{\rho}\mathbb{e}_n + \dot{v}\,\mathbb{e}_t$$

Se boken

banans krökningsradie

Sammanfattning:

$$\mathbb{v} = v\,\mathbb{e}_t$$
$$\mathbb{a} = a_n\mathbb{e}_n + a_t\mathbb{e}_t \quad \text{med} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \dot{v}$$

Ex 2/130

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t - 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$$

Bestäm koordinaterna för krökningscentrum C
vid tiden $t = 1$

Plan: Läs av ρ från a_n, dvs acc. i
tangential och normalkoord.

Partikelns ortsvektor, hastighet o acceleration är:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (2t^2 + 3t - 1)\hat{\imath} + (5t - 2)\hat{\jmath} \\ \mathbf{v} = (4t + 3)\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} \\ \mathbf{a} = 4\hat{\imath} \end{cases}$$

Då $t = 1$
$$\begin{cases} \mathbf{v} = 7\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} \\ \mathbf{a} = 4\hat{\imath} \end{cases}$$

För att bestämma krökningsradien ρ
använder vi tang. och normalkoord.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t = \frac{7}{\sqrt{74}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{74}}\hat{\jmath} \\ \mathbf{e}_n = \frac{5}{\sqrt{74}}\hat{\imath} - \frac{7}{\sqrt{74}}\hat{\jmath} \end{cases}$$

← enhetsvektor i hastighetens riktning

← enhetsvektor $\perp$ $\mathbf{e}_t$ och riktad mot krökningscentrum

⟶

Använd $\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n + \dot{v} \mathbf{e}_t$

varav följer:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \text{så att}$$

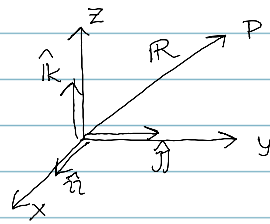
$$\rho = \frac{v^2}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n} = \frac{74}{4 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}} = \frac{74\sqrt{74}}{4 \cdot 5}$$

Kinematik i 3 dimensioner

Välj koordinatsystem beroende på problemet

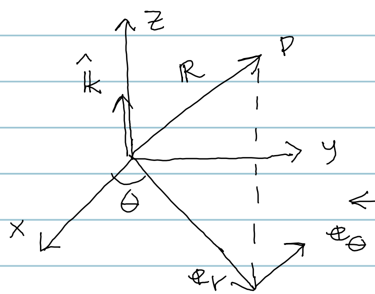
Cartesiska koordinater (x, y, z)

$$\begin{cases} \mathbf{R} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \\ \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} \\ \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \end{cases}$$



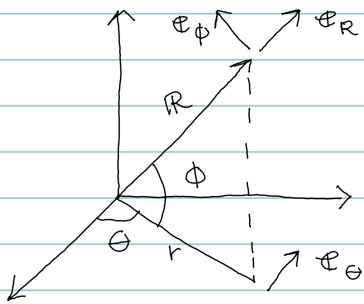
Cylindriska koordinater (r, θ, z)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\hat{k} = r\mathbf{e}_r + z\hat{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\hat{k}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\hat{k}$$



← i xy-planet

Sfäriska koordinater (R, θ, ϕ)
(enligt M & K)
Vanligare (r, θ, ϕ)



Vi uttrycker $\mathbf{R}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ och $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}}$ i dessa basvektorer

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= R\,\mathbf{e}_R \\ \mathbf{v} &= \dot{R}\,\mathbf{e}_R + R\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{\theta}\overbrace{R\cos\phi}^{r}\,\mathbf{e}_\theta \end{aligned}\right\} \text{utantill!}$$

$$\mathbf{a} = a_R\,\mathbf{e}_R + a_\phi\,\mathbf{e}_\phi + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta$$

Se uttryck i boken 5.81

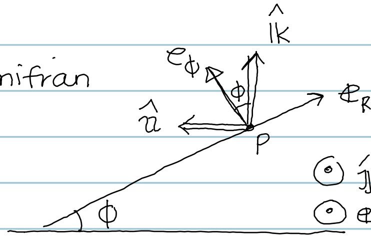
Ex 2/172 Bestäm $\dot{R}$, $\dot{\theta}$ och $\dot{\phi}$ i punkten B för flygplanet som har den givna rörelsen.

Strategi: Uttryck flygplanets hastighet i Cartesiska basvektorer $\hat{i}$, $\hat{j}$ o $\hat{k}$. Byt sedan bas och uttryck detta v i de sfäriska basvektorerna e_r, e_θ o e_ϕ. Jämför med uttrycket för v i sfäriska koordinater och bestäm $\dot{R}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$

Vi har $v = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{k}\right)$

Basbytet är:

Framifrån



$$\begin{cases} \hat{i} = +\sin\phi\, e_\phi - \cos\phi\, e_R \\ \hat{j} = e_\theta \\ \hat{k} = +\cos\phi\, e_\phi + \sin\phi\, e_R \end{cases}$$

så att $v = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}} e_\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos\phi\, e_\phi + \sin\phi\, e_R)\right)$

$$\dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi$$

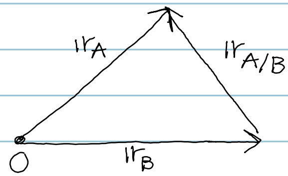
$$R\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\phi\, v \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi \\ \cancel{\theta}\,\dot{\phi} = \frac{v}{\sqrt{5}R}\cos\phi \\ \dot{\theta} = \frac{2v}{\sqrt{5}R\cos\phi} \end{cases}$$

$$\dot{\theta} R\cos\phi = v\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Föreläsning 28/01-14

