Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Tisdagen den 7 januari 2020 klockan 08.30-12.30, Johanneberg.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(-2x)\,(x^2 - x + 2)\,dx$

   (b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Begränsningsytan vid $x = 0$ är värmeisolerad medan den vid $x = d$ hålls vid en konstant temperatur T_d. Det finns inga värmekällor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

(c) Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där fältet ges av $\vec{F} = \hat{\varphi}/\rho$ och kurvan C parametriseras av $x = \cos(4\pi t)$, $y = \sin(4\pi t)$ och $z = t$ med kurvparametern $0 \leq t \leq 1$.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ vars normalvektor har icke-negativ z-komponent ($n_z \geq 0$). Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = x\hat{x} + x^2 z^2 \hat{y} + z\hat{z}$. *(10 poäng)*

3. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$

(10 poäng)

4. Använd indexnotation för att visa följande:

   (a) om T_{ij} är en tensor så är T_{ii} en skalär.

   (b) δ_{ij} är en invariant tensor.

   (10 poäng)

5. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

6. Bestäm p och ℓ så att

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin^\ell \theta \cos(2\varphi),$$

är en icke-singulär lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

(10 poäng)

Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Tisdagen den 7 januari 2020 klockan 08.30-12.30, Johanneberg.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Vad är $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(-2x)\,(x^2 - x + 2)\,dx$

   (b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Begränsningsytan vid $x = 0$ är värmeisolerad medan den vid $x = d$ hålls vid en konstant temperatur T_d. Det finns inga värmekällor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

   (c) Beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där fältet ges av $\vec{F} = \hat{\varphi}/\rho$ och kurvan C parametriseras av $x = \cos(4\pi t)$, $y = \sin(4\pi t)$ och $z = t$ med kurvparametern $0 \leq t \leq 1$.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

   Lösning:

   (a) Integralen kan skrivas $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(z)\left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} + 2\right) dz = 1$.

   (b) Randvillkoren $T'(0) = 0$ och $T(d) = T_d$ ger att stationärlösningen blir $T(x) = T_d$.

   (c) Fältet är en virveltråd längs z-axeln med styrkan $J = 2\pi$. Kurvan går två varv i positiv riktning runt virveltråden vilket gör att kurvintegralen blir 4π.

---

2. Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ vars normalvektor har icke-negativ z-komponent ($n_z \geq 0$). Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = x\hat{x} + x^2z^2\hat{y} + z\hat{z}$. *(10 poäng)*

   Lösning:

   - Ytan är en halv cylinder (endast övre halvplanet) med radie $\rho = 1$ och x-axeln som symmetriaxel.
   - Vi använder Gauss sats och stänger volymen med de annars öppna begränsningsytorna som är halvcirklar vid $x = \pm 1$ ($S_{x=\pm 1}$) samt en rektangel vid $z = 0$ ($S_{z=0}$).
   - Divergensen blir $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2$ vilket gör att volymsintegralen $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2\frac{\pi}{2}2 = 2\pi$, där den slutna randen till volymen V är $\partial V = S + S_{x=+1} + S_{x=-1} + S_{z=0}$.

- Vi noterar att $\vec{F} \perp \hat{z}$ vid $z = 0$ så att $\int_{S_{z=0}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$.
- Begränsningsytorna vid $x = \pm 1$ har normalriktningar $\pm\hat{x}$ vilket sammanfaller med vektorfältets x-komponent ($F_x = \pm 1$) på dessa ytor så att integralerna blir $\int_{S_{x=+1}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{x=-1}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pi/2$.
- Sammantaget blir den sökta integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

---

3. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$

(10 poäng)

Lösning:

Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\jmath},$$

härleds förslagsvis med hjälp av Gauss sats (se avsnitt 4.2 i kompendiet med den konserverade storheten *laddning* istället för *massa*).

Från Amperes lag (utan tidsberoende) har vi

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Med ytterligare en term (förskjutningsströmmen) i Amperes lag

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath},$$

stämmer kontinuitetsekvationen vilket man ser efter insättning.

