Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 4 januari 2016 klockan 08.30-12.30 i Maskinsalarna.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande delfrågor (endast svar skall ges):

   (a) Beräkna den stationära temperaturfördelningen inuti en sfär med radie a. Inuti sfären finns en homogen värmekälla (källtäthet s_0), materialet har värmeledningsförmåga λ och sfärens yta hålls vid en konstant temperatur T_0.

(b) Använd indexnotation för att ange ett uttryck för spåret av matrisen $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ i termer av matriselement hos matriserna $\mathbf{M}$ och $\mathbf{N}$. (Ledning: spåret av en matris är summan av dess diagonalelement).

(c) Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} a\cos^2(x/\varepsilon), & |x| \leq \pi\varepsilon/2 \\ 0, & |x| > \pi\varepsilon/2 \end{cases}$$

närmar sig en deltafunktion $\delta(x)$ då $\varepsilon \to 0^+$ (a kan eventuellt bero på ε).

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Bestäm nivåytorna till skalärfältet

$$\Phi = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2},$$

med $a > 0$ och $\Phi_0 > 0$. *(10 poäng)*

3. Ett vektorfält $\vec{F}$ har potentialen

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet. *(10 poäng)*

4. Betrakta ett kroklinjigt koordinatsystem $\{u_i\}_{i=1}^3$. En möjlig och naturlig definition av normerade basvektorer är att ta normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i},$$

där $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|$ kallas för skalfaktorer.

(a) Teckna ett uttryck för förskjutningsvektorn $d\vec{r}$ i det kroklinjiga koordinatsystemet. *(3 poäng)*

(b) Härled sedan ett uttryck för gradienten av ett skalärfält i kroklinjiga koordinater. *(5 poäng)*

(c) Tillämpning: räkna ut gradientvektorn till skalärfältet $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ i sfäriska koordinater. *(2 poäng)*

5. Beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där kurvan C ges av $x^2 + \frac{y^2}{4} = a^2$ och $z = 0$, som genomlöps i positiv riktning, och fältet ges av

$$\vec{F} = F_0 \left[\frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} \hat{\varrho} + \left(\frac{a}{\varrho} - \frac{\varrho \sin^2 \varphi}{a} \right) \hat{\varphi} \right].$$

F_0 och a är konstanter. *(10 poäng)*

6. En punktladdning q befinner sig avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? (Fältet är noll inne i metallen.) *(10 poäng)*

Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 4 januari 2016 klockan 08.30-12.30 i Maskinsalarna.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) $T(r) = \frac{s_0}{6\lambda}\left(a^2 - r^2\right) + T_0$.
   (b) $\mathrm{Tr}(\mathbf{P}) = M_{ik}N_{ki}$.
   (c) $a = \frac{2}{\pi\varepsilon}$.

2. Vi sätter $\Phi = C\Phi_0$ med $C \leq 0$. Detta ger ekvationen
$$\frac{1-C}{Ca^2}x^2 + \frac{1-C}{Ca^2}y^2 + \frac{1}{Ca^2}z^2 = 1.$$
   Det finns tre olika fall:
   (a) $0 \leq C < 1$
   Alla koefficienter är positiva och ekvationen beskriver en ellips med halvaxlarna $\left(\frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{1-C}}, \frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{1-C}}, a\sqrt{C}\right)$
   (b) $C = 1$
   Ett specialfall där ekvationen ger att $z^2 = a^2$, dvs xy-planen med $z = \pm a$.
   (c) $C > 1$
   Vi skriver ekvationen som $\frac{C-1}{Ca^2}x^2 + \frac{C-1}{Ca^2}y^2 - \frac{1}{Ca^2}z^2 = -1$, vilket är ekvationen för en tvåmantlad hyperboloid med z-axeln som symmetriaxel och med halvaxlarna $\left(\frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{C-1}}, \frac{a\sqrt{C}}{\sqrt{C-1}}, a\sqrt{C}\right)$. Genomskärningar av denna yta kan med fördel skissas för några olika värden på z.