Relativ rörelse

Vi har två partiklar A och B med ortsvektorer $\mathbf{r}_A$ o $\mathbf{r}_B$ m.a.p en fix punkt O



Deras (absoluta) hastigheter är

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$$

Deras accelerationer $\begin{cases} \mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$

Vi inför A's ortsvektor relativt B $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$

" hastighet " $\mathbf{v}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_B$

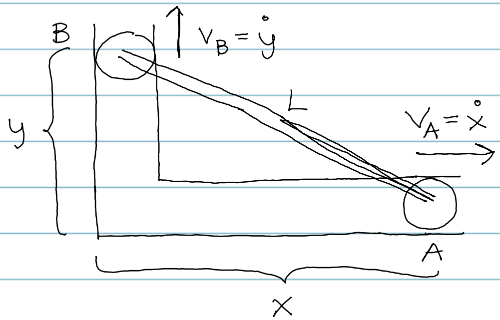
" acceleration " $\mathbf{a}_{A/B} = \ldots$

Tvång (constraint)

Ibland är rörelserna för två partiklar A och B relaterade genom ett tvångsvillkor

Ex. A och B kan röra sig i horisontella resp. vertikala spår och är förenade med en stång med fix längd L.

$\longrightarrow$



Enligt Pythagoras sats

$$x^2 + y^2 = L^2$$

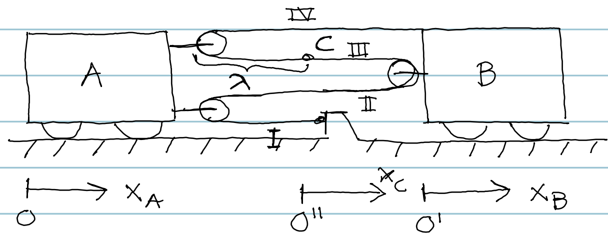
Ta derivatan

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

så att

$$\boxed{v_A = -\frac{y}{x} v_B}$$

Ex



O, O', O'' fixa

Absoluta hastigheter och accelerationer för A, B & C

$v_A = \dot{x}_A$ $\qquad$ $v_B = \dot{x}_B$ $\qquad$ $v_C = \dot{x}_C$

$a_A = \ddot{x}_A$ $\qquad$ $a_B = \ddot{x}_B$ $\qquad$ $a_C = \ddot{x}_C$

Tvångsvillkor:

Linans konstanta längd = konstant $- \overbrace{x_A}^{\mathrm{I}} +$

$$+ \overbrace{(x_B - x_A)}^{\mathrm{II}} + \overbrace{(x_B - x_A)}^{\mathrm{III}} + \overbrace{(x_B - x_A)}^{\mathrm{IV}} =$$

$$= 3x_B - 4x_A + \text{konstant}$$

Konstant längd av andra delen av linan:

$$= \underbrace{(x_C - x_A)}_{\lambda} + \underbrace{(x_B - x_A)}_{\mathrm{IV}} + \text{konstant} =$$

$$= x_B - 2x_A + x_C + \text{konstant}$$

Tag tidsderivator:

$$\begin{cases} 0 = 3v_B - 4v_A \\ 0 = v_B - 2v_A + v_C \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{3}{4} v_B \\ v_C = 2v_A - v_B = \frac{1}{2} v_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{B/A} = v_B - v_A = \frac{1}{4} v_B$$

$$\begin{cases} 0 = 3a_B - 4a_A \\ 0 = a_B - 2a_A + a_C \end{cases} \Rightarrow a_{B/A} = a_B - a_A = \frac{1}{4} a_B$$

Kap 3 Kraft och acceleration

En kropp med massan m växelverkar med andra kroppar och utsätts för en resulterande kraft $\mathbb{F}$ (tidsberoende) Den rör sig med accelerationen $\mathbb{a}$.

Då gäller Newtons andra lag

$$\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$$

Hur löser man dynamiktal?

1) Dela upp problemet i lämpliga delkroppar
2) Frilägg delkropparna separat

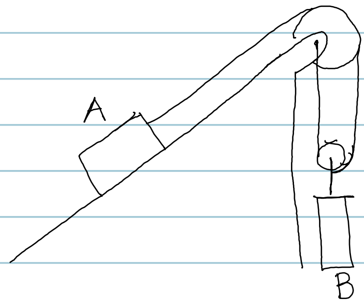
som i statiken

3) Ställ upp Newton II för varje delkropp separat
4) Ställ upp eventuella tvångsvillkor och friktionsvillkor (kinetisk friktion)

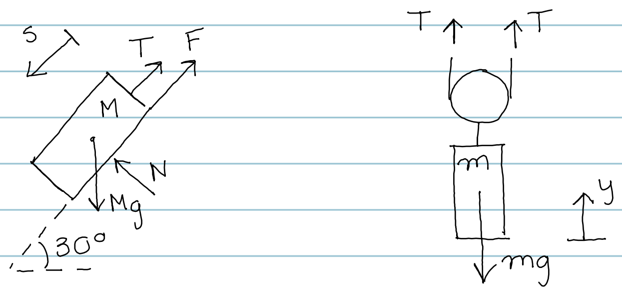
Ger ett antal ekvationer

5) Lös ut de efterfrågade storheterna

Ex 3/29



Frilägg A och B separat



Ställ upp Newton II för A:

$\nearrow$: $T + F - \frac{1}{2}Mg = M(-\ddot{s})$

$\nwarrow$: $N - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg = 0$

för B: $\uparrow$: $2T - mg = m\ddot{y}$

Tvångsvillkor: $s - 2y = \text{konstant}$ (Linans längd = $= s - 2y + \text{konst.}$)

$\Rightarrow \boxed{\ddot{s} = 2\ddot{y}}$

$\longrightarrow$

Antag att jämvikt råder $\Rightarrow$ $\ddot{s} = \ddot{y} = 0$

3 ekv, 3 obekanta (T, N, F) Lös!

