Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 23 oktober 2012, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231 eller 168437, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Rättningsgranskning tisd. 13 november, rum O6102.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Beräkna vektorn $A_i = \epsilon_{ijk}\delta_{mn}B_{jm}C_{nk}$, där B_{ij} och C_{ij} är matriselementen för matriserna

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Beräkna $\int_{-\tau}^{\tau} \delta'(t) e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt$.

c) Beräkna linjeintegralen $\int_C x\hat{y} \cdot d\vec{r}$, där C är kurvan $\vec{r} = (a\cos t, b\sin t, c)$, $0 \le t < 2\pi$. a, b och c är konstanter.

2. Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} F_0 a^2 \frac{\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}}{|\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}|^3}\,, & z > 0 \\ \frac{F_0}{a}\left(z\hat{z} + a(\hat{x} - \hat{y})\right)\,, & z < 0 \end{cases}$$

och S är begränsningsytan till volymen $\varrho < a$, $-a < z < a$.
(10 poäng)

3. Härled kontinuitetsekvationen. Var tydlig med vilka eventuella antaganden som används.
(10 poäng)

4. Ett tvådimensionellt kroklinjigt koordinatsystem med koordinater ξ och η ges genom relationerna

$$x = \frac{a\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta}$$
$$y = \frac{a\sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta}$$

Visa att systemet är ortogonalt och bestäm dess skalfaktorer. Relationerna ovan innebär (efter utnyttjande av diverse trigonometriska och hyperboliska identiteter) att ekvationerna

$$x^2 + (y - a\cot\eta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\eta}$$
$$(x - a\coth\xi)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\xi}$$

är uppfyllda. Skissera systemets koordinatlinjer.
(10 poäng)

5. Man vill ta reda på hur värme läcker ut genom en husvägg. Väggen har tjockleken L och värmeledningsförmågan λ. Inomhustemperaturen är T_1 och utomhustemperaturen T_0. Väggens insida håller samma temperatur som råder inomhus, T_1. Vid väggens utsida visar det istället sig att värmeströmmen $\vec{j}$ ut ur väggen är proportionell mot skillnaden mellan väggens utsidas temperatur och utomhustemperaturen, så att $\vec{n} \cdot \vec{j} = \alpha(T - T_0)$. Bestäm temperaturfördelningen i väggen. Vilken temperaturen har väggens utsida?
(Det får förutsättas att värmeströmmen är proportionell mot gradienten av temperaturen med proportionalitetskonstant $-\lambda$ och att T uppfyller den tidsoberoende värmeledningsekvationen.)
(10 poäng)

6. En punktladdning Q är belägen i $\vec{r} = b\hat{z}$, och man söker potentialen från denna laddning innanför sfären $r = a$ $(a > b)$, då randvillkoret är att den elektriska potentialen ϕ är noll på randen $r = a$. Visa att denna potential fås genom att introducera en fiktiv spegelladdning $-\frac{a}{b}Q$ i punkten $\vec{r} = \frac{a^2}{b}\hat{z}$. Ge ett uttryck för den ytladdningsfördelning som induceras på sfären $r = a$, om man antar att $\phi = 0$ även för $r > a$. Kontrollera att den totala inducerade laddningen på sfären är $-Q$.
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 23 oktober 2012, 8.30-12.30

Granskning tisdag 13 november 12-13, rum O6102.

---

1. a) $-2\delta_{i2}$

   b) $\frac{1}{\tau}$ (Detta var det ursprungligen givna svaret. Jag har dock fått påpekat för mig att det bygger på att $\tau > 0$. Om $\tau < 0$ är resultatet $-\frac{1}{\tau}$.)

   c) πab

2. Fältet $F_0 a^2 \frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z}}{|\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z}|^3}$ representerar en punktkälla med $q = 4\pi F_0 a^2$ belägen i $(0, 0, \frac{a}{2})$. Den bidrager till integralen med $4\pi F_0 a^2$.

   Fältet $\frac{F_0}{a}(z\hat{z} + a(\hat{x} - \hat{y}))$ har en rymdkälla med $\rho = \frac{F_0}{a}$ för $z < 0$. Rymdkällans bidrag till integralen är $\frac{F_0}{a} \cdot \pi a^2 \cdot a = \pi F_0 a^2$.

   Dessutom är fältet diskontinuerligt över xy-planet. Diskontinuiteten i dess z-komponent, dvs. ytladdningen, är

$$F_0 a^2 (-\frac{a}{2}) \frac{1}{(\varrho^2 + \frac{a^2}{4})^{3/2}} \, .$$

   Integreras detta över cirkelskivan $\varrho < a$ fås den total laddningen på ytan. Resultatet, och ytladdningens bidrag till integralen, är $-2\pi F_0 a^2 (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$.

