Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 14 januari 2014, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Sten Salomonson, tel. 031-7869144 eller 0768-179321, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges).
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

   a) Vad är värdet av integralen $\oint_S \frac{z\hat{z}}{r^3} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med mittpunkt i origo?

   b) Matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ ges av
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Beräkna $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}A_{ik}B_{jl}$, där ϵ är den två-dimensionella Levi–Civita-tensorn.

   c) Vad är värdet av integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är en cirkel i xy-planet med radien b och centrum i origo genomlöpt i positiv led, och $\vec{F}$ är fältet från två raka virveltrådar, belägna på linjerna $\vec{r} = (t, 0, t)$ respektive $\vec{r} = (-t, 0, t)$, vardera med styrkan j riktad åt det håll som parametern t ökar (i positiv led relativt $\hat{z}$)?

2. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av
$$\vec{F} = -F_0 \frac{a^2}{r^2}\hat{r} + F_0 \left(\frac{z}{a} + 3\frac{z^2}{a^2}\right)\hat{z}\,.$$
   Beräkna normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är den koniska ytan $\varrho = a - z$, $0 \leq z \leq a$, med normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$.
(10 poäng)

3. Ett koordinatsystem med koordinater u_1 och u_2 relateras till Cartesiska koordinater via relationerna
$$u_1 = x\,,$$
$$u_2 = x + y\,.$$
   Visa att systemet inte är ortogonalt. Beräkna och rita både $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ och ∇u_i.
(10 poäng)

4. Ett kvadrupolfält ges av $\vec{F} = -\nabla\phi$, där

$$\phi = \phi_0 \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\,.$$

Bestäm och rita fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F}$. (Ev. hjälp: $\frac{d}{du}\log(\sin^2 u \cos u) = \frac{3\cos^2 u - 1}{\sin u \cos u}$.)
(10 poäng)

5. Den elektrostatiska potentialen innanför en sfär $r = a$ uppfyller Poissons ekvation med en punktladdning som källa,

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{r})\,,$$

och uppfyller Dirichlets randvillkor då $r = a$: $\phi(a, \theta, \varphi) = \frac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Bestäm potentialen innanför sfären.
(10 poäng)

6. Den komplexa vågfunktionen ψ för en kvantmekanisk partikel uppfyller Schrödingerekvationen,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi\,,$$

där $V(\vec{r})$ är en potential (en given reell funktion).

Sannolikhetstätheten för partikeln ges av $\rho = |\psi|^2$, och sannolikhetsströmmen är $\vec{\jmath} = -\frac{i\hbar}{2m}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi})$ ($\bar{\psi}$ betecknar komplexkonjugatet av ψ). Visa att sannolikhet är bevarad, dvs. att ρ och $\vec{\jmath}$ uppfyller en kontinuitetsekvation.
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 14 januari 2014, 08.30-12.30

---

1. a) $\frac{4\pi}{3}$

   b) -3

   c) $2j$

2. Den första delen av $\vec{F}$ är fältet från en punktkälla $-4\pi F_0 a^2$ i origo. Ytan tar upp rymdvinkeln 2π, så bidraget från den första termen är $-2\pi F_0 a^2$.

   Resten kan räknas ut direkt, eller m.h.a. Gauss sats. Kalla resten av $\vec{F}$ för $\vec{G}$. Då är

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{F_0}{a}\left(1 + 6\frac{z}{a}\right) .$$

   Ytan kan slutas med en cirkelskiva vid $z = 0$, och eftersom $\vec{G}$ är noll där fås ingen extra term. Bidraget till den sökta integralen fås som integralen av $\nabla \cdot \vec{G}$ över den koniska volymen, dvs.

$$\frac{F_0}{a} 2\pi \int_0^a dz \int_0^{a-z} d\varrho \varrho (1 + 6\frac{z}{a}) = \ldots = \frac{5\pi}{6} F_0 a^2 .$$

   Den sökta integralen är alltså $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{7\pi}{6} F_0 a^2$.

3. Direkt derivering ger vid handen att

$$\nabla u_1 = (1, 0) ,$$
$$\nabla u_2 = (1, 1) .$$

   Då $\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 = 1 \neq 0$ är systemet inte ortogonalt.

   Vektorerna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ kan konstrueras antingen genom att relationerna inverteras, eller genom $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \nabla u_j = \delta_{ij}$. Resultatet är

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = (1, -1) ,$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = (0, 1) .$$

   (Detta skall också ritas.)

4. Vektorfältet är

$$\vec{F} = -\nabla \phi = \phi_0 \left(3\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{r} + \frac{6\sin\theta\cos\theta}{r^4}\hat{\theta} \right) .$$

   Ekvationerns för fältlinjerna blir då

$$\frac{dr}{dt} = 3C\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4} ,$$
$$r\frac{d\theta}{dt} = 6C\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^4}$$

(samt förstås $\frac{d\varphi}{dt} = 0$). Division av de två ekvationerna ger

$$2\frac{dr}{r} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta} d\theta\,,$$

dvs.

$$d\log r^2 = d\log(\sin^2\theta\cos\theta)\,.$$

Lösningarna blir $r = k\sin\theta\sqrt{|\cos\theta|}$. (Detta skall också ritas.)

5. Eftersom de enda typerna av vinkelberoende som finns är 1 och $\cos\theta$, finns skäl att ansätta en lösning $\phi(\vec{r}) = f(r) + g(r)\cos\theta$. Då ϕ uppfyller Laplaces ekvation i området $0 < r < a$, fås $f(r) = A + \frac{B}{r}$, $g(r) = Cr + \frac{D}{r^2}$ (efter insättning i Laplaces ekvation och användande av Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater). Koefficienten B bestäms av punktkällans styrka till $B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$. Koefficienten D är noll (ingen dipol i origo). A och C fås slutligen m.h.a. randvillkoren vid $r = a$, och hela lösningen är

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{a}{r} - 1 + \frac{r}{a}\cos\theta\right)\,.$$