Kontrollera: om $\frac{F}{N} < \mu_s$

Med givna data är detta inte fallet

Antagandet var alltså felaktigt

Kropparna rör sig

Antag att $\ddot{s} > 0$

Friktionsvillkor: $F = \mu_k N$

5 ekvationer, 5 obekanta $(\ddot{s}, \ddot{y}, T, F, N)$

Lös!

$$\begin{cases} N = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg \\ F = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_k Mg \end{cases} \qquad \begin{cases} T + F - \frac{1}{2} Mg = -2M\ddot{y} \\ 2T - mg = m\ddot{y} \end{cases}$$

eliminera $\ddot{y}$ $\Rightarrow$ $m(T + F - \frac{1}{2} Mg) + 2M(2T - mg) = 0$

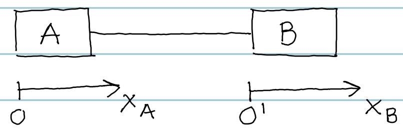
$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mMg}{(4M+m)} \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_k \right)}$$

Glöm inte att kontrollera att $\ddot{s} > 0$!

I annat fall går rörelsen åt andra hållet

Föreläsning 29/01-14

Tvång



Linans längd $= x_B - x_A + (\text{konstant})_1$

Tvång Linans längd $= (\text{konstant})_2$

$$x_B - x_A = (\text{konstant})_2 - (\text{konstant})_1 = (\text{konstant})_3$$

Från förra föreläsningen:

Ex. 3/29 forts.

Antag $\ddot{s} > 0$

Hur gör vi om $\ddot{s} < 0$?

A) Börja om från början

B) $F = -\mu_k N$ Rätt svar!

C) Ingen ändring

Glöm inte att kontrollera att $\ddot{s} > 0$

I annat fall går rörelsen åt andra hållet

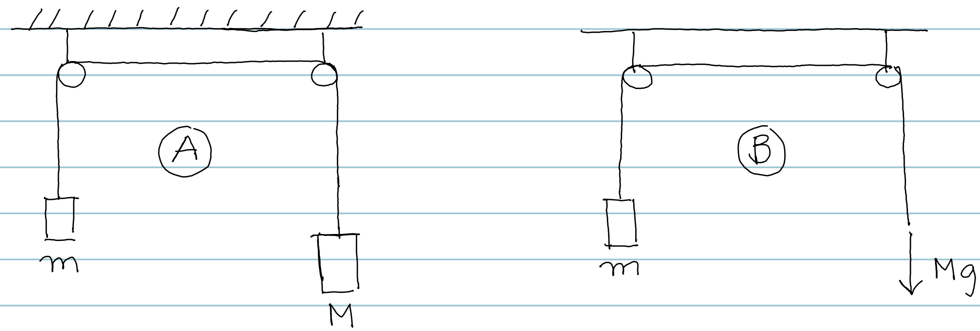
$\Rightarrow$ Använd då friktionsvillkoret

$$F = -\mu_k N$$

Kontrollera också att spännkraften

$T > 0$

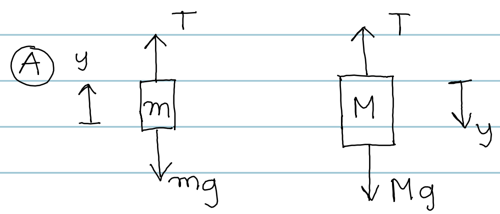
Ett experiment

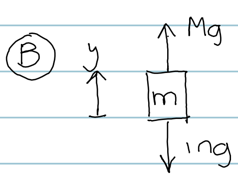


Båda systemen startar i vila. Vilket system accelererar snabbast?

A) A snabbast
B) B snabbast
C) lika fort

Frilägg





Newton II:

$\uparrow: \quad T - mg = m\ddot{y}$

$\uparrow: \quad T - Mg = M(-\ddot{y})$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{M-m}{M+m} g}$ långsammare

$\uparrow: \quad (M-m)g = m\ddot{y}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{(M-m)}{m} g}$ snabbare $\Rightarrow$ B rätt

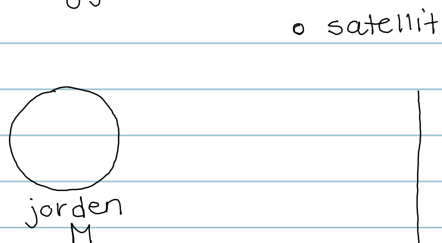
Kroklinjig rörelse

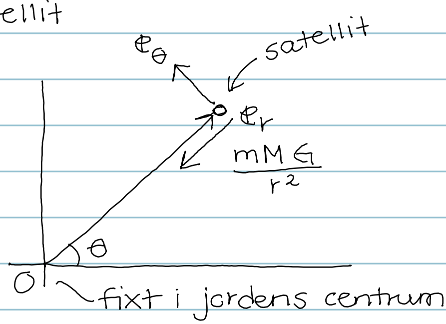
Repetition : $\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$

Denna vektorekvation kan analyseras i olika koordinatsystem (Cartesiska, polära, cylindriska, sfäriska, ...)

