Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 21 augusti 2013, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F}=\frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0=\frac{4a}{15}(\hat{x}-2\hat{y}+3\hat{z})$?

b) Den antisymmetriska tensorn A_{ij} konstrueras från en vektor $\vec{a}$ enligt $A_{ij}=\epsilon_{ijk}a_k$. För vilket värde på c gäller $A_{ij}A_{ji}=c|\vec{a}|^2$?

c) För vilka värden på talen a och b har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η, givna av

$$\begin{aligned}\xi &= x^2-y^2 \quad ,\\ \eta &= a(x+y)^2+b(x-y)^2 \quad ,\end{aligned}$$

ortogonala basvektorer?

2. Kraftfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r})=F_0\left(\frac{x-y}{b}-\frac{by}{x^2+y^2}\,,\,\frac{y-z}{b}+\frac{bx}{x^2+y^2}\,,\,\frac{z-x}{b}\right)\,.$$

Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs kurvan C: $(x,y,z)=\frac{b}{32}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\sin\alpha,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)$ då α går från 0 till 2π.
(10 poäng)

3. Betrakta distributionen

$$\Delta_s(x)=s\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x-ns)\,.$$

Diskutera i vilken mening, och för vilka värden på s, $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,f(x)\Delta_s(x)$ kan vara en bra approximation av $\int_0^{\infty}dx\,f(x)$. Testa med $f(x)=e^{-x}$.
(10 poäng)

4. Temperaturfördelningen på ytan av en sfär med radie a ges av $T = T_0 + \tau \cos\theta$. Innanför sfären finns en värmeenergikälla med den konstanta tätheten s_0. Bestäm den statiska temperaturfördelningen innanför sfären.
(10 poäng)

5. På en sfär med radien a befinner sig en elektrisk ytladdning $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Bestäm den elektrostatiska potentialen och det elektriska fältet för alla punkter på z-axeln. Åskådliggör fältet i någon graf, och kontrollera att eventuella diskontinuiteter stämmer.
(10 poäng)

6. Maxwells ekvationer lyder

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0\,, \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0\,, \\
\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}\,.
\end{aligned}
$$

Visa att de elektriska och magnetiska fälten kan uttryckas i termer av en skalär potential och en vektorpotential, och ge uttrycken för fälten i termer av potentialerna. Vilka ekvationer uppfyller potentialerna?
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 21 augusti 2013, 14.00-18.00

---

1. a) q

   b) $c = -2$

   c) $a + b = 0$

2. Kurvan är en cirkel med radien $b/32$. Normalen till cirkelskivan som har cirkeln som rand är $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

   Rotationen av den reguljära delen av $\vec{F}$ är $\frac{F_0}{b}(1, 1, 1)$. Eftersom denna är vinkelrät mot $\vec{n}$ blir bidraget (via Stokes sats) noll.

   Den singulära delen beskriver en virveltråd längs z-axeln med styrkan $2\pi F_0 b$. C omsluter z-axeln en gång i positiv riktning. Integralens värde är $2\pi F_0 b$.

3. Integralen blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\Delta_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s f(ns)\,.$$

   Detta kan ses som en Riemannsumma för integralen $\int_0^\infty f(x)dx$. Under "normala" förutsättningar bör approximationen bli bättre ju mindre s är, och för snälla funktioner fås integralen som ett gränsvärde. Detta verifieras i exemplet, som ger en geometrisk serie, vars gränsvärde är 1 då $s \to 0$.

4. Löses lämpligen m.h.a. en ansats av typen variabelseparation. Se uppg. 10.2 i boken.

5. Löses lämpligen med Greensfunktionsmetod. Se uppg. 9.10 i boken, men man får tänka på att ha med ϵ_0.