Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 14 augusti 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 b(y\hat{x} + x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

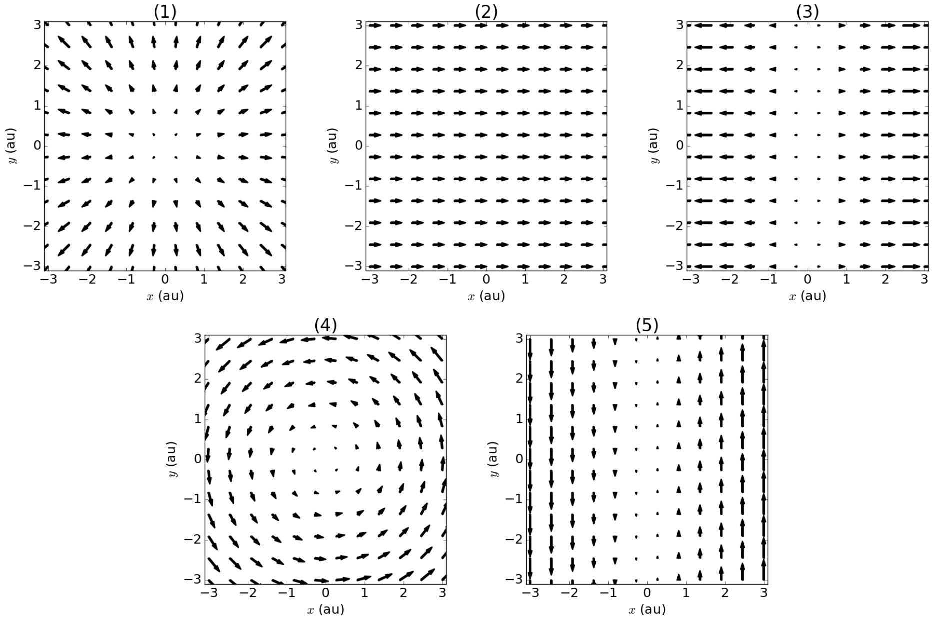
   (b) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x - \pi) \sin x dx$.

   (c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\phi(\hat{r}) = \sin^2\theta/r^3$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten ifråga, det spelar ingen roll, bara det framgår vilket.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. (a) Vad blir följande derivator på vektorfältet $\vec{A} = r\hat{r}$:
(i) $\nabla \cdot \vec{A}$; (ii) $\nabla \times \vec{A}$; (iii) $\Delta\vec{A}$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$; (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$? *(5 poäng)*

   (b) Fem olika tvådimensionella vektorfält visualiseras i figurerna (1)–(5). Ange för samtliga huruvida *divergensen* och *rotationen* (z-komponenten) är noll, positiv eller negativ. *(5 poäng)*



3. (a) Förenkla uttrycket $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl}$
(4 poäng)

   (b) Kroneckers delta är en invariant tensor. Vad menas med detta? *(2 poäng)*

   (c) Använd transformationsegenskaper för att visa att Kroneckers delta är en invariant tensor. *(4 poäng)*
Ledning: En tensor skall uppfylla transformationsregeln $T'_{ij} = L_{il}L_{jm}T_{lm}$, *där* $\mathbf{L}$ *är transformationsmatrisen som också relaterar ortsvektorerna i de två koordinatsystemen* $x'_i = L_{ij}x_j$.

4. Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + x^2\hat{z}\right) + \frac{q}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right),$$

med konstanter a, F_0 och q. *(10 poäng)*

5. Temperaturfördelningen på ytan av en sfär med radien R ges av

$$T(r = R, \theta, \varphi) = T_0 + T_1 \cos\theta.$$

Bestäm den statiska temperaturfördelningen inuti sfären. Det finns inga värmekällor i området $r < R$. *(10 poäng)*

6. Betrakta en punktladdning med laddning q i punkten $z = a$ utanför en metallisk sfär med radien R (sfärens centrum ligger i origo och $a > R$). Inuti sfären och på dess rand gäller $\phi(r \leq R, \theta, \varphi) = 0$.