Ex Bestäm höjden h (i kilometer) ovanför jordytan där en satellit i en cirkulär bana har samma period, 23.9344 h, som jordens absoluta rotation

Frilägg satelliten





Ställ upp Newton II för satelliten

$$-\frac{mMG}{r^2}\,\mathbb{e}_r = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbb{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbb{e}_\theta \right)$$

$\longrightarrow$

Vi får alltså ekvationerna

$$\begin{cases} -\dfrac{mMG}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

Vi inskränker oss till en cirkulär bana

$\Rightarrow$ $r = r_0 =$ konstant

Då förenklas ekvationerna till:

$$-\frac{\cancel{m}MG}{r_0^2} = -\cancel{m}r_0\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{MG}{r_0^3}}$$

$$0 = mr_0\ddot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{konstant} = \omega$$ vinkel-hastighet

Fart $v = r\omega$

Omloppstid $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{MG}}$

$$\Rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 MG}$$

Sätt in siffror

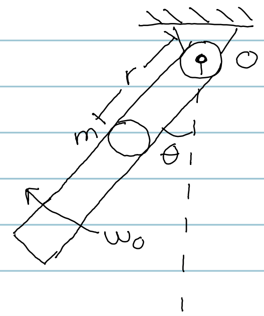
$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg

$G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

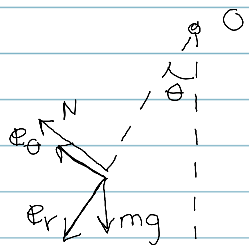
$T = 23{,}9344$ h

$$\boxed{\Rightarrow r_0 = 42164 \text{ km}}$$

3/342



Frilägg partikeln i röret



Ställ upp Newton II

$$N\mathbf{e}_\theta + mg(-\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{e}_r) = m((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r +$$

$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta)$$

dvs.
$$\begin{cases} N - mg\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{cases}$$

Vi vet att $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} N - mg\sin\theta = 2m\dot{r}\omega_0 \\ g\cos\theta = \ddot{r} - r\omega_0^2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Lös diff. ekv. $(\theta = \omega_0 t)$

$\ddot{r} - r\omega_0^2 = g\cos\omega_0 t$ (start vid $t=0$)

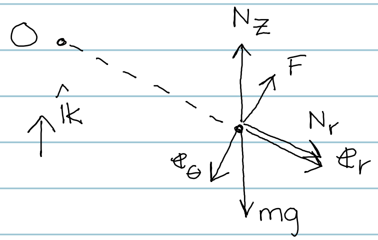
Den allmänna lösningen är

$$r = \underbrace{A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}}_{\text{godtyckliga konstanter}} - \frac{g}{2\omega_0^2}\cos\omega_0 t$$

Randvärden $r=0$ vid $t=0$
$\dot{r}=0$ vid $t=0$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{g}{2\omega_0^2}(\cosh\omega_0 t - \cos\omega_0 t)$$

3/95 Frilägg lilla ringen



Ställ upp Newton II: (cylindriska koordinater)

$$N_r e_r - F e_\theta + (N_z - mg)\hat{k} =$$

$$= m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) e_\theta + \ddot{z}\hat{k}\right)$$

Tvång: $r = \text{konstant}$
$z = \text{konstant}$

Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} N_r = -mr\dot{\theta}^2 \\ -F = mr\ddot{\theta} \\ N_z - mg = 0 \end{cases}$$

Vi har kinetisk friktion

$$F = \mu_k N = \mu_k \sqrt{N_r^2 + N_z^2}$$

Vi får alltså $\ddot{\theta} = \ldots = -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\dot{\theta}^4}$

Med $\dot{\theta} = \omega$ har vi

$$\dot{\omega} = -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}$$

Den sökta båglängden är

$$s = r\theta = r\int_{\text{start}}^{\text{slut}} d\theta = r\int \omega\, dt$$

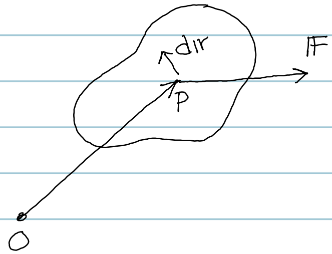
$$= r\int \omega \frac{d\omega}{\dot{\omega}} = -\frac{r^2}{\mu_k}\int \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}} =$$

$$= \dots = -\frac{r}{2\mu_k} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 r^2 + v_0^4}}{gr}$$

Föreläsning 4/02-14

Arbete och kinetisk energi

En materiell kropp påverkas av en kraft $\mathbb{F}$



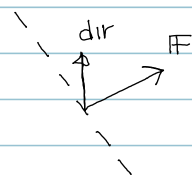
Om angreppspunkten P's ortsvektor ändras med $d\mathbf{r}$ så säger vi att kraften uträttar ett infinitesimalt arbete

$$dU = \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{på kroppen}$$

OBS: $dU > 0$ Om $d\mathbf{r}$ har en komponent i $\mathbb{F}$'s riktning

$dU < 0$ Om $d\mathbf{r}$ har en komponent i $-\mathbb{F}$'s riktning

$dU = 0$ om $d\mathbf{r}$ är vinkelrät mot $\mathbb{F}$



Under ett helt förlopp säger vi att en (tidsberoende och/eller rumsberoende) kraft $\mathbb{F}$ uträttar ett arbete

$$U = \int dU = \int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} \overset{\text{cartesiska koord.}}{=} \int_{\gamma} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) =$$

γ ← kurva

$$= \int_{s_0}^{s_1} ds \left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right)$$

