Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 27 oktober 2014, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Tobias Wenger, tel. 0730-381453, och Sten Salomonson, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Rättningsgranskning månd. 24 november kl. 12-13, rum O6102.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Tensorerna A_{ij} och B_{ij} ges (på matrisform) av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} .$$

Beräkna vektorn $V_i = \epsilon_{jkl} A_{ij} B_{kl}$.

b) Vad är värdet av integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-1)e^{-x}dx$?

c) Vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$, där $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, och ytan S har parametriseringen

$$\begin{aligned} \varrho &= 1 + \frac{1}{2}\cos\psi\,, \\ \varphi &= \chi\,, \\ z &= \frac{1}{2}\sin\psi\,, \end{aligned}$$

där $0 \le \psi < 2\pi$, $0 \le \chi < 2\pi$. Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$?

2. Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet

$$\vec{F} = \frac{j}{2\pi\varrho}\hat{\varphi} + \frac{j}{\pi a^2}x\hat{y}$$

då en partikel transporteras längs halvcirkeln $(x,y,z) = (a(1+2\cos\tau), 2a\sin\tau, 0)$, $0 \le \tau < \pi$.
(10 poäng)

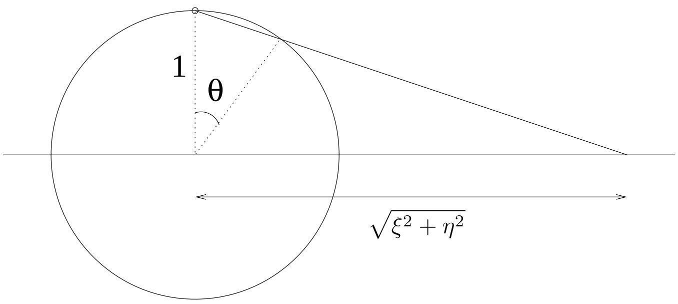
3. Ett klot med radien a är gjort av ett material med densiteten ρ, värmekapacitiviteten c och värmeledningsförmågan λ. Dess yta hålls vid temperaturen T_0. Värmeenergi tillförs med en effekt P i ett mycket litet område vid klotets centrum (origo), så att värmekälltätheten kan skrivas som $P\delta^3(\vec{r})$. När transienta temperaturvariationer har klingat ut, hur mycket större blir den totala värmeenergin i klotet, jämfört med om hela klotet hade haft temperaturen T_0?
(Värmeledningsekvationen lyder

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s\,,$$

där c är värmekapacitiviteten, ρ densiteten och s värmekälltätheten.)
(10 poäng)

4. På cirkelskivan $\varrho \le a$, $z = 0$ finns en ytladdning med ytladdningstätheten $\sigma(\varrho,\varphi) = \frac{Q}{2\pi a\varrho}$. (Trots att σ är oändlig i origo är den totala laddningen ändlig.) Bestäm den elektrostatiska potentialen på z-axeln från denna ytladdning. Gör någon rimlighetskontroll av svaret.
(10 poäng)

5. Koordinater för $\mathbb{R}^3$ definieras genom att man använder den vanliga radien (avståndet från origo), men ersätter vinklarna θ och φ med (dimensionslösa) koordinater ξ och η, som fås via en s.k. stereografisk projektion. Denna fås genom att man utgår från en enhetssfär, och definierar (ξ, η) som Cartesiska koordinater för den punkt i horisontalplanet genom enhetssfärens mittpunkt som skärs av en linje genom nordpolen ($\theta = 0$) och den punkt på sfären som har vinkelkoordinater θ och φ. Detta illustreras i figuren nedan.



Visa att systemet $r\xi\eta$ är ortogonalt och har skalfaktorerna

$$h_r = 1\,,$$
$$h_\xi = h_\eta = \frac{2r}{1+\xi^2+\eta^2}\,.$$

Skriv ned ett uttryck för Laplaceoperatorn på ett skalärt fält i $r\xi\eta$-systemet.
(10 poäng)

6. Den kvantmekaniska vågfunktionen $\Psi(\vec{r},t)$ är ett komplext fält som uppfyller Schrödingerekvationen

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = 0$$

i ett område där den potentiella energin för en partikel är noll. Här är m massan för partikeln och $\hbar$ Plancks konstant (dividerad med 2π). Schrödingerekvationen har våglösningar. Vilken dispersionsrelation (dvs. relation mellan vinkelfrekvens ω och vågtal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) uppfyller dessa lösningar?
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 27 oktober 2014

