Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Lördagen den 26 oktober 2019 klockan 08.30-12.30 i SB.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2 \hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ med normalvektor $\hat{r}$?

(b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

(c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

2. En oändligt lång metallcylinder med radie ρ_0 och symmetriaxeln längs z-axeln genom $x = y = 0$ har en temperatur som ges av

$$T(\rho, \varphi, z) = T_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \sin\varphi,$$

i cylindriska koordinater. *Konstanten* $T_0 > 0$. Betrakta punkten P: $\rho = \rho_0/2$, $\varphi = \pi/4$, $z = 0$.

(a) I vilken riktning ökar temperaturen som mest i punkten P?

(b) Hur stor är temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\vec{n} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_z$ i punkten P?

(10 poäng)

3. Visa att $V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}$, där V är den inneslutna volymen och ytan ∂V har utåtriktad normal. Bekräfta detta samband för en sfär genom att explicit utföra integralen för detta fall. *(10 poäng)*

4. En punktladdning q befinner sig på avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? ($\vec{E}$-fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*

5. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem $(x'y'z')$ ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

6. Betrakta en oändligt lång, rektangulär stav med $-b \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, samt $-\infty < z < \infty$. Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan

gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren

$$\begin{aligned} \phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0 \\ \phi(x = -b, y) = \phi(x = b, y) = \phi_0 \end{aligned}$$

Lösningen $\phi(x, y)$ kan skrivas som en oändlig summa av termer

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a).$$

Identifiera funktionerna X och Y samt finn ett villkor för koefficienterna C_n med hjälp av randvillkoren vid $x = \pm b$. *(10 poäng)*

Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Lördagen den 26 oktober 2019 klockan 08.30-12.30 i SB.

Lösningsskiss: Christian Forssén.

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Vad är ytintegralen $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = z^2 \hat{z}$ och S är ytan till enhetssfären ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) med normalvektor $\hat{r}$?

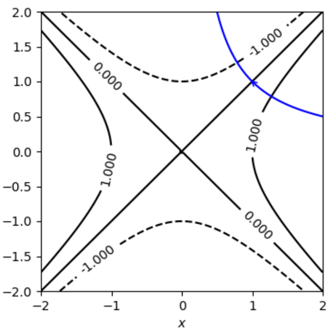
(b) Skissa nivåytorna $\phi = -1, 0, 1$ för skalärpotentialen $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ i området $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Skissa också den fältlinje (inkl riktning) som går genom punkten $(x, y) = (1, 1)$.

(c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)*

Lösning:

(a) $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ (notera att fältet är symmetriskt runt $z = 0$, dvs det som strömmar in i nedre halvplanet kommer att strömma ut i det övre).

(b)



(c) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 4x$). Detta ger

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos(0) = \frac{1}{4}.$$

---

2. En oändligt lång metallcylinder med radie ρ_0 och symmetriaxeln längs z-axeln genom $x = y = 0$ har en temperatur som ges av

$$T(\rho, \varphi, z) = T_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \sin\varphi,$$

i cylindriska koordinater. *Konstanten* $T_0 > 0$. Betrakta punkten P: $\rho = \rho_0/2$, $\varphi = \pi/4$, $z = 0$.

(a) I vilken riktning ökar temperaturen som mest i punkten P?

(b) Hur stor är temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\vec{n} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_z$ i punkten P?

(10 poäng)

Lösning:

Gradienten blir

$$\vec{\nabla} T = T_0 \frac{\rho}{\rho_0^2} \left(2 \sin\varphi \hat{e}_\rho + \cos\varphi \hat{e}_\varphi \right),$$

vilket i punkten P blir

$$\vec{\nabla} T \Big|_P = \frac{T_0}{\sqrt{2}\rho_0} \left(\hat{e}_\rho + \frac{1}{2} \hat{e}_\varphi \right),$$

(a) Gradienten pekar i riktningen $\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\hat{e}_\varphi$, eller normaliserat $\frac{2}{\sqrt{5}} \left(\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\hat{e}_\varphi \right)$.

(b) Temperaturökningen per längdenhet i den givna riktningen räknas ut med $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T \Big|_P$, där vi måste ha en normaliserad riktningsvektor. Vi har att $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{e}_\rho + \hat{e}_z \right)$ vilket ger

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T \Big|_P = \frac{T_0}{2\rho_0}.$$

Avslutningsvis noterar vi att alla riktningar ovan är dimensionslösa och att gradienten har enheten $[T_0]/m$.

---

3. Visa att $V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}$, där V är den inneslutna volymen och ytan ∂V har utåtriktad normal. Bekräfta detta samband för en sfär genom att explicit utföra integralen för detta fall. *(10 poäng)*

Lösning:

Vi använder Gauss sats med vektorfältet $\vec{F} = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ vars divergens $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$

$$\oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{r} dV = 3V,$$

vilket ger det sökta sambandet.