γ ges av funktioner $x(s), y(s), z(s)$, $s_0 \le s \le s_1$

→

på kroppen då angreppspunkten P flyttas längs en kurva γ i rummet

Vi säger att en materiell kropp med massa m och hastighet $\mathbb{v}$ har den kinetiska energin

$$K = \frac{1}{2} m \mathbb{v} \cdot \mathbb{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Vi beräknar tidsderivatan av den kinetiska energin

$$\frac{d}{dt} K = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbb{v} \cdot \mathbb{v} \right) = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{d}{dt} \mathbb{v} \right) \cdot \mathbb{v} + \right.$$

$$\left. + \mathbb{v} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbb{v} \right) \right) = \underbrace{m \mathbb{a}}_{= \mathbb{F}} \cdot \mathbb{v} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{v}$$

där $\mathbb{F}$ är den totala yttre kraften som verkar på kroppen

Vi multiplicerar med dt

Kroppens infinitesimala förflyttning

$$\Longrightarrow \quad dK = \mathbb{F} \cdot \underbrace{\mathbb{v}\, dt}_{= d\mathbb{r}} = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \underline{\underline{dU}}$$

Alltså: Ändring av kroppens kinetiska energi = uträttat arbete på kroppen av yttre krafter

Under ett förlopp från tillstånd 0 till tillstånd 1
har vi

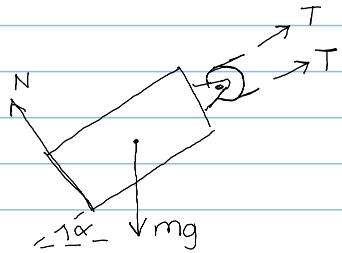
$$\underbrace{K_1 - K_0}_{\substack{\text{ändring av} \\ \text{kinetisk} \\ \text{energi}}} = \Delta K = \int_{\text{förloppet}} dK = \int dU = \int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

Storleken $\mathbb{F} \cdot \mathbb{v} = P$ kallas för tillförd <u>effekt</u> (power)
($Nm/s = J/s = W$ Watt)

Effekt = Ändring av energi / tidsenhet

$$\text{Verkningsgrad} = \frac{\text{"Nyttig" energi}}{\text{Tillförd energi}}$$

3/127 Frilägg vagnen



Endast T och mg uträttar ett arbete
($N \perp$ mot dir)

<u>Sökt:</u> Hastighet då vagnen når B

Utfört arbete på vagnen $= 2T\Delta x - mg\sin\alpha\,\Delta x$

Ursprunglig kinetisk energi $= \frac{1}{2}mv_A^2$

$\Rightarrow$ (Kinetisk energi efter förflyttning

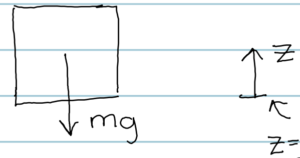
$\Delta x) = \frac{1}{2}mv_A^2 + \Delta x(2T - mg\sin\alpha) = \frac{1}{2}mv_{A+\Delta x}^2$

OBS Endast v_A^2 kommer in, dvs
riktningen påverkar inte svaret

$$\Rightarrow \boxed{v_B^2 = v_{BA}^2 + \frac{2}{m}\underbrace{(x_B - x_A)}_{\Delta x}(2T - mg\sin\alpha)}$$

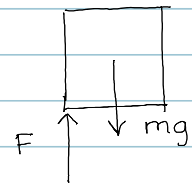
3/135 Frilägg cylindern

under fritt fall



z=0 då vikten träffar plattan

under den senare fasen



Av tyngdkraften utfört arbete (under hela förloppet)

OBS tecken   d = 100 mm

$$\underline{U_{tyngd}} = \int_d^{-\delta} (-mg)\,dz = \underline{mg(d+\delta)}$$

$$\left[-mgz\right]_d^{-\delta}$$

Av fjädern uträttat arbete (under den senare fasen)

a = 50 mm

Kraften = 0 då z = a (ospänd fjäder)

$$U_{fjäder} = \int_0^{-\delta} F(z)\,dz = \int_0^{-\delta} k(-z+a)$$

Kraften minskar med ökande z

$$= \left[k\left(-\frac{z^2}{2} + az\right)\right]_0^{-\delta}$$

$$= k\left(-\frac{\delta^2}{2} - a\delta\right) < 0$$

Kinetisk energi är noll vid både start och slut

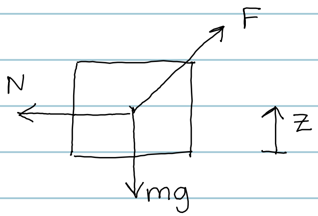
→

Vi får alltså

$$0 = U_{tyngd} + U_{fjäder} = mg(d+\delta) - k\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + a\delta\right)$$

varur δ bestäms (använd den positiva lösningen)

3/132 Frilägg ringen i en godtycklig position längs banan



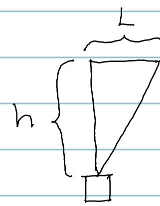
Endast tyngdkraften mg och dragkraften F uträttar arbete på systemet (N är $\perp$ mot förflyttningen)

Av tyngdkraften uträttat arbete

$$U_{tyngd} = \int_\gamma (-mg\,\hat{k})\cdot(dz\,\hat{k}) = -mg(\underset{\text{slut}}{z_B} - \underset{\text{start}}{z_A}) < 0$$

Av dragkraften uträttat arbete

$$U_{drag} \overset{(!)}{=} \underset{\text{indragna snörlängden}}{F_s} = F\left(\sqrt{h^2+b^2} - b\right) > 0$$



$\longrightarrow$

Av fjädern uträttat arbete

$$U_{\text{fjäder}} = \int_0^{\delta} (-kz\hat{k}) \cdot (dz\,\hat{k}) = \ldots = -\frac{k\delta^2}{2} < 0$$

z=0 då fjädern är spänd

$$0 = U_{\text{tyngd}} + U_{\text{fjäder}} + U_{\text{drag}}$$

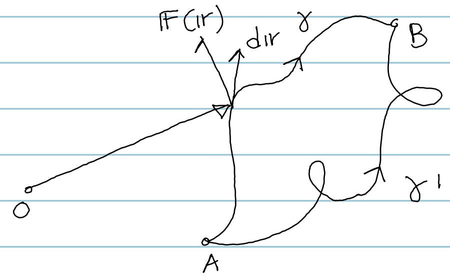
$\Rightarrow$ Lös ut k!

