Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Tisdagen 10 januari 2012, 8.30-12.30, V
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 b(y\hat{x}+x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t < 2\pi$.

b) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x-\pi)\sin x\, dx$.

c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\phi(\vec{r}) = \frac{\sin^2\theta}{r^3}$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $(x,y,z) = (1,0,0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten ifråga, det spelar ingen roll, bara det framgår vilket.)

2. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av
$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} A|\vec{r}-a\hat{z}|^{-3}(\vec{r}-a\hat{z}) + B\hat{x}\,, & z > 0\,,\\ Cz\hat{z}\,, & z \le 0\,, \end{cases}$$
där A, B, C och a är konstanter. Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över en sfär med radien $2a$ och centrum i origo.
(10 poäng)

3. Maxwells ekvationer lyder
$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,,$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\,,$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0\,,$$
$$\nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}\,.$$
Visa att $\vec{B}$-fältet uppfyller vågekvationen i frånvaro av laddningar och strömmar. Visa, för en plan våg, att $\vec{B}$ är vinkelrät mot vågens rörelseriktning.
(10 poäng)

4. Ett koordinatsystem $uv\varphi$ ges av $\vec{r} = a\left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, (u^2 - v^2)/2\right)$, där $0 \leq u, v < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ och a är en konstant av dimension längd. Bestäm dess skalfaktorer och koordinatytor, samt ge ett uttryck för Laplaceoperatorn verkande på ett skalärt fält $\Psi(u, v, \varphi)$.
(10 poäng)

5. Ett material med värmeledningsförmågan λ [W/mK] innehåller en radioaktiv isotop vars sönderfall ger en uppvärmning som av en värmekälla med en konstant rymdkälltäthet s_0 [W/m^3]. Ett stycke av materialet formas till ett klot med radien R och och kopplas till en termostat vilken reglerar temperaturfördelningen T vid ytskiktet så att denna uppfyller

$$T\left(R, \theta, \varphi\right) = T_0\left(1 + \frac{1}{3}\cos\theta\right) ,$$

där θ och φ är sfäriska vinkelkoordinater. Bestäm den statiska temperaturfördelningen i klotet.
(10 poäng)

6. Visa att rörelseenergin i en roterande stel kropp med densiteten ρ ges av $T = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j$, där $\vec{\omega}$ är rotationsvektorn, och $I_{ij} = \int_V dV\, \rho(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$. (Kroppen roterar kring origo.)
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 10 januari 2012, 8.30-12.30

---

1. a) 0

   b) $\frac{1}{2}$

   c) $-\hat{x}\,(=-\hat{r})$

2. Fältet har en punktkälla med styrkan $4\pi A$ i $\vec{r}=a\hat{z}$, som ligger innanför ytan. Den enda rymdkällan är för $z<0$, där $\nabla\cdot\vec{F}=C$. Dessutom kan det finnas en ytkälla vid $z=0$. Den bestäms av diskontinuiteten hos fältets normalkomponent, dvs. z-komponent. Endast delen av $\vec{F}$ med koefficienten A bidrager, och ytkällans styrka är
$$\sigma=-\frac{Aa}{(\varrho^2+a^2)^{3/2}}\,.$$
Hela integralen ges av den totala källan innanför sfären. Punktkällan bidrager $4\pi A$. Rymdkällan ger $\frac{1}{2}\frac{4\pi(2a)^3}{3}C$. Ytkällan, slutligen, får integreras över cirkelskivan med radien $2a$, med resultatet $-2\pi A(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Värdet av integralen är
$$\int\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=2\pi A\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{16}{3}\pi a^3 C\,.$$
Alternativt kan bidraget från "A-termen" räknas ut genom att ta reda på hur stor rymdvinkel den övre halvan av sfären upptar, sett från punktkällan. Genom att lägga en sfär med radien $a\sqrt{5}$ kring rymdkällan, som skär den ursprungliga sfären i xy-planet, ser man att cirkeln i xy-planet svarar mot en vinkel θ_0 med $\cos\theta_0=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Den sökta rymdvinkeln är därför $2\pi\int_o^{\theta_0}\sin\theta d\theta=2\pi(1+\frac{1}{\sqrt{5}})$.

4. $h_u=a\sqrt{u^2+v^2}$
$h_v=a\sqrt{u^2+v^2}$
$h_\varphi=auv$
u-yta: $z=-\frac{x^2+y^2}{2au^2}+\frac{u^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen nedåt $z_{\max}=u^2a/2$.
v-yta: $z=\frac{x^2+y^2}{2av^2}-\frac{v^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen uppåt $z_{\min}=-v^2a/2$.
φ-yta: $\tan\varphi=\frac{y}{x}$, halvplan från z-axeln.
Laplaceoperatorn ges av
$$\Delta=\frac{1}{a^2(u^2+v^2)}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}v\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

5. Värmeledningsekvationen (utan tidsberoende) blir Poissons ekvation, $\Delta T=-\frac{s_0}{\lambda}$. Det enda vinkelberoendet är $\cos\theta$ i randvillkoret, så det är rimligt att "gissa" att inga andra funktioner av θ och φ dyker upp i lösningen. Vi använder separationsmetoden, och ansätter $T=f(r)+g(r)\cos\theta$. Insättning av uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater ger
$$\Delta T=\frac{1}{r^2}(r^2f')'+\frac{1}{r^2}(r^2g')'\cos\theta-\frac{2}{r^2}g\cos\theta\,.$$

Ekvationerna för f och g blir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}(r^2 f')' = -\frac{s_0}{\lambda}\,, \\
&\frac{1}{r^2}(r^2 g')' - \frac{2}{r^2} g = 0\,.
\end{aligned}$$

Lösningarna är

$$\begin{aligned}
&f(r) = A - \frac{s_0}{6\lambda} r^2\,, \\
&g(r) = Br\,,
\end{aligned}$$

där vi har slängt bort singulära lösningar. Matchning med randvillkoret ger $A = T_0 + \frac{s_0}{6\lambda} R^2$, $B = \frac{T_0}{3R}$. Temperaturfördelningen är

$$T = \frac{s_0}{6\lambda}(R^2 - r^2) + T_0 \left(1 + \frac{r}{3R} \cos\theta\right)\,.$$