3. Flödet kan vi skriva
$$\Phi(S) = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = -\int_V \Delta\phi dV,$$
   där vi har använt oss av Gauss sats ($S = \delta V$). Potentialen skrivs enkelt i sfäriska koordinater $\phi = r^4 - 3r^2$ och Laplace-operatorn ger $-\Delta\phi = 18 - 20r^2$. Denna funktion utgör alltså integranden för volymsintegralen och är positiv om $r < 3/\sqrt{10}$. Störst flöde fås alltså om vi integrerar över ytan på en sfär med radien $r = 3/\sqrt{10}$. Det maximala, totala flödet blir
$$\int d\Omega \int_0^{3/\sqrt{10}} (18 - 20r^2) r^2 dr = 4\pi \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{54}{25}.$$

4. Se t.ex. avsnitt 2.2 i kompendiet

   (a) $d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{e}_i du_i$.

   (b) Betrakta ett skalärt fält f. Om vi förflyttar oss en sträcka $d\vec{r}$ så förändras f med $df = \nabla f \cdot d\vec{r}$. Förflyttningen kan vi i de nya koordinaterna skriva som

   $$d\vec{r} = h_1\hat{e}_1 du_1 + h_2\hat{e}_2 du_2 + h_3\hat{e}_3 du_3.$$

   Om vi skriver f som en funktion av u_1, u_2 och u_3 får vi

   $$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \\ &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} h_3 du_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3 \right) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

   Då kan vi identifiera uttrycket inom parentesen som gradienten i de nya koordinaterna u_1, u_2, u_3

   $$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{e}_3.$$

   (c) Skalärfältet kan skrivas $\phi = 1/r$ och gradienten blir

   $$\nabla\phi = \hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \ldots = -\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

5. Kurvan C är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna a och $2a$. Enligt högerhandsregeln väljer vi $\hat{z}$ som normal till ellipsskivan. Fältet $\vec{F}$ är singulärt på z-axeln. Singulariteten sitter helt i $\vec{F}_1 = F_0 \frac{a}{\varrho}\hat{\varphi}$, som vi känner igen som en virveltråd på z-axeln med styrkan $2\pi F_0 a$. Vi kallar resten av fältet $\vec{F}_2$. Dess rotation är

   $$\nabla \times \vec{F}_2 = \frac{F_0}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varrho\sin 2\varphi}{2a} & -\frac{\varrho^2\sin^2\varphi}{a} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{a}\hat{z}.$$

   Eftersom C omsluter z-axeln en gång i positiv led, ger $\vec{F}_1$ bidraget $2\pi F_0 a$. Bidraget från $\vec{F}_2$ fås med hjälp av Stokes sats som $-F_0/a$ gånger arean av ellipsen, som är $2\pi a^2$. Värdet på den totala integralen är $2\pi F_0 a - \frac{F_0}{a} 2\pi a^2 = 0$.

6.
- Vektorfältet är noll inuti metallen, vilket innebär att potentialen är konstant. Vi väljer att sätta $\phi = 0$, vilket gör att ytan ($z = 0$) blir en ekvipotentialyta med $\phi = 0$.
- Detta Dirichlet randvillkor kan uppfyllas genom att införa en spegelladdning $-q$ i punkten $-a\hat{z}$. Den elektriska potentialen (för $z > 0$) ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + a\hat{z}|}.$$

- Det elektriska fältet ges av

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r} - a\hat{z}}{|\vec{r} - a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + a\hat{z}}{|\vec{r} + a\hat{z}|^3}\right].$$

- Vid ytan är $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ och $|\vec{r} - a\hat{z}| = |\vec{r} + a\hat{z}| = \sqrt{a^2 + \rho^2}$. Därför blir vektorfältet vid ytan $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2a\hat{z}}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$.
- Ytladdningen motsvaras av en diskontinuitet i fältet

$$\sigma = \epsilon_0\hat{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

Här är $\hat{n} = \hat{z}$ och $\vec{E}_- = 0$ vilket ger $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}$.
- Den totala inducerade laddningen fås genom att integrera över ytan

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\infty} \sigma\rho d\rho = \ldots = -q,$$

vilket man egentligen kan inse från det givna randvillkoret.