   (a) Ge ett uttryck för den elektrostatiska potentialen längs den negativa z-axeln, dvs finn $\phi(x = 0, y = 0, z)$ för $z < 0$. *(5 poäng)*

   (b) Beräkna den inducerade ytladdningen på sfären som en funktion av vinkeln θ (från z-axeln). *(3 poäng)*

   (c) Vad blir den totala inducerade ytladdningen på sfären (dvs integrerad över hela ytan)? *(2 poäng)*

Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 14 augusti 2017 klockan 14.00-18.00 i Maskinsalarna.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. *Svar:*

   (a) 0

   (b) 1/2

   (c) $\hat{n} = -\hat{r}$ (eller $\hat{n} = -\hat{x}$)

---

2. *Lösning:*

   (a) (i) $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r) = 3$; (ii) $\nabla \times \vec{A} = 0$; (iii) $\Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(3) - \nabla \times (0) = 0$; (iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ (alltid sant); (v) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times (0) = 0$.

   (b) Divergens och rotation kan uppskattas baserat på fältens utseenden. Alternativt kan explicita uttryck för fälten ansättas.

	$\nabla \cdot \vec{A}$	$\nabla \times \vec{A}$
Fält (1) ser ut som $\vec{A} = r\hat{r}$.	> 0	0
Fält (2) ser ut som $\vec{A} = \hat{x}$.	0	0
Fält (3) ser ut som $\vec{A} = x\hat{x}$.	> 0	0
Fält (4) ser ut som $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$.	0	> 0
Fält (5) ser ut som $\vec{A} = x\hat{y}$.	0	> 0

---

3. *Lösning:*

   (a) Först noterar vi att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 0$ om $i \neq j$ eftersom minst en av ε-tensorerna då kommer att bli noll.
   Vi studerar nu fallet $i = j = 1$ och finner att $\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{1kl} = 2$ (bara termerna $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1$ och $\varepsilon_{132}\varepsilon_{132} = (-1) \cdot (-1)$ är nollskilda).
   Vi får samma resultat för $i = j = 2$ och $i = j = 3$. Sammanfattningsvis har vi alltså att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$.

(b) Kroneckers delta är en invariant tensor vilket betyder att den är oberoende av koordinatsystem: $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$.

(c) Vi använder transformationsregeln $\delta'_{ij} = L_{il}L_{jm}\delta_{lm} = L_{il}L_{jl}$. Vi noterar vidare att transformationsmatrisen måste uppfylla $\mathbf{LL}^t = \mathbf{1}$ eller med indexnotation $L_{il}(L^t)_{lj} = \delta_{ij}$. Notera att $(L^t)_{lj} = L_{jl}$ så att $L_{il}L_{jl} = \delta_{ij}$. Alltså har vi att $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$, vilket skulle visas.

---

4. *Lösning:*

- Ytan är en halvsfär med radien a.
- Fältet kan delas upp i de två termerna $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ där $\vec{F}_1$ är reguljärt med divergensen $\nabla \cdot \vec{F} = 2F_0/a$ medan $\vec{F}_2$ är fältet från en punktkälla med styrkan $+q$ belägen i origo.
- För att beräkna bidraget från $\vec{F}_1$ kan vi använda Gauss sats, men vi behöver isf sluta ytan. Vi sluter den givna ytan genom att lägga till en pottenplatta S_1 med normalen $-\hat{z}$. Gauss sats ger oss att

$$\oint_{S+S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}_1 \mathrm{d}V = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}.$$

- Integralen över bottenplattan räknas enklast ut i cylinderkoordinater ($x = \rho\cos\varphi$)

$$\int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2}\int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho\cos\varphi)^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi F_0 a^2}{4}.$$

- den sökta ytintegralen för $\vec{F}_1$ blir därför

$$\int_S \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{19\pi F_0 a^2}{12}.$$

- Ytan S upptar en rymdvinkel 2π (den täcker övre halvplanet sett från origo). Normalytintegralen för punktkällan blir därför

$$\int_S \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{q}{2}.$$

- Svaret är $\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{19\pi F_0 a^2}{12} + \frac{q}{2}$.

---

5. *Lösning:*

Den sökta temperaturfördelningen skall uppfylla Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ inuti sfären och Dirichlets randvillkor $T(r = R, \theta, \varphi) = T_0 + T_1 \cos\theta$ på dess rand.