Föreläsning 11/02-14

POTENTIELL ENERGI

Ett kraftfält, dvs en lägesberoende kraft $\mathbb{F}(\mathbb{r})$, uträttar vid förflyttning av angreppspunkt längs en kurva γ från A till B ett arbete

$$U_\gamma = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



I allmänhet beror U_γ på kurvan γ

Men för vissa speciella kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ beror arbetet bara på start- och slutpunkterna A och B

$$U_\gamma = U_{\gamma'}$$

Sådana kraftfält kallas för konservativa eller exokta. De flesta kraftfält är inte konservativa, men lyckligtvis är många intressanta kraftfält det

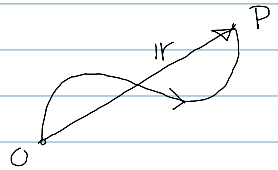
Om $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ är ett konservativt kraftfält så kan vi införa en skalär funktion $U(\mathbb{r})$ som kallas för kraftfältets potentiella energi

Det skall gälla att

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\nabla U(\mathbb{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbb{r})$$

→

Vi tar nämligen $U(\mathbf{r}) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'$



[Integral längs godtycklig kurva från referenspunkt O till punkt P med ortsvektor $\mathbf{r}$]

Byte av referenspunkt lägger bara till en konstant till $U(\mathbf{r})$ som alltså bara är väldefinierad upp till en additiv konstant

—— exempel ——

Konservativa kraftfält med tillhörande potentialer

1) det homogena tyngdkraftfältet $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{k}}$

Potential $U(\mathbf{r}) = -\int_\gamma (-mg\hat{\mathbf{k}}) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{\mathbf{k}})$

$= mg\int_\gamma dz = mg(z_P - z_0) = mgz + k$

[γ = kurva från O till punkten P med ortsvektor $\mathbf{r}$]

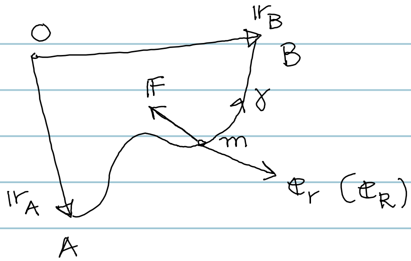
z_P: z-koordinaten för $\mathbf{r}$

2) Det inhomogena tyngdkraftfältet

$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^2}\mathbf{e}_r$

Arbete vid förflyttning från $\mathbf{r}_A$ till $\mathbf{r}_B$ längs kurva γ

→



$$U_\gamma = \int_\gamma \mathbb{F}(\mathbb{r}) \cdot d\mathbb{r} = -mMG \int_\gamma \frac{1}{r^2} \mathbb{e}_r \cdot (dr\, \mathbb{e}_r + r d\theta\, \mathbb{e}_\theta)$$

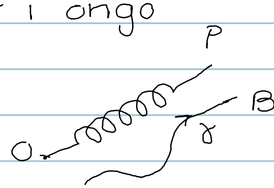
$$= -mMG \int_\gamma \frac{1}{r^2} dr = -mMG \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$= mMG \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Potentiell energi $U(\mathbb{r}) = -\frac{mMG}{r} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Väljs oftast till noll}}}{\text{konstant}}$

3) En linjär fjäder med fjäderkonstant k och ospänd längd l_0 fast i origo

Kraft på föremål i P



$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -k \underbrace{(r - l_0)}_{\text{fjäderns förlängning eller förkortning}} \mathbb{e}_r$$

Beräkna arbetet:

$$U_\gamma = -k \int_\gamma (r - l_0)\, dr = -\frac{k}{2}\left((r_B - l_0)^2 - (r_A - l_0)^2\right)$$

Potentiell energi $U(\mathbb{r}) = +\frac{k}{2}(r - l_0)^2 + \text{konstant}$

En partikel med massa m påverkas <u>enbart</u> av ett konservativt kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ med potentiell energi $U(\mathbb{r})$. Vid förflyttning längs kurva γ från A till B gäller att:

$$\left[K = \frac{1}{2} m v^2 \right]$$

$$\underbrace{K_B - K_A}_{\text{Ändring i kinetisk energi}} = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -U_B + U_A$$

sambandet mellan arbete & kinetisk energi

konservativt kraftfält

Alltså gäller att $K_B + U_B = K_A + U_A$,

dvs

$$E_B = E_A$$

"<u>Energiprincipen</u>"

där $E = K + U$ = kroppens totala mekaniska energi

<u>Mer allmänt</u> En kropp påverkas dels av ett konservativt kraftfält U och dels av övriga krafter $\mathbb{F}_{övr}$ (godtyckliga) Då har vi

$$\underbrace{\int \mathbb{F}_{övr} \cdot d\mathbb{r}}_{\text{av } \mathbb{F}_{övr} \text{ uträttat arbete}} = E_B - E_A = \text{ändring i kroppens totala mekaniska energi}$$

där $E = K + U$

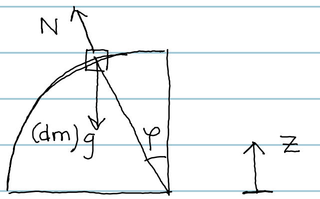
potentialen för konservativa krafter

kinetisk

— exempel —

3/172

Frilägg en liten del av kedjan



Utnyttja att tyngdkraftfältet är <u>konservativt</u>

$$\Longrightarrow \underset{\text{start}}{E_A} = K_A + U_A = \underset{\text{slut}}{E_B} = K_B + U_B \qquad (*)$$