   Integralens totala värde är alltså $\pi F_0 a^2 (3 + \frac{2}{\sqrt{5}})$.

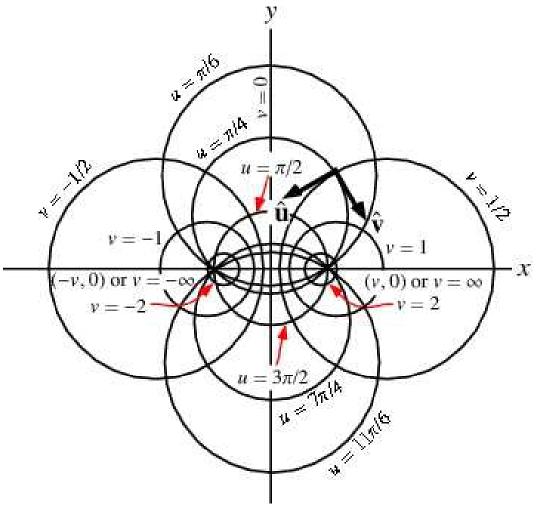
4. Bilda $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}(1 - \cosh\xi\cos\eta, -\sinh\xi\sin\eta)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{a}{(\cosh\xi - \cos\eta)^2}(-\sinh\xi\sin\eta, \cosh\xi\cos\eta - 1)$$

   Uppenbarligen är $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = 0$, så systemet är ortogonalt. Skalfaktorerna är

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta} \, .$$

   Med hjälp av de givna relationerna ser man att både ξ och η-linjerna är cirklar. De skär varandra vinkelrätt. Varje ξ-linje ("η-yta") går genom punkterna $(\pm a, 0)$. De små cirklarna runt dessa punkter är "ξ-ytor" för mycket stora positiva och negativa ξ.



(Bilden är lånad från http://mathworld.wolfram.com)

5. Problemet är endimensionellt. Låt en x-koordinat vara 0 vid innerväggen och L vid ytterväggen. Lösningen till den stationära värmeledningsekvationen är att temperaturen varierar linjärt i x, och med villkoret att $T(0) = T_1$ fås $T(x) = T_1 - kx$. Värmeströmmen blir då $j = \lambda k$. Villkoret vid $x = L$ lyder alltså $\lambda k = \alpha(T_1 - kL - T_0)$, så k tar värdet $k = \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{\lambda + \alpha L}$. Vid ytterväggen är temperaturen

$$T(L) = \frac{\lambda T_1 + \alpha L T_0}{\lambda + \alpha L} = \frac{T_1 + \frac{\alpha L}{\lambda} T_0}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda}}$$

(det ser ut som ett viktat medelvärde av T_1 och T_0).

Dimensionskontroll: Eftersom $\vec{j} = -\lambda \nabla T$ och $\vec{n} \cdot \vec{j} = \alpha(T - T_0)$, har λ och αL samma dimension.

Rimlighetskontroll: Det räcker att undersöka beroendet av den dimensionslösa parametern $\frac{\alpha L}{\lambda}$. Ett stort värde svarar mot att värmeutstrålningen är stor (även för relativt små temperaturskillnader), eller ekvivalent att värmeledningsförmågan är liten. Randvillkoret ser ut att effektivt bli Dirichlet, och mycket riktigt är $T(L) \approx T_0$. I det motsatta fallet är värmeutstrålningen liten (enligt det dimensionslösa måttet), randvillkoret blir nästan Neumann, och temperaturen vid ytterväggen är $T(L) \approx T_1$.

6. Med lägen och laddningar enligt uppgiftstexten, och sedan avstånden uttryckts med cosinusteoremet, är potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} r\cos\theta}} \right] .$$

För att ta reda på ytladdningen behöver vi den radiella komponenten av det elektriska fältet, som är

$$E_r(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - b\cos\theta}{(r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a}{b} \frac{r - \frac{a^2}{b}\cos\theta}{(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} r\cos\theta)^{3/2}} \right] .$$

Vid radien $r = a$ blir den

$$E_r|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} .$$

Ytladdningsfördelningen σ är $-\epsilon_0$ gånger detta. Den totala laddningen Q' på ytan $r = a$ fås genom integration över sfären:

$$Q' = \int_{r=a} \sigma dS = -\frac{Q}{4\pi}\frac{a^2 - b^2}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} = \ldots = -Q\,.$$