För ytan till en sfär med radien R får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\oint_{\partial V}\vec{r}\cdot d\vec{S} &= \frac{1}{3}\oint_{\partial V} R\hat{r}\cdot\hat{r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{3}R^3\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3} = V.\end{aligned}$$

---

4. En punktladdning q befinner sig på avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? ($\vec{E}$-fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*

   Lösning:

   - Vektorfältet är noll inuti metallen, vilket innebär att potentialen är konstant. Vi väljer att sätta $\phi = 0$, vilket gör att ytan ($z = 0$) blir en ekvipotentialyta med $\phi = 0$.
   - Detta Dirichlet randvillkor kan uppfyllas genom att införa en spegelladdning $-q$ i punkten $-a\hat{z}$. Den elektriska potentialen (för $z > 0$) ges av

     $$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-a\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}+a\hat{z}|}.$$

   - Det elektriska fältet ges av

     $$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right].$$

   - Vid ytan är $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ och $|\vec{r}-a\hat{z}| = |\vec{r}+a\hat{z}| = \sqrt{a^2+\rho^2}$. Därför blir vektorfältet vid ytan $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2a\hat{z}}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$.
   - Ytladdningen motsvaras av en diskontinuitet i fältet

     $$\sigma = \epsilon_0\hat{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

     Här är $\hat{n} = \hat{z}$ och $\vec{E}_- = 0$ vilket ger $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}$.
   - Den totala inducerade laddningen fås genom att integrera över ytan

     $$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\infty}\sigma\rho d\rho = \ldots = -q,$$

     vilket man egentligen kan inse från det givna randvillkoret.

5. Tröghetstensorn för någon stel kropp i ett Cartesiskt koordinatsystem (xyz) ges av

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix},$$

där η är ett reellt tal och I_0 är en konstant med enheten (massa $\times$ längd^2). Ett roterat koordinatsystem $(x'y'z')$ ges av transformationen:

$$x' = z; \quad y' = y; \quad z' = -x.$$

Använd tensorers transformationsegenskaper för att visa vad tröghetstensorn blir i detta roterade koordinatsystem. *(10 poäng)*

Lösning:

Den givna koordinattransformationen kan skrivas med indexnotation $x'_i = L_{ij} x_j$. Elementen i transformationsmatrisen får vi genom att derivera $L_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$, vilket ger

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera gärna att $\det(\mathbf{L}) = +1$, dvs det är fortfarande ett högersystem. Med tensorers transformationsegenskaper får vi att tröghetstensorn i det roterade koordinatsystemet är $I'_{ij} = L_{ik} L_{jl} I_{kl} = L_{ik} I_{kl} (L^t)_{lj}$, eller explicit som en matrismultiplikation

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 \begin{pmatrix} \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\eta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+\eta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret är rimligt eftersom den givna transformationen motsvarar en rotation 90° moturs runt y-axeln. Vi hamnar i ett nytt koordinatsystem som fortfarande sammanfaller med kroppens huvudtröghetsaxlar, men där två av axlarna har bytt plats jämfört med det ursprungliga systemet.

6. Betrakta en oändligt lång, rektangulär stav med $-b \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, samt $-\infty < z < \infty$. Notera att den oändliga utsträckningen i z-led gör att problemet effektivt sett blir tvådimensionellt. Inuti plattan gäller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. Dessutom gäller randvillkoren

$$\begin{aligned}\phi(x, y = 0) &= \phi(x, y = a) = 0\\ \phi(x = -b, y) &= \phi(x = b, y) = \phi_0\end{aligned}$$

Lösningen $\phi(x, y)$ kan skrivas som en oändlig summa av termer

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a).$$

Identifiera funktionerna X och Y samt finn ett villkor för koefficienterna C_n med hjälp av randvillkoren vid $x = \pm b$. *(10 poäng)*

Lösning:

Enligt ledningen gör vi ansatsen

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X(n\pi x/a) Y(n\pi y/a),$$

och ser direkt att $Y(n\pi y/a) = \sin(n\pi y/a)$ uppfyller randvillkoren $\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = a) = 0$. Vi opererar med Laplacianen på term n och får

$$C_n \sin(n\pi y/a) \left(\frac{d^2 X(n\pi x/a)}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X(n\pi x/a) \right).$$

Laplaces ekvation uppfylls separat för varje term (och därmed för summan) med lösningen

$$X(k_n x) = A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x},$$

där vi har definierat $k_n \equiv n\pi/a$. Vi ser att geometrin och randvillkoren är helt symmetriska runt $x = 0$ så vi måste ha att $\phi(x, y) = \phi(-x, y)$. Detta ger att $A_n = B_n$ och vi kan förenkla

$$X(k_n x) = A_n \left(e^{k_n x} + e^{-k_n x}\right) = 2A_n \cosh(k_n x).$$

Vi absorberar amplituden i C_n och kan slutligen identifiera lösningen

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Det sista som återstår är att uppfylla randvillkoret $\phi(x = b, y) = \phi_0$ (kom ihåg att problemet, och vår lösning, är symmetrisk runt $x = 0$ så vi kommer automatiskt att uppfylla villkoret vid $x = -b$). Detta ger det extra villkoret på koefficienterna i lösningen ovan

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi b/a) \sin(n\pi y/a) = \phi_0.$$

Anmärkning: Lösningen till ovanstående fås mha Fourieranalys och inkluderas nedan för att göra svaret på problemet helt slutgiltigt

$$C_n = \begin{cases} 0, & \text{jämna } n \\ \phi_0 \frac{4}{n\pi} \frac{1}{\cosh(n\pi b/a)} & \text{udda } n. \end{cases}$$

Notera dock att detta sista steg inte ingick i problemet.