Vi gör ansatsen: $T(\vec{r}) = Ar^p + Br^q \cos\theta$, vilken har fördelen att den kommer att separera i en radiell- och en vinkeldel när man evaluerar Laplacianen, samt att den ger förutsättning att reproducera randvillkoret. Vi finner att

$$\Delta(Ar^p) = Ap(p+1)r^{p-2}$$
$$\Delta(Br^q \cos\theta) = B\left(q(q+1) - 2\right) r^{q-2} \cos\theta.$$

Bägge dessa termer måste vara noll oberoende av varandra för att uppfylla Laplaces ekvation överallt. Vi förkastar dock de negativa lösningarna eftersom de skulle motsvara singulariteter i $r = 0$. Det var givet att området inte innhöll några källor. Detta innebär att $p = 0$ och $q = 1$. Samtidigt väljer vi integrationskonstanterna A och B så att randvillkoret uppfylls. Vi får lösningen

$$T(\vec{r}) = T_0 + T_1 \frac{r}{R} \cos\theta.$$

6. *Lösningsmall:*

- Vi inför en spegelladdning $q' = -q\frac{R}{a}$ belägen på z-axeln, $z' = \frac{R^2}{a}$, dvs inuti sfären. Den elektrostatiska potentialen utanför sfären kan då skrivas
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\varrho} + \frac{q'}{\varrho'}\right),$$
där ϱ och ϱ' är avstånden till de respektive punktladdningarna.

(a) Längs negativa z-axeln gäller att $\varrho = a - z$ och $\varrho' = R^2/a - z$. Dvs vi får att

$$\phi(0,0,z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{R-za/R}\right) & \text{för } z < -R \\ 0 & \text{för } -R \leq z < 0 \end{cases}$$

- Vi tecknar också uttrycket för potentialen där avstånden uttrycks i sfäriska koordinater mha cosinussatsen. Detta finns i formelsamlingen

$$\phi(r,\theta\phi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2+a^2-2ra\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{R/a}{\left(r^2+R^4/a^2-2r(R^2/a)\cos\theta\right)^{1/2}}\right],$$

och vi noterar att detta givetvis ger samma resultat som ovan med $\theta = -\pi$ och $r = |z|$ längs negativa z-axeln.

(b) Den inducerade ytladdningen fås från uttrycket $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \hat{n}\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$. Vi har $\hat{n} = \hat{r}$ för sfären och kraftfältet fås från $\vec{E} = -\nabla\phi$. Inuti sfären är $\phi = 0$ och följdaktligen är $\vec{E}_- = 0$.
Vi behöver alltså den radiella delen av kraftfältet, $E_r = \left(-\nabla\phi\right)_r = \partial_r\phi$. De två termerna i potentialen har samma generella form och vi beräknar

$$\partial_r\left(r^2+A-Br\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(2r-B)\left(r^2+A-Br\right)^{-3/2}.$$

Vi skall evaluera detta på sfärens yta där $r = R$. Vi introducerar också den dimensionslösa storheten $\tilde{a} \equiv a/R > 1$. Efter några steg får vi

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \hat{r}\cdot\vec{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{\tilde{a}^2-1}{\left(1+\tilde{a}^2-2\tilde{a}\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

(c) För att hitta den inducerade laddningen skall vi integrera ytladdningstätheten över sfärens yta S. Vi kan väl ana att detta kommer att motsvara den spegelladdning som vi har introducerat inuti sfären för att uppfylla randvillkoret. Vi finner

$$Q_{\text{ind}} = \int_S \sigma(\theta)R^2\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{q}{2}\left(\tilde{a}^2-1\right)\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1+\tilde{a}^2-2\tilde{a}\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Vi byter integrationsvariabel till $t = -\cos\theta$ och får

$$Q_{\text{ind}} = -\frac{q}{2}\left(\tilde{a}^2-1\right)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(1+\tilde{a}^2+2\tilde{a}t\right)^{3/2}}.$$

Integralen går att finna i Beta Mathematics Handbook. Vi får att

$$Q_{\text{ind}} = q\left(\tilde{a}^2-1\right)\frac{1}{\tilde{a}\left(1-\tilde{a}^2\right)} = -q/\tilde{a},$$

precis som vi anade.