---

1. a) 0 (nollvektorn)

   b) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$

   c) 0

2. Arbetet ges av tangentlinjeintegralen av $\vec{F}$ längs kurvan. Den första delen av $\vec{F}$ är fältet från en virveltråd på z-axeln med styrka j. Kurvan går en vinkel π runt z-axeln, så bidraget från den första termen är $\frac{1}{2}j$. Den andra termen är reguljär. Man kan använda Stokes sats, men behöver då sluta kurvan. Det kan göras med den raka sträckan på x-axeln mellan $(-a,0,0)$ och $(3a,0,0)$. På denna extra kurva är $\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$. Rotationen av den andra (reguljära) delen av $\vec{F}$ är $\frac{j}{\pi a^2}\hat{z}$. Bidraget från den andra delen av $\vec{F}$ till arbetet är då enligt Stokes sats $\frac{j}{\pi a^2}\cdot\frac{1}{2}\pi(2a)^2=2j$. Det eftersökta arbetet är $\frac{5}{2}j$.

3. Den stationära temperaturfördelningen uppfyller

$$\Delta T=-\frac{s}{\lambda}=-\frac{P}{\lambda}\delta^3(\vec{r})$$

   Utanför origo gäller alltså Laplaces ekvation, vars sfäriskt symmetriska lösningar ges av $T=A+\frac{B}{r}$. Konstanten B bestäms av punktkällans styrka till $B=\frac{P}{4\pi\lambda}$, och A bestäms sedan av randvillkoret vid $r=a$ till $A=T_0-\frac{P}{4\pi\lambda a}$. Lösningen är alltså

$$T=T_0+\frac{P}{4\pi\lambda}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\Big)\,.$$

   Skillnaden i energitäthet (jämfört med temperaturen T_0) ges lokalt ges av $c\rho(T-T_0)$, och för att få den totala energiskillnaden skall detta integreras över klotet. Resultatet är

$$E-E_0=\frac{c\rho a^2P}{6\lambda}\,.$$

4. Man kan använda Greensfunktionsmetoden. Ett litet areaelement med polära koordinater ϱ' och φ' på cirkeln har laddningen

$$dq=\sigma dA'=\frac{Q}{2\pi a}d\varrho' d\varphi'\,.$$

   Dess avstånd från en punkt på z-axeln är $\sqrt{\varrho'^2+z^2}$. Bidraget till potentialen i $(0,0,z)$ blir

$$d\phi(0,0,z)=\frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\varrho'^2+z^2}}=\frac{Qd\varrho' d\varphi'}{8\pi^2\epsilon_0 a\sqrt{\varrho'^2+z^2}}\,.$$

   Integration över cirkelytan ger

$$\phi(0,0,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\log\frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{|z|}\,.$$

En kontroll kan bestå i att betrakta potentialen då $|z| >> a$. Då är $\log \frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{|z|} = \frac{a}{|z|} + O((\frac{a}{|z|})^2)$, och alltså $\phi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|z|}$. Eftersom den totala laddningen på cirkelskivan är Q stämmer det överens med resultatet för en punktkälla.

5. Man behöver först etablera någon relation mellan de nya och gamla koordinaterna. Genom att dela vinkeln θ i figuren på hälften och använda att denna bisektris skär den "lutande" sträckan i figuren vinkelrätt, kan man använda likformighet mellan rätvinkliga trianglar för att komma fram till t.ex. $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$, dvs. $\cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Det nya koordinatsystemet bestäms av relationerna

$$\begin{aligned} \xi &= \cot\frac{\theta}{2}\cos\varphi\,, \\ \eta &= \cot\frac{\theta}{2}\sin\varphi\,, \\ r &= r\,. \end{aligned}$$

Ortogonaliteten kan visas genom att beräkna gradienterna av de nya koordinaterna (vilket får göras i sfäriska koordinater). T.ex. får man

$$\nabla\xi = -\frac{1}{2r\sin^2\frac{\theta}{2}}(\hat{\theta}\cos\varphi + \hat{\varphi}\sin\varphi)\,.$$

Skalfaktorer fås enligt $h_\xi = \frac{1}{|\nabla\xi|}$ osv., vilket ger

$$h_\xi = h_\eta = 2r\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2r}{1+\xi^2+\eta^2}\,.$$

Laplaceoperatorn konstrueras som vanligt, och blir

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1+\xi^2+\eta^2)^2}{4r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\,.$$

6. En våglösning har formen $\Psi = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. Direkt insättning i den givna differentialekvationen ger $(i\hbar)(-i\omega) + \frac{\hbar^2}{2m}(i\vec{k})\cdot(i\vec{k}) = 0$, dvs. $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$.