I startögonblicket har vi $K_A = 0$

Beräkna

$$U_A = \int_{\text{kedja}} (dm) g z = \left[\begin{array}{l} z = r\cos\varphi \\ dm = \frac{r\,d\varphi}{\pi r/2} m \end{array} \right] =$$

potentialen noll för $\varphi = \pi/2$

$$= \int_0^{\pi/2} g r \cos\varphi \frac{r\,d\varphi\, m}{\pi r/2} = \frac{2mgr}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi} mgr \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} mgr$$

I slutögonblicket har vi att

kedjans massa

$$U_B = \left(\frac{-\pi r/2}{2} \right) mg = -\frac{\pi}{4} rmg$$

halva kedjans längd

(*) ger nu att

$$K_B = K_A + U_A - U_B = mgr\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right)$$

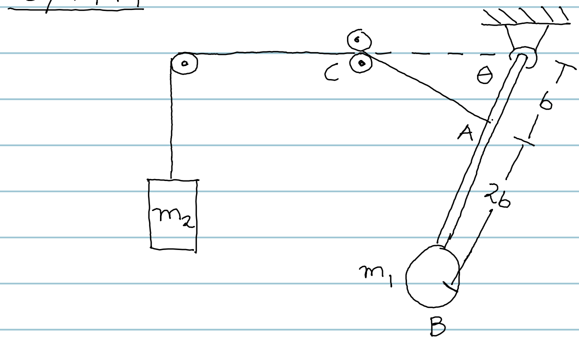
→

$$K_B = \frac{1}{2} m v^2$$

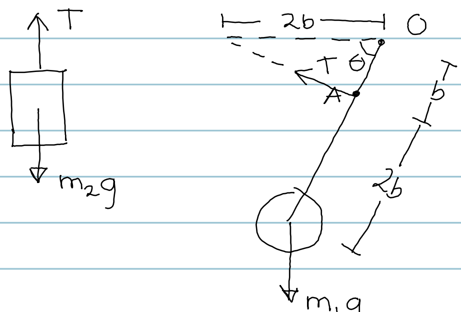
$$\Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{gr\left(\frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Föreläsning 12/02-14

3/171 1



Dela upp i delkroppar och frilägg



Endast konservativa krafter är inblandade (tyngdkraftfältet)

$\Rightarrow$ Använd energiprincipen : $E_{start} = E_{slut}$

I startögonblicket har vi $(\theta = \frac{\pi}{2})$

startar i vila

$$E_{start} = \cancel{K_{start_1}} + U_{start_1} + \cancel{K_{start_2}} + U_{start_2} = 0$$

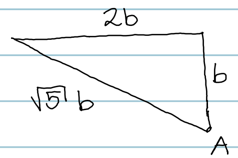
definierade upp till en konstant

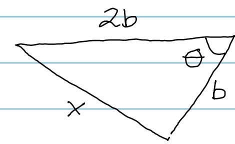
$\longrightarrow$

I slutögonblicket, dvs $\theta = \pi/3$, har vi

1) $v_2 = +(v_A$ i linans riktning$)$ $\leftarrow$ Ger en relation mellan K_{slut_1} och K_{slut_2}

2) Hur lång sträcka har linan "dragits in"?

Start: 

Godtycklig θ: 

Sökt sida x blir (enl. cosinussatsen)

$$x^2 = (2b)^2 + \cancel{2}b^2 - 2\cdot 2b\cdot b\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \quad x = 2b\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}$$

Vi kan nu skriva ner de potentiella energierna

$$U_{slut_1} = (3b - 3b\sin\theta)m_1 g$$

$$U_{slut_2} = -\left(\sqrt{5}\,b - 2b\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\right)m_2 g$$

Farten för massa 1 ges av

$$v_{slut_1} = 3b\dot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad K_{slut_1} = \frac{1}{2}m_1\, 9b^2\dot{\theta}^2$$

Farten för massa 2 ges av

$$v_{slut_2} = |\dot{x}| = b\sin\theta\,\dot{\theta}\Big/\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad K_{slut_2} = \frac{1}{2}m_2\, b^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}\Big/\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

$\longrightarrow$

$$E_{start} = 0 = E_{slut} = K_{slut_1} + U_{slut_1} + K_{slut_2} + U_{slut_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{m_2 g(\sqrt{5}-\sqrt{3}) - m_1 g(1-\sqrt{3}/2)}{b\left(\frac{9}{2}m_1 + \frac{m_2}{2}\right)}$$

Välj den negativa roten

Rörelsemängd och stötförlopp

En partikel med massa m har hastighet $\mathbb{v}$
Den har då rörelsemängden ((linear) momentum)

$$\mathbb{G} = m\mathbb{v} \qquad \text{(vanligare beteckning } \mathbb{P}\text{)}$$