4. Använd indexnotation för att visa följande:

(a) om T_{ij} är en tensor så är T_{ii} en skalär.

(b) δ_{ij} är en invariant tensor.

(10 poäng)

Lösning:

(a) Transformationen av tensorn T_{ij} ges av $T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl}$. Detta betyder att dess spår, T_{ii}, är en skalär eftersom den är invariant under koordinattransformation: $T'_{ii} = L_{ik}L_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk}$, där vi har utnyttjat ortonormaliteten hos transfomationsmatrisen **L**.

(b) Vi betraktar koordinattransformationen $\delta'_{ij} = L_{ik}L_{jl}\delta_{kl} = L_{ik}L_{jk} = \delta_{ij}$, där vi återigen har utnyttjat ortonormaliteten hos transfomationsmatrisen **L**. Kroneckers delta är därför en invariant tensor.

---

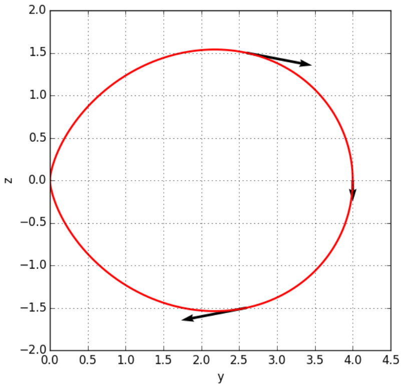
5. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

Lösning:

Fältlinjer bestäms ur sambandet $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E}$. Här väljer vi $C = 4\pi/\mu$ och vi använder sfäriska koordinater så att $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r + r\hat{\theta}\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

I detta fall får vi den separabla differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2r}{\tan\theta}$ med lösningen $r = A\sin^2\theta$. Integrationskonstanten bestäms från den givna punkten till $A = 4$.

Detta är fältet från en dipol. Just denna fältlinje ligger i zy-planet $(x = 0)$ med start och slut i origo. I punkten $\theta = \pi/2$, dvs $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ pekar vektorfältet i riktningen $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Se figur.



6. Bestäm p och ℓ så att

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin^\ell \theta \cos(2\varphi),$$

är en icke-singulär lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

(10 poäng)

Lösning:

Laplaces ekvation $\Delta\phi$ skall gälla i hela området. Vi behöver inte inkludera den konstanta faktorn ϕ_0/a^p nedan.

Vi skriver Laplaces ekvation i sfäriska koordinater

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) r^p \sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi)$$
$$= r^{p-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi).$$

Vinkelberoendet i VL är $\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi)$ vilket betyder att det måste vara detsamma i HL för att likheten skall gälla överallt. Detta betyder i sin tur att fältets vinkelberoende måste vara en egenfunktion till operatorn innanför hakparantesen i HL.

Vi utför derivatorna i HL och finner att

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi) = \ldots$$
$$= \left[\frac{\ell^2-4}{\sin^2\theta} - \ell(\ell+1)\right]\sin^\ell(\theta)\cos(2\varphi).$$

Vi har alltså en egenfunktion endast om $\ell^2 - 4 = 0$, dvs $\ell = \pm 2$. Egenvärdet är $-\ell(\ell+1)$. En negativ exponent för faktorn $\sin^\ell(\theta)$ i skalärfältet skulle dock göra det singulärt längs z-axeln (där $\theta = 0, \pi$). Därför måste vi ha $\ell = +2$.

Vi kan nu förkorta bort vinkelberoendet från bägge leden. Återstår gör den radiella ekvationen

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r\right) r^p = -r^{p-2}\ell(\ell+1),$$

vilket leder till att $p(p+1) = \ell(\ell+1) = \{\ell = 2\} = 6$. Av de två lösningarna, $p = 2$ och $p = -3$, ger enbart den förra ett icke-singulärt fält.

Följande icke-singulära skalärfält är därmed en lösning till Laplaces ekvation inuti $r < a$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2\theta \cos(2\varphi).$$
