Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats:	Måndagen den 17 augusti 2015 klockan 14.00-18.00 i M-huset.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261.
Jourhavande lärare:	Tobias Wenger (073–038 1453).

FFM232: Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

---

1. Värmeledningsekvationen lyder

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s$$

Svara nu på följande tre delfrågor (endast svar skall ges):

(a) Förklara vad symbolerna c, ρ, T, λ och s står för och ge deras SI-enheter.

(b) En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Motsvarande begränsningsytor hålls vid konstanta temperaturer T_0 respektive T_d och det finns inga källor inne i plattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i plattans inre.

(c) Lösningen till värmeledningsekvationen med en godtycklig källfördelning kommer att vara en funktion av $\vec{r}$ och t, dvs $T(\vec{r}, t)$. Ge ett uttryck för denna allmänna lösning i termer av en så kallad Greensfunktion. Teckna också den värmeledningsekvation vars lösning är just Greensfunktionen.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

2. Svara på följande tre delfrågor:

   (a) Vad är värdet av integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F}$ är fältet från en virveltråd med styrkan j riktad i positiv φ-led på cirkeln $\rho = b$, $z = 0$ och C är kurvan $(x, y, z) = b(1 + \cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, där parametern α går från 0 till 2π? ($\rho\varphi z$ är de vanliga, cylindriska koordinaterna.)

   (b) För vilka värden på talen α, β och γ har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η, givna av

   $$\xi = x^2 - y^2,$$
   $$\eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

   ortogonala basvektorer?

   (c) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \tanh^2 x dx$.

(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 poäng för alla tre.)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

   $$\vec{F} = \begin{cases} A|\vec{r} - a\hat{\mathbf{z}}|^{-3}(\vec{r} - a\hat{\mathbf{z}}) + B\hat{\mathbf{x}}, & z > 0, \\ Cz\hat{\mathbf{z}}, & z \leq 0, \end{cases}$$

   där A, B, C och a är konstanter. Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över en sfär med radien $2a$ och centrum i origo. *(10 poäng)*

4. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}$ i xy-planet.

   (a) Räkna ut divergensen och rotationen av $\vec{v}$.

   (b) Undersök om vektorfältet $\vec{v}$ har en potential. Räkna isf ut denna.

   (c) Räkna ut flödet av $\vec{v}$ genom den raka linjen λ mellan de två punkterna $(x = 1, y = 0)$ och $(x = 1, y = 1)$.

   (10 poäng)

5. På en sfär med radien a befinner sig en elektrisk ytladdning $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Bestäm den elektrostatiska potentialen och det elektriska fältet för alla punkter på z-axeln. Åskådliggör fältet i någon graf och kontrollera att eventuella diskontinuiteter stämmer. *(10 poäng)*

6. Ett elektriskt fält kan, i ett område utan laddningar och strömmar, skrivas

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos\left(k(z-ct)\right),$$

där E_0 och k är konstanter och c är ljushastigheten. Vad är våglängden och periodtiden för denna vågrörelse? Bestäm det magnetiska fältet (eventuella möjliga tidsoberoende delar kan sättas till noll).
Maxwells ekvationer lyder:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

(10 poäng)

Lösningsskiss för tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM232)

Tid och plats: Måndagen den 17 augusti 2015 klockan 14.00-18.00 i M-huset.
Lösningsskiss: Christian Forssén

---

1. (a) c: värmekapacitivitet [J/(kg K)]; ρ: densitet [kg/m^3]; T: temperatur [K]; λ: värmeledningsförmåga [J/(m s K)]; s: värmekälltäthet [J/(m^3 s)].

   (b) $T(z) = (T_d - T_0)\frac{x}{d} + T_0$.

   (c) $T(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 x G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')u(\vec{r}', t')$, där G är lösningen till

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho}\Delta\right) G = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t').$$

2. (a) Notera riktningen på kurvan som omlöper virveltråden. Integralen blir $-j$.

   (b) Konstruera enhetsvektorer från $\nabla\xi$ och $\nabla\eta$ och ta skalärprodukten för att finna villkor för deras ortogonalitet. Man finner $\alpha = \gamma = 0$ och $\beta \neq 0$, men annars godtyckligt.

   (c) Använd partiell integration. Integralen blir noll.

3. Fältet har en punktkälla med styrkan $4\pi A$ i $a\hat{z}$ innanför ytan. C-termen motsvarar en rymdkälla med $\nabla \cdot \vec{F} = C$ i nedre halvplanet. Dessutom finns det en ytkälla vid $z = 0$-planet som bestäms av diskontinuiteten. Man finner ytkällans styrka $\sigma = -Aa/(\rho^2 + a^2)^{3/2}$. Tillsammans blir integralen $\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi A\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{16}{3}\pi a^3 C$.

   Alternativet kan bidraget från A-termen erhållas genom att räkna ut rymdvinklen som den övre delen av sfären upptar sett från punktkällan.

4. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = x^2\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}$ i xy-planet.

   (a) $\nabla \cdot \vec{v} = 2x - 1$, $\nabla \times \vec{v} = 0$.

   (b) Rotationen är noll så det finns en potential. Denna blir $\phi = -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$.

   (c) Det eftersökta flödet är $\int_\lambda \vec{v} \cdot \hat{n}\mathrm{d}s$, där $\hat{n}$ är vinkelrät mot $\mathrm{d}\vec{r}$. Kurvan kan parametriseras enligt $\vec{r} = \hat{x} + \lambda\hat{y}$ med $\lambda \in [0, 1]$. Detta ger $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\lambda\hat{y}$ så att $\hat{n}\mathrm{d}s = \hat{x}\mathrm{d}\lambda$ (där riktningen inte är väldefinierad så ett extra minustecken är också godtagbart). Integralen blir

$$\int_0^1 \mathrm{d}\lambda(\hat{x} - \lambda\hat{y}) \cdot \hat{x} = 1.$$

5. Lös lämpligen med Greensfunktionsmetoden.

$$\phi(z\hat{z}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} a^2 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta'}} \sin\theta' \mathrm{d}\theta'.$$

Integralen löses t.ex. med substitution $t = \cos\theta'$. Man finner

$$\epsilon_0 \phi(z\hat{z}) = \begin{cases} \mathrm{sign}(z) \frac{a^3 \sigma_0}{3z^2} & |z| > a \\ \frac{\sigma_0 z}{3} & |z| < a \end{cases} \qquad \vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3} \hat{z} & |z| > a \\ -\frac{\sigma_0}{3} \hat{z} & |z| < a \end{cases}$$

6. Första ekvationen är uppfylld eftersom $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, dvs $\rho = 0$. Andra ekvationen ger $\partial \vec{B}/\partial t = -\nabla \times \vec{E} = E_0 k \hat{y} \sin(k(z - ct))$, vilket integreras till

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} \cos(k(z - ct)) + B_0(\vec{r}),$$

där den sista termen är tidsoberoende.

Våglängden är $2\pi/k$ och periodtiden $2\pi/(kc)$.