Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 20 augusti 2014, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 031-7723181 eller 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15 och 17.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad blir resultatet av integralen $\oint_S \frac{z\hat{z}}{r^3} dS$, där S är en sfär med mittpunkt i origo?

b) Beräkna $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}p_k p_l$, där $\vec{p} = \hat{z}$.

c) Vad är värdet av integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är en cirkel i xy-planet med radien a och centrum i origo genomlöpt i positiv led, och $\vec{F}$ är fältet från två raka virveltrådar, belägna på linjerna $\vec{r} = (t, 0, t)$ respektive $\vec{r} = (-t + a, -a, t)$, vardera med styrkan j riktad åt det håll som parametern t ökar?

2. En volym begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ och planen $z = -a$ och $z = 2a$. Beräkna $\int \vec{A} \cdot d\vec{S}$ över begränsningsytan om

$$\vec{A} = \frac{xz}{x^2 + y^2}\hat{x} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\hat{y}\,.$$

(10 poäng)

3. Ett koordinatsystem med koordinater u och v relateras till Cartesiska koordinater x och y så att både u och v är kvadratiska former i x och y, dvs. linjära funktioner av x^2, xy och y^2. Dessutom är koefficienterna för x^2 i u och för y^2 i v båda 1. Om man kräver att uv-systemet skall vara ortogonalt, visa att koefficienterna för $2xy$ i u och v antingen har summan 0 eller produkten 1, och att de möjliga koordinatsystemen är

$$u = x^2 + 2\alpha xy + \alpha^2 y^2\,,$$
$$v = \alpha^2 x^2 - 2\alpha xy + y^2\,,$$

och

$$u = x^2 + 2\alpha xy - y^2\,,$$
$$v = -x^2 + 2\alpha^{-1} xy + y^2\,,$$

där α är konstant. Ge uttrycket för Laplaceoperatorn verkande på ett skalärt fält $\phi(u, v)$ i det första av de två fallen.
(10 poäng)

4. Ett vektorfält ges av $\vec{F} = -\nabla\phi$, där
$$\phi = \phi_0 \frac{z^\alpha}{r^\beta} \,.$$
Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F}$. Skissa fältlinjerna för några värden på konstanterna α och β.
(10 poäng)

5. Den elektrostatiska potentialen innanför en sfär $r = a$ uppfyller Poissons ekvation med en konstant laddningstäthet ρ_0, och har Dirichlets randvillkor då $r = a$: $\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos\theta$. Bestäm potentialen innanför sfären.
(10 poäng)

6. Visa att Poissons ekvation i en volym V med villkor på ∂V givna av antingen Dirichlets eller Neumanns randvillkor har en unik lösning (i det senare fallet sånär som på en additiv konstant).
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 20 sugusti 2014, 14.00-18.00

---

1. a) 0 (nollvektorn)

   b) 2

   c) j

2. Man kan gå tillväga på olika sätt.

   1) Beräkning med Gauss sats. Vektorfältet $\vec{A} = \frac{z}{\varrho}\hat{\varrho}$ är divergensfritt utanför z-axeln. Dock har det (jämför fältet från en linjekälla med konstant källtäthet) en linekälla på z-axeln med täthet $2\pi z$. Den totala inneslutna källan fås genom att integrera denna linjekälltäthet från $z = -a$ till $z = 2a$, med resultatet $3\pi a^2$, vilket är integralens värde.

   2) Direkt beräkning av integralen fungerar också, t.ex. med z och φ som parametrar.

3. Vi har alltså att undersöka koordinatsystem som beskrivs av

$$u = x^2 + 2\alpha xy + ay^2 \,,$$
$$v = bx^2x^2 + 2\beta xy + y^2 \,.$$

Om systemet är ortogonalt skall ∇u och ∇v vara ortogonala. Direkt beräkning ger:

$$\frac{1}{2}\nabla u = (x + \alpha y, \alpha x + ay) \,,$$
$$\frac{1}{2}\nabla v = (bx + \beta y, \beta x + y) \,,$$

och alltså

$$\frac{1}{4}\nabla u \cdot \nabla v = \ldots = (b + \alpha\beta)x^2 + (\beta + \alpha b + \alpha + a\beta)xy + (a + \alpha\beta)y^2 \,.$$

Detta skall vara 0 överallt. Koefficienterna för x^2 och y^2 ger $a = b = -\alpha\beta$. Insättning i koefficienten för xy ger sedan

$$0 = \beta - \alpha^2\beta + \alpha - \alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta) \,.$$

De två klasserna av system som ges i uppgiften fås då den ena eller andra av faktorerna är 0.

I det första fallet har vi alltså

$$u = (x + \alpha y)^2 \,,$$
$$v = (\alpha x - y)^2 \,.$$

Detta ger skalfaktorer enligt

$$\frac{1}{h_u^2} = |\nabla u|^2 = 4(1 + \alpha^2)(x + \alpha y)^2 = 4(1 + \alpha^2)u \,,$$
$$\frac{1}{h_v^2} = |\nabla v|^2 = 4(1 + \alpha^2)(\alpha x - y)^2 = 4(1 + \alpha^2)v \,.$$

Laplaceoperatorn blir

$$\Delta = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right] = 4(1+\alpha^2)\sqrt{uv}\left[\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial}{\partial v}\right] .$$

4. Potentialen kan skrivas $\phi = r^{\alpha-\beta}\cos^\alpha\theta$, och vektorfältet blir

$$\vec{F} = -\nabla\phi = \hat{r}(\alpha-\beta)r^{\alpha-\beta-1}\cos^\alpha\theta - \hat{\theta}\alpha r^{\alpha-\beta-1}\sin\theta\cos^{\alpha-1}\theta\,.$$

Ekvationen för fältlinjerna är $\frac{d\vec{r}}{dt} = C(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$, där $\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r}\frac{dr}{dt} + \hat{\theta}r\frac{d\theta}{dt}$ (det är klart att fältlinjerna kommer att ha φ =konstant. Genom att dividera komponenterna i r och θ-led fås differentialekvationen

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}cot\theta\,.$$

Detta är en separabel differentialekvation med lösningarna

$$r(\theta) = C\sin^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\theta\,.$$

(Detta skall också ritas för några värden på $\frac{\beta}{\alpha}$.)

5. Vi har att lösa ekvationen $\Delta\phi = -\rho_0$, med randvillkoret $\phi(a,\theta,\varphi) = \phi_0\cos\theta$. Vi kan dela upp problemet i två delar genom $\phi = \phi_p + \phi_h$, där $\Delta\phi_p = -\rho_0$, $\phi_p(a,\theta,\varphi) = 0$ och $\Delta\phi_h = 0$, $\phi_h(a,\theta,\varphi) = \phi_0\cos\theta$. Det är rimligt att tro att phi_p endast har vinkelberoendet 1, och att ϕ_h endast har vinkelberoendet $\cos\theta$. Med denna ansats kan man använda uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater, och lösa för det radiella beroendet. Singulära lösningar kan inte accepteras (de skulle svara mot källor eller dipoler i origo). Resultatet är $\phi_p = \frac{1}{6}\rho_0(a^2-r^2)$, $\phi_h = \phi_0\frac{r}{a}\cos\theta$.

6. Se kompendiet.