Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 26 oktober 2015 klockan 14.00-18.00 på Hörsalsvägen.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. Till detta tillkommer eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger mindre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. (a) Beräkna tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y\hat{x} + x\hat{y}$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b \cos t, c \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

   (b) Visa att $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ (för ett godtyckligt fält ϕ) mha indexnotation.

   (c) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion.

   (3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$, där μ är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/2)$. Rita också denna fältlinje i rummet tillsammans med xyz-axlarna och indikera riktningen på vektorfältet vid några punkter längs fältlinjen. *(10 poäng)*

3. Beräkna integralen
$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$
där S är ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ för $z > 0$ och fältet ges av
$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax\hat{x} + ay\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}\right),$$
med konstanter a och F_0. *(10 poäng)*

4. Härled kontinuitetsekvationen för elektrisk laddningstäthet $\rho(\vec{r}, t)$ och elektrisk strömtäthet $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$. Använd denna för att motivera förskjutningsströmmen i Amperes lag med tidsberoende fält
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \text{ (elektrostatik)} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}.$$
(10 poäng)

5. Lös Laplaces ekvation inuti en (oändligt lång) cylinder med radien a. Vid ytan gäller ett Dirichlet randvillkor
$$\phi(\vec{r})\big|_{|\vec{\rho}|=a} = \phi_0 + \phi_1 \cos p\varphi,$$
där p är ett heltal och (ρ, φ, z) är cylindriska koordinater. *(10 poäng)*

6. I mitten av en sfär finns en radioaktiv källa som avger konstant värmeeffekt W. Källans storlek är mycket mindre än sfärens radie a. Vid ytan gäller Neumanns randvillor för temperaturfältet
$$\frac{\partial T}{\partial r} = \text{konstant}.$$
Finn ett uttryck för den stationära temperaturfördelningen i sfären givet att temperaturen var konstant $T(\vec{r}) = T_0$ vid $t = 0$ och att materialets värmekonduktivitet är λ (notera att vi inte är intresserade av den tidsberoende lösningen som gäller fram till stationärlösningen). *(10 poäng)*

Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 26 oktober 2015 klockan 14.00-18.00 på Hörsalsvägen.

Lösningsskiss: Christian Forssén

1. (a) Kurvan är en ellips i xy-planet som genomlöps moturs. Skriv $\mathrm{d}\vec{r} = -b \sin t \hat{x} \mathrm{d}t + c \cos t \hat{y} \mathrm{d}t$ och integrera över parametern t. Svaret blir $2\pi \frac{bc}{a} F_0$.

   (b)
$$[\nabla \times \nabla\phi]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi$$
   Till exempel för $i = 1$

ijk	∂_j	∂_k	faktor
123	2	3	$+1$
132	3	2	-1

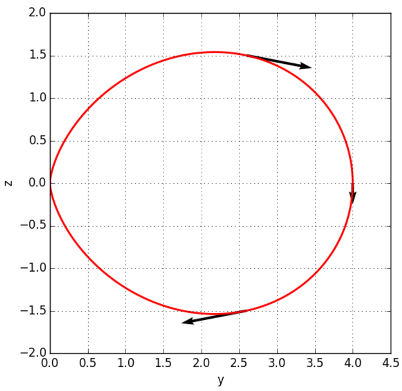
   vilket betyder att $[\nabla \times \nabla\phi]_1 = (\partial_2\partial_3 - \partial_3\partial_2)\,\phi = 0$.

   (c) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 2x$). Detta ger
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Fältlinjer bestäms ur sambandet $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\vec{E}$. Här väljer vi $C = 4\pi/m$ och vi använder sfäriska koordinater så att $\mathrm{d}\vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r + r\hat{\theta}\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

   I detta fall får vi den separabla differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2r}{\tan\theta}$ med lösningen $r = A\sin^2\theta$. Integrationskonstanten bestäms från den givna punkten till $A = 4$.

   Detta är fältet från en dipol. Just denna fältlinje ligger i zy-planet ($x = 0$) med start och slut i origo. I punkten $\theta = \pi/2$, dvs $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ pekar vektorfältet i riktningen $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Se figur.



3. - Ytan är en halvsfär med radien a.
   - Fältet är reguljärt med divergensen $\nabla \cdot \vec{F} = 2F_0/a$.
   - Vi sluter ytan genom att lägga till en pottenplatta S_1 med normalen $-\hat{z}$. Gauss sats ger oss att

$$\oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}.$$

   - Integralen över bottenplattan räknas enklast ut i cylinderkoordinater

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi F_0 a^2}{2}.$$

   - och svaret blir därför

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{11\pi F_0 a^2}{6}.$$

4. Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\jmath},$$

härleds förslagsvis med hjälp av Gauss sats (se avsnitt 4.2 i kompendiet med den konserverade storheten *laddning* istället för *massa*).

Från Amperes lag (utan tidsberoende) har vi

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Med ytterligare en term (förskjutningsströmmen) i Amperes lag

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath},$$

stämmer kontinuitetsekvationen vilket man ser efter insättning.

5.
- Randvillkoret antyder två sorters vinkelberoende: $\cos(p\varphi)$ och 1. Vi ansätter därför en variabelseparerad lösning (utan z-beroende)

$$\phi(\rho, \varphi) = f(\rho) + g(\rho)\cos(p\varphi).$$

- Laplaces ekvation i cylindriska koordinater ger lösningarna

$$f(\rho) = A\log(\rho) + B, \quad g(\rho) = C\rho^{-p} + D\rho^{p},$$

men vi stryker de singulära termerna då vi varken har någon linjekälla ($\log\rho$-termen skulle motsvarat en sådan), eller någon annan singulär källa.

- Randvillkoren säger att $f(a) = \phi_0$ och $g(a) = \phi_1$. Detta ger att $B = \phi_0$ och $Da^p = \phi_1$.
- Svaret blir alltså

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \left(\frac{\rho}{a}\right)^p \cos(p\varphi).$$

6.
- Vi har en punktkälla med värmeeffekten W och ett Neumann randvillkor vid ytan till sfären. Temperaturfältet skall alltså uppfylla Poissons ekvation inuti sfären

$$\Delta T = -s/\lambda, \quad \text{med } s = W\delta^3(\vec{r}).$$

- Lösningen är $T = T(r) = \frac{W/\lambda}{4\pi r} + T_1$, vilket man kan se genom att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i området $0 < r < a$ (dvs där källtermen är noll) och sedan identifiera punktkälltermen. Integrationskonstanten T_1 är fortfarande obestämd.
- Värmeströmmen är $\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\hat{r}\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{W}{4\pi r^2}\hat{r}$. Detta är bra eftersom vi därmed kan verifiera att

$$\int_{|\vec{r}|=a} \vec{q}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = W.$$

Dvs värmeeffekt från källan är lika med värmeström per tidsenhet ut genom ytan.

- Den totala värmeenergin i sfären ges av integralen $H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V$. För en konstant temperaturfördelning (som vid $t = 0$) blir detta $H_0 = c\rho T_0 \frac{4\pi a^3}{3}$. För vår stationära lösning gäller

$$H = c\rho T_1 \frac{4\pi a^3}{3} + c\rho \underbrace{4\pi \int_0^a \frac{W}{4\pi\lambda} r \mathrm{d}r}_{=\frac{Wa^2}{2\lambda}}.$$

- Värmeenergin skall vara bevarad vilket ger T_1. Svaret blir

$$T(r) = \frac{W}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right) + T_0$$