Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 5 januari 2015, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 031-7723181, 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Beräkna $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm}M_{ij}N_{kl}$, där

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ 11 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

b) $\vec{A}$ är vektorpotentialen för fältet från en virveltråd med styrkan j på z-axeln (i positiv z-led). Vad är värdet av integralen $\int_C (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{r}$, där C är en kurva med parametriseringen

$$(x, y, z) = (\ell \cos t, \ell \sin t, \frac{\ell t}{2\pi N}), \quad 0 \le t < 2\pi N,$$

där ℓ är en längd och N ett heltal?

c) Vektorfältet $\vec{F}$ ges av uttrycket $\vec{F}(\vec{r}) = 2\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3}$, där $\vec{a} = (1, 0, 0)$, och ytan S bestäms av $\{\vec{r} : |\vec{r} - \vec{a}| + |\vec{r} + \vec{a}| = 4\}$. Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$?

2. Vektorfältet $\vec{F}$ består av två delar, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. $\vec{F}_1$ är fältet från en punktkälla med styrkan Q belägen i punkten $(0, 0, \sqrt{3}b)$. $\vec{F}_2$ ges av uttrycket

$$\vec{F}_2 = \frac{Qz\hat{z}}{\pi b^3} + \frac{2Q\hat{x}}{b^2}.$$

Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över ytan $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}(z - 3b)^2$, $0 \le z \le 3b$, där normalen valts så att $\hat{z} \cdot \vec{n} > 0$.
(10 poäng)

3. Ett cirkulär cylinder med radien a är gjord av ett material med densiteten ρ, värmekapacitiviteten c och värmeledningsförmågan λ. Dess yta hålls vid temperaturen T_0. Värmeenergi tillförs med en effekt/längdenhet P i ett mycket litet område vid cylinderns symmetriaxel ("z-axeln"), så att värmekälltätheten kan skrivas som $P\delta^2(x, y)$. När transienta temperaturvariationer har klingat ut, hur mycket större blir den totala värmeenergin/längdenhet i cylindern, jämfört med om hela cylindern hade haft temperaturen T_0?
(Värmeledningsekvationen lyder
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s\,,$$
där c är värmekapacitiviteten, ρ densiteten och s värmekälltätheten.)
(10 poäng)

4. På cirkelskivan $\varrho \leq a$, $z = 0$ finns en ytladdning med ytladdningstätheten $\sigma(\varrho, \varphi) = \frac{Q}{\pi a^2}$. Bestäm den elektrostatiska potentialen på z-axeln från denna ytladdning. Gör minst två rimlighetskontroller av svaret (förutom dimensionskontroll).
(10 poäng)

5. För att rita kartor behöver man använda en "projektion", ett sätt att avbilda den krökta jordytan på ett platt papper. En vanlig projektion är Mercators projektion. Den ersätter koordinaterna θ,φ på en enhetssfär med koordinaterna y,φ där
$$y = \log\tan\frac{\theta}{2}\,.$$
Visa att för detta val av koordinater är Mercators projektion "konform", dvs. oavsett läge på jordytan ger en liten förändring i de två koordinaterna en *lika stor* förflyttning på jordytan, så att små cirklar på kartan är små cirklar i verkligheten. Visa att längden ds^2 för en liten förflyttning på enhetssfären ges av
$$ds^2 = \frac{dy^2 + d\varphi^2}{\cosh^2 y}\,.$$
Ge ett uttryck för vinkeldelen av Laplaceoperatorn i de nya koordinaterna.
(10 poäng)

6. Härled den elektrostatiska potentialen från en elektrisk dipol genom att betrakta två elektriska laddningar mycket nära varandra.
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 5 januari 2015

---

1. a) 0

   b) Nj

   c) 4π

2. Ytan är en del av en cirkulär kon, som har spetsen i $(0,0,3b)$ och skär xy-planet i en cirkel med radie b. Sett från punktkällan uppfyller ytan hela rymdvinkeln 4π utom en öppning nedåt med öppningsvinkeln 2α, där $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dvs. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ytans rymdvinkel sedd från punktkällan är

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \, .$$

   Bidraget till integralen från punktkällan är $\frac{Q}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   Den andra delen består av ett konstant fält som ger bidrag 0, samt en del som har divergensen $\nabla \cdot \vec{F}_2 = \frac{Q}{\pi b^3}$. Den är också noll på cirkelskivan i xy-planet, som man kan sluta ytan med. Gauss sats ger bidraget från $\vec{F}_2$, som blir $\frac{1}{3}\pi b^2 \cdot 3b \cdot \frac{Q}{\pi b^3} = Q$.

