

## Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 eller FFM232)

<b>Tid och plats:</b>	Måndagen den 20 augusti 2018 klockan 14.00-18.00, Hörsalsvägen 5.
<b>Hjälpmedel:</b>	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
<b>Examinator:</b>	Christian Forssén (031-772 3261).
<b>Jourhavande lärare:</b>	Christian Forssén (031-772 3261).

**FFM234 eller FFM232:** Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Skriv din kurskod på tentamensomslaget (FFM234 gäller från läsåret 17/18, FFM232 gäller för äldre studenter).

**Rättningsprinciper:** Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna  $r, \theta, \varphi$  för sfäriska koordinater (där  $\theta$  är vinkeln från positiva z-axeln), medan  $\rho, \varphi, z$  betecknar cylindriska koordinater.

*Lycka till!*

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

- (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , där fältet  $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2 + y^2)$  och den slutna kurvan  $C$  parametriseras enligt  $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ .

(b) Beräkna  $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$ , där  $M_{ij}$  är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ange för vilken enhetsvektor  $\hat{n}$  som riktningsderivatan i riktningen  $\hat{n}$  av skalärfältet  $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$  i punkten  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  är maximal och positiv. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Betrakta ett kraftfält

$$\vec{F} = (y^2 + 5)\hat{x} + (2xy - 8)\hat{y}.$$

I  $xy$ -planet märker vi ut en kvadrat med hörnen  $O : (0, 0)$ ,  $A : (1, 0)$ ,  $B : (1, 1)$ ,  $C : (0, 1)$ . Visa att kraftfältet kan beskrivas med en skalärpotential, och ange en sådan potential explicit. Beräkna sedan arbetet som utförs av kraftfältet vid en förflyttning längs tre av kvadratens sidor  $OABC$ . (10 poäng)

3. Visa att gränsvärdet  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  av distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

uppfyller de definierande egenskaperna för en endimensionell deltafunktion. (10 poäng)

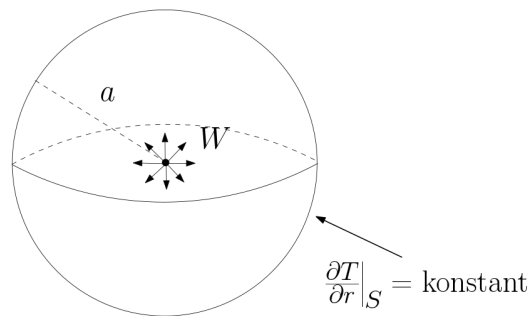
4. Skriv ett uttryck för källtätheten från en elektrisk dipol  $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$  i  $\mathbf{R}^3$ . Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. (10 poäng)

*Ledning:* Dipolmomentet  $\mu$  har enheten (laddning  $\times$  längd). (10 poäng)

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien  $a$  hålls vid den elektriska potentialen  $\phi(\rho = a, \varphi, z) = \phi_0 \sin 2\varphi$ , där  $\rho, \varphi, z$  är cylindriska koordinater. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer. (10 poäng)

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt  $W$ . Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie  $a$ . Vid ytan  $S$  gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_S = \text{konstant}.$$



Finns ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant  $T(r < a) = 0$  vid  $t = 0$  och att materialets värmekonduktivitet är  $\lambda$  (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen).

# Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234 och FFM232)

**Tid och plats:** Måndagen den 20 augusti 2018 klockan 14.00-18.00, Hörsalsvägen 5.

**Lösningsskiss:** Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , där fältet  $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2 + y^2)$  och den slutna kurvan  $C$  parametriseras enligt  $(x, y, z) = b(\sin t, \cos t, 0)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ .

(b) Beräkna  $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$ , där  $M_{ij}$  är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ange för vilken enhetsvektor  $\hat{n}$  som riktningsderivatan i riktningen  $\hat{n}$  av skalärfältet  $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$  i punkten  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  är maximal och positiv. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

Lösning: \_\_\_\_\_

(a)  $2\pi F_0 a$

(b)  $-a^2 - c^2$

(c)  $-\hat{z}$  ( $= -\hat{r}$ )

2. Betrakta ett kraftfält

$$\vec{F} = (y^2 + 5)\hat{x} + (2xy - 8)\hat{y}.$$

I  $xy$ -planet märker vi ut en kvadrat med hörnen  $O : (0, 0)$ ,  $A : (1, 0)$ ,  $B : (1, 1)$ ,  $C : (0, 1)$ . Visa att kraftfältet kan beskrivas med en skalärpotential, och ange en sådan potential explicit. Beräkna sedan arbetet som utförs av kraftfältet vid en förflyttning längs tre av kvadratens sidor  $OABC$ . (10 poäng)

*Lösning:* \_\_\_\_\_

Det visas enkelt att kraftfältet är virvelfritt  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , vilket betyder att fältet är konservativt. I detta fall existerar det skalärpotentialer  $\phi$  sådana att  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ , dvs

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -(y^2 + 5) & \Rightarrow & \phi(x, y) = -xy^2 - 5x + f_1(y), \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -(2xy - 8) & \Rightarrow & \phi(x, y) = -xy^2 + 8y + f_2(x), \end{aligned}$$

där  $f_1(y)$  och  $f_2(x)$  är godtyckliga funktioner. För att få ett specifikt svar väljer vi  $f_1(y) = 8y$  och  $f_2(x) = -5x$  så att

$$\phi(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y.$$

För att beräkna arbetet  $W$  vid förflyttningen  $OABC$  kan vi utnyttja att detta är ett konservativt kraftfält så att arbetet inte beror på vägen utan enbart på ändpunkterna

$$W = \phi|_O - \phi|_C = \phi(0, 0) - \phi(0, 1) = -8.$$

Givetvis får vi samma resultat om vi räknar ut arbetet explicit via vägitintegralen  $W = \int_{OABC} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

3. Visa att gränsvärdet  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  av distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

uppfyller de definierande egenskaperna för en endimensionell deltafunktion. (10 poäng)

*Lösning:* \_\_\_\_\_

Visa först att

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \exp(x^2/\varepsilon^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon \left[1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \dots\right]} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} (x^2 + \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2\varepsilon^2} + \dots)} \rightarrow 0 \quad \text{för } x \neq 0 \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (1) \end{aligned}$$

Vidare har vi integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2} dx = \sqrt{\pi\varepsilon^2}$  (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-41). Detta ger

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = 1, \quad (2)$$

för  $\varepsilon > 0$ . För att vara helt korrekta skall vi egentligen visa den mer allmänna egenskapen  $\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)$  för en väl beteende funktion  $f(x)$ . Eftersom ekv. (1) gäller, och  $f(x)$  inte utgör något problem, kan vi utöka integrationsintervallet och istället visa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Vi Taylorutvecklar,  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \dots$ , och konstaterar att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)h_\varepsilon(x)dx = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx = f(0),$$

enligt vad vi visat ovan (2). Det återstår att visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n h_\varepsilon(x)dx = 0, \quad (3)$$

för alla heltal  $n > 0$ . I vårt fall har vi en jämn funktion  $h_\varepsilon(x)$  vilket gör att ekv. (3) är trivalt uppfyllt för udda  $n$  då integranden blir udda. För jämna  $n = 2k$  finner vi (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-42)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi\varepsilon} \varepsilon^{2k} = 0,$$

för  $\varepsilon > 0$ . Alltså har vi visat att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a < 0}^{b > 0} f(x) \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = f(0), \quad \text{med } \varepsilon > 0.$$

4. Skriv ett uttryck för källtäteten från en elektrisk dipol  $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$  i  $\mathbf{R}^3$ . Härled också ett uttryck för den elektrostatiska potentialen för dipolfältet på stora avstånd. (10 poäng)

*Ledning:* Dipolmomentet  $\mu$  har enheten (laddning  $\times$  längd). (10 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

Vi lägger punktdipolen i origo. En dipol  $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$  motsvarar en laddning  $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$  i punkten  $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$  och en laddning  $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$  i origo. Källtätheten kan skrivas

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r} - \varepsilon\hat{z}) - \frac{\mu}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Alternativt kan vi lägga punktladdningarna i  $z = \pm\varepsilon/2$ . Det blir samma fält för  $r/\varepsilon \gg 1$ .

Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir (notera permeabiliteten från Maxwells första ekvation)

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r}.$$

Nu vill vi studera hur detta uttryck kan skrivas vid stora avstånd. Vi kan skriva  $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\rho^2 + (z - \varepsilon)^2}$ , och om  $\varepsilon$  är litet ( $\varepsilon/\rho, \varepsilon/z \ll 1$ ) blir detta  $\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$ . Därför får vi

$$\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right).$$

Här har vi använt Taylorutvecklingarna  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$  samt  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ .

Potentialen blir

$$\varepsilon_0\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon} \left[ \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right) - \frac{1}{r} \right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu \cos\theta}{4\pi r^2} \quad (4)$$

Mer generellt kan man skriva den elektrostatiska potentialen från en dipol  $\vec{\mu}$ :

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

I vårt fall var alltså  $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$  dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen  $\frac{\mu}{\varepsilon}$  och separationsvektorn  $\varepsilon\hat{z}$ ).

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien  $a$  hålls vid den elektriska potentialen  $\phi(\rho = a, \varphi, z) = \phi_0 \sin 2\varphi$ , där  $\rho, \varphi, z$  är cylindriska koordinater. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer.

(10 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

Inget i problemställningen beror på  $z$ , så vi betraktar det som ett tvådimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan  $\rho < a$ . En rimlig ansats är  $\phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \sin 2\varphi$ . Laplaces ekvation säger

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho} (\rho f'(\rho))' \sin 2\varphi - \frac{4}{\rho^2} f(\rho) \sin 2\varphi = 0.$$

En ansats  $f(\rho) = A\rho^p$  ger  $p^2 - 4 = 0$  eller  $p = \pm 2$ . Minustecknet ger ett singularfält. Randvillkoret ger  $A = \phi_0/a^2$ . Potentialen är

$$\phi = \phi_0 \frac{\rho^2}{a^2} \sin 2\varphi = 2\phi_0 \frac{xy}{a^2}.$$

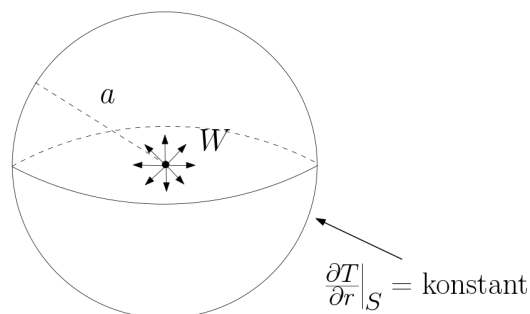
Det elektriska fältet är

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{2\phi_0\rho}{a^2} (\hat{\rho} \sin 2\varphi + \hat{\varphi} \cos 2\varphi) = -\frac{2\phi_0}{a^2} (y\hat{x} + x\hat{y}).$$

Ekvipotentialytorna är alltså hyperbler  $xy = \text{konstant}$ . Fältlinjerna blir hyperbler  $x^2 - y^2 = \text{konstant}$ .

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt  $W$ . Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie  $a$ . Vid ytan  $S$  gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_S = \text{konstant}.$$



Finns ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant  $T(r < a) = 0$  vid  $t = 0$  och att



materialets värmekonduktivitet är  $\lambda$  (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen).

*Lösning:* \_\_\_\_\_

- Vi har en punktkälla med värmeeffekten  $W$  och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

- Lösningen är  $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$ , vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation  $\Delta T = 0$  i området  $0 < r < a$  (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten  $T_1$  är fortfarande obestämmd.
- Värmeströmmen är  $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$ . Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q} \cdot d\vec{S} = W.$$

Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeeström per tidsenhet ut genom ytan.

- Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen  $H = \int_V c\rho T dV$ . För en konstant temperaturfördelning  $T_0 = 0$  (som vid  $t = 0$ ) blir detta  $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3} = 0$ . För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho 4\pi \underbrace{\int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r dr}_{= \frac{W a^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger  $T_1$ . Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2a} \right).$$