Antag att partikeln påverkas av en resulterande kraft $\mathbb{F}$. Eftersom massan m är konstant kan Newton II skrivas

$$\mathbb{F} = \dot{\mathbb{G}} \qquad \left(= \frac{d}{dt}\mathbb{G} = \frac{d}{dt}m\mathbb{v} = m\frac{d}{dt}\mathbb{v} = m\mathbb{a}\right)$$

Detta gäller i varje ögonblick
Integrera map tiden t under ett förlopp
från $t = t_0$ till $t = t_1$:

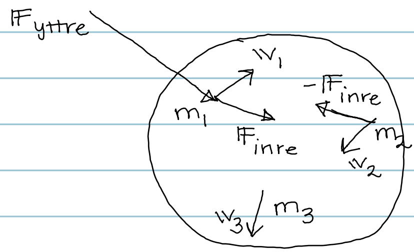
$$I = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbb{G}}\,dt = \Big[\mathbb{G} + \text{konstant}\Big]_{t_0}^{t_1} =$$

Av kraften $\mathbb{F}$ tillförd impuls

$$= \mathbb{G}(t_1) - \mathbb{G}(t_0) = \Delta\mathbb{G}$$

Ändring i partikelns rörelsemängd under förloppet

Betrakta nu ett system bestående av flera partiklar



Partiklarna påverkas av:

inre krafter (beroende på växelverkan med andra partiklar i systemet)

yttre krafter (beroende på växelverkan med kroppar utanför systemet)

Partiklarnas rörelsemängder $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$ ändras därför med tiden

Betrakta nu systemets totala rörelsemängd

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2 + \mathbb{G}_3 + \ldots$$

Dess tidsutveckling uppfyller

$$\mathring{\mathbb{G}} = \mathring{\mathbb{G}}_1 + \mathring{\mathbb{G}}_2 + \mathring{\mathbb{G}}_3 = \left(\mathbb{F}_1^{inre} + \mathbb{F}_1^{yttre}\right) +$$

$$+ \left(\mathbb{F}_2^{inre} + \mathbb{F}_2^{yttre}\right) + \left(\mathbb{F}_3^{inre} + \mathbb{F}_3^{yttre}\right)$$

Newton III

$$= \mathbb{F}_1^{yttre} + \mathbb{F}_2^{yttre} + \mathbb{F}_3^{yttre} + \ldots$$

= totala kraften som verkar på systemet

Viktigt specialfall: För ett isolerat system som inte påverkas av några yttre krafter gäller alltså att den totala rörelsemängden

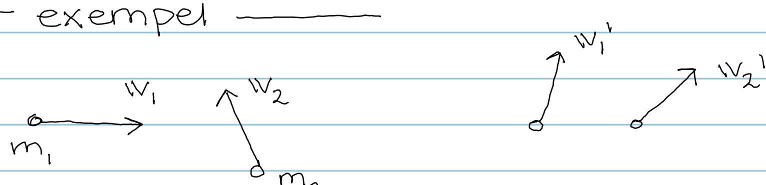
$\mathbb{G}$ = konstant under ett förlopp

Tillämpning på stötförlopp

Vid en kollision som varar under ett kort tidsintervall kan yttre krafter (t.ex. tyngdkraften, friktion, ..) försummas eftersom de tillför en obetydlig impuls. Systemet av kolliderande partiklar kan då approximeras med ett isolerat system och har bevarad rörelsemängd under förloppet

Observera att den mekaniska energin i allmänhet inte är bevarad ; en del kommer att förloras till värme

— exempel —



Före stöten   efter stöten

Då gäller alltså att

$$\underbrace{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}_{\text{totala rörelse-mängden före stöten}} = \underbrace{m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'}_{\text{efter stöten}}$$

men $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \neq \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

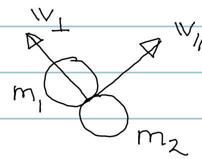
Kinetisk energi behöver INTE bevaras

Vi inför relativa hastigheter före och efter stöten

$$\begin{cases} w_{rel} = w_1 - w_2 \\ w'_{rel} = w_1' - w_2' \end{cases}$$

Dela upp dessa i komponenter ⊥ och // mot/med kontaktytan i stöt-ögonblicket

$$\begin{cases} w_{rel} = w_\perp + w_\parallel \\ w_{rel} = w_\perp' + w_\parallel' \end{cases}$$



En enkel modell för stötförloppet säger att

$$\begin{cases} w_\parallel' = w_\parallel \\ w_\perp' = -e\, w_\perp \end{cases}$$

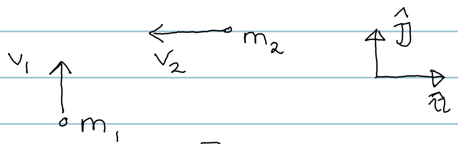
Vi har $0 \leq e \leq 1$

e: stötkoefficient (coefficient of restitution) (beror t.ex på material och utförande av kropparna)

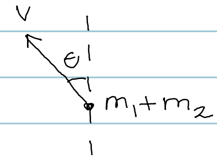
$e = 0$: fullständigt plastisk stöt. Maximal minskning av kinetisk energi

$e = 1$: fullständigt elastisk stöt. Kinetisk energi bevarad

3/203 | Under det kortvariga stötförloppet (0,1s) kan systemet bestående av A och B betraktas som isolerat och har alltså bevarad rörelsemängd



Före



Efter

$G_{före} = m_1 v_1 \hat{j} + m_2 v_2 (-\hat{i})$ $\quad$ $G_{efter} = (m_1 + m_2)(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$

$$\Rightarrow \theta = \arctan \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1},$$

$$((m_1 + m_2)v)^2 = (m_1 v_1)^2 + m_2 v_2)^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}$$