   Den eftersökta ytintegralen har värdet $\frac{Q}{2}(3 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3. Den stationära temperaturfördelningen uppfyller

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda} = -\frac{P}{\lambda}\delta^2(x,y) \, .$$

   Utanför z-aseln gäller alltså Laplaces ekvation, vars cylindriskt symmeriska och z-oberoende lösningar ges av $T = A + B\log\varrho$. Konstanten B bestäms av linjekällans styrka till $B = -\frac{P}{2\pi\lambda}$, och A bestäms sedan av randvillkoret vid $\varrho = a$ till $A = T_0 + \frac{P}{2\pi\lambda}\log a$. Lösningen är alltså

$$T = T_0 - \frac{P}{2\pi\lambda}\log\frac{\varrho}{a} \, .$$

   Skillnaden i energitäthet (jämfört med temperaturen T_0) ges lokalt ges av $c\rho(T - T_0)$, och för att få den totala energiskillnaden per längdenhet av cylindern skall detta integreras över cirkeln. Resultatet är

$$E - E_0 = -c\rho\frac{P}{2\pi\lambda}2\pi\int_0^a d\varrho\,\varrho\log\frac{\varrho}{a} = -\frac{c\rho P a^2}{\lambda}\int_0^1 dx\,x\log x = \frac{c\rho P a^2}{4\lambda} \, .$$

   Från värmeledningsekvationen kan man utläsa att $c\rho/\lambda$ har dimension tid/(längd)^2. P har per definition dimensionen energi/(längd×tid), så svarets dimension är energi/längd, som det skall vara.

4. Man kan använda Greensfunktionsmetoden. Ett litet areaelement med polära koordinater ϱ' och φ' på cirkeln har laddningen

$$dq = \sigma dA' = \frac{Q}{\pi a^2}\varrho' d\varrho' d\varphi' \, .$$

Dess avstånd från en punkt på z-axeln är $\sqrt{\varrho'^2 + z^2}$. Bidraget till potentialen i $(0, 0, z)$ blir

$$d\phi(0,0,z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\varrho'^2 + z^2}} = \frac{Q\varrho' d\varrho' d\varphi'}{4\pi^2\epsilon_0 a^2\sqrt{\varrho'^2 + z^2}}\,.$$

Integration över cirkelytan ger

$$\phi(0,0,z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{z^2 + a^2} - |z|)\,.$$

En kontroll kan bestå i att betrakta potentialen då $|z| >> a$. Då är $\sqrt{z^2 + a^2} - |z| = |z|(\sqrt{1 + \frac{a^2}{|z]^2}} - 1) = |z|(\frac{a^2}{2|z|^2} + O(\frac{a^4}{|z|^4}))$, och alltså $\phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|z|}$. Eftersom den totala laddningen på cirkelskivan är Q stämmer det överens med resultatet för en punktkälla. En annan kontroll fås vid $z = 0$, där minus z-derivatan av $\epsilon_0\phi$ har en diskontinuitet $\frac{Q}{\pi a^2}$, vilket stämmer med ytkälltätheten.

5. Differentiering ger

$$dy = \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{d\theta}{\sin\theta}\,,$$

vilket leder till

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 = \sin^2\theta(dy^2 + d\varphi^2)\,.$$

Man har också $e^y = \tan\frac{\theta}{2}$, varför $\cosh y = \frac{1}{2}(\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\theta}$, så

$$ds^2 = \frac{dy^2 + d\varphi^2}{\cosh^2 y}\,.$$

Konformiteten följer av skalfaktorerna för y och φ är lika. Laplaceoperatorn blir

$$\Delta = \cosh^2 y\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\,.$$

6. Se kompendiet.