Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 15 augusti 2016 klockan 14.00-18.00 på Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där fältet $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2 + y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

   (b) Beräkna $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ange för vilken enhetsvektor $\hat{n}$ som riktningsderivatan i riktningen $\hat{n}$ av funktionen $\phi(\vec{r}) = \cos\theta/r^2$ i punkten $(x, y, z) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten i fråga, det spelar ingen roll.)

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. (a) Beräkna en enhetsnormal till ytan $x^2yz = -2$ i punkten $(1, 2, -1)$.

   (b) Bestäm och skissa fältlinjerna till kraftfältet $\vec{F} = \frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$.

   (5 poäng per korrekt besvarad deluppgift, totalt 10 poäng)

3. Ett tvådimensionellt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinater ξ och η ges genom relationerna

$$x = \frac{a \sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta},$$
$$y = \frac{a \sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta}.$$

   Finns det något villkor på konstanten a för att systemet skall vara ortogonalt? Bestäm skalfaktorerna för ett sådant ortogonalt koordinatsystem och ange ett uttryck för gradienten av ett skalärfält $\phi(\xi, \eta)$. *(10 poäng)*

4. Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo medan vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$ med $\vec{r}_0 = \frac{3a}{5}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})$? *(10 poäng)*

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien a hålls vid den elektriska potentialen $\phi\,(\rho = a, \varphi, z) = \phi_0 \cos 2\varphi$, där ρ, φ, z är cylindriska koordinater. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer. *(10 poäng)*

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt W. Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie a. Vid ytan gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \text{konstant}.$$

   Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant $T(\vec{r}) = T_0$ vid $t = 0$ och att materialets värmekonduktivitet är λ (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen). *(10 poäng)*

Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 15 augusti 2016 klockan 14.00-18.00 på Samhällsbyggnad.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) $-2\pi F_0 a$

   (b) $-a^2 - c^2$

   (c) $\hat{z}(= -\hat{\theta})$

2. (a) Ytan kan betraktas som en nivåyta till ett skalärfält. Gradienten till ett skalärfält är alltid vinkelrätt mot dess nivåytor och motsvarar alltså ytans normalriktning.

$$\nabla\phi = 2xyz\hat{x} + x^2z\hat{y} + x^2y\hat{z}.$$

   I punkten $(1,2,-1)$ blir detta $\vec{n} = -4\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$. En enhetsnormal kan peka åt två håll och skall vara normaliserad. Svaret blir

$$\hat{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{21}}\left(-4\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}\right).$$

   (b) Teckna de definierande ekvationerna: $\frac{dx}{d\tau} = -y/(x^2+y^2)$ och $\frac{dy}{d\tau} = x/(x^2+y^2)$. Detta kan skrivas som en separabel differentialekvation $\frac{dx}{dy} = -y/x \quad \Rightarrow \quad xdx = -ydy$ med lösningen $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$ eller likvärdigt $x^2 + y^2 = a^2$. Detta motsvarar cirklar i xy-planet med mittpunkt på z-axeln.

   Riktningen fås t.ex. genom att studera den första kvadranten $(x > 0, y > 0)$ där vi ser att x minskar med τ och y ökar med τ. Cirklarna genomlöps alltså moturs.

3. Basvektorerna fås från $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}$ och $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}$.

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}\left(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta\right),$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}\left(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1\right).$$

Dessa vektorer är ortogonala mot varandra för godtyckligt värde på a. Dock gäller uppenbarligen att $a \neq 0$.

Skalfaktorerna är
$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta},$$
så att ett uttryck för gradienten av ett skalärfält blir

$$\nabla\phi = \hat{e}_\xi \frac{\cosh\xi - \cos\eta}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \hat{e}_\eta \frac{\cosh\xi - \cos\eta}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$$

med de normerade basvektorerna

$$\begin{aligned}\hat{e}_\xi &= \frac{1}{(\cosh\xi - \cos\eta)}\left(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta\right),\\ \hat{e}_\eta &= \frac{1}{(\cosh\xi - \cos\eta)}\left(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1\right).\end{aligned}$$

4. Singulariteten för fältet $\vec{F}$ ligger i punkten $\vec{r} = \vec{r}_0$. Vi noterar att $|\vec{r}_0| = \frac{3a}{5}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{25}}a$ vilket betyder att singulariteten ligger utanför sfären som omsluts av ytan S. Vi kan alltså använda Gauss sats.

   Genom att definiera $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0$ blir den sökta integralen

   $$I = \frac{q}{4\pi}\int_{S'} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^3}\cdot d\vec{S}\,' = \frac{q}{4\pi}\int_{S'} \frac{\hat{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^2}\cdot d\vec{S}\,',$$

   och S' är ytan på en sfär med radien a som tangerar origo.

   För att applicera Gauss sats räknar vi först ut $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2 F_{r'}) = 0$. Detta innebär att den sökta integralen är noll.

5. Inget i problemställningen beror på z, så vi betraktar det som ett tvådimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan $\rho < a$. En rimlig ansats är $\phi(\rho,\varphi) = f(\rho)\cos 2\varphi$. Laplaces ekvation säger

   $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho f'(\rho)\right)'\cos 2\varphi - \frac{4}{\rho^2}f(\rho)\cos 2\varphi.$$

   En ansats $f(\rho) = A\rho^p$ ger $p^2 - 4 = 0$ eller $p = \pm 2$. Minustecknet ger ett singulärt fält. Randvillkoret ger $A = \phi_0/a^2$. Potentialen är

   $$\phi = \phi_0\frac{\rho^2}{a^2}\cos 2\varphi = \phi_0\frac{x^2 - y^2}{a^2}.$$

Det elektriska fältet är

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{2\phi_0\rho}{a^2}\left(-\hat{\rho}\cos 2\varphi + \hat{\varphi}\sin 2\varphi\right) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(x\hat{x} - y\hat{y}).$$

Ekvipotentialytorna är alltså hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant. Fältlinjerna är hyperbler $xy =$ konstant.

6. • Vi har en punktkälla med värmeeffekten W och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

- Lösningen är $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$, vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i området $0 < r < a$ (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten T_1 är fortfarande obestämd.
- Värmeströmmen är $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$. Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = W.$$

Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeström per tidsenhet ut genom ytan.

- Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen $H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V$. För en konstant temperaturfördelning (som vid $t = 0$) blir detta $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3}$. För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho\, \underbrace{4\pi \int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r \mathrm{d}r}_{=\frac{Wa^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger T_1. Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right) + T_0$$