Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Torsdagen 25 augusti 2011, 14.00-18.00, V
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} + x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan $C$ parametriseras enligt $(x,y,z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t < 2\pi$.

b) Skriv om uttrycket $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ utan kryssprodukter.

c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\psi(\vec{r}) = (1 + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + 3z^2)^{-1}$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $\vec{r} = (-1,-1,-1)$ är maximal.

2. Kraftfältet $\vec{F}$ ges av
$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \frac{a^3}{x^3}\hat{y}\,.$$
Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs den gren av hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ som har $x > 0$, då den genomlöps från $y = -\infty$ till $y = \infty$.
(10 poäng)

3. Beräkna normalytintegralen av
$$\vec{F} = F_0 \frac{a^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x, y, z - \frac{z}{a}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{a^2}\right)$$
över ytan $x^2 + y^2 = (z-4a)^2$, $0 \le z \le 4a$. $F_0$ och $a$ är konstanter.
(10 poäng)

v.g.v $\longrightarrow$

4. Visa att det elektriska fältet svarande mot den elektrostatiska potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q_{ij} x^i x^j}{4\pi\epsilon_0 r^5} ,$$

där $Q_{ij}$ är matriselementen i matrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}qa^2 & 0 \\ \frac{1}{2}qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

($q$ och $a$ är konstanter med dimension laddning resp. längd), löser Maxwells ekvationer utanför origo (det magnetiska fältet är noll). Gör en skiss av det elektriska fältets utseende.
(10 poäng)

5. En homogen trävägg har tjockleken 10 cm och ytan 8.0 $\mathrm{m}^2$. Inomhustemperaturen är 20°C och utomhustemperaturen 0°C, och väggens insida respektive utsida kan antas hålla dessa temperaturer. Värmeledningsförmågan för träet är c:a 0.15 $\mathrm{WK}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Hur stor effekt förloras genom värmeledning genom väggen?
(10 poäng)

6. Härled kontinuitetsekvationen för massflöde.
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Torsdagen 25 augusti 2011, 14.00-18.00

---

1. a) 0

   b) $(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

   c) $\frac{1}{\sqrt{91}}(1,3,9)$

2. Kurvan kan parametriseras som $(x,y)=a(\cosh t,\sinh t)$. (Det finns förstås andra sätt, t.ex. kan $y$ användas som parameter.) Då har man

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_0\frac{1}{\cosh^3 t}(0,1)\cdot a(\sinh t,\cosh t)dt=F_0 a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\cosh^2 t}=2F_0 a\,.$$

3. Fältet kan delas upp i två delar, $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, där

$$\vec{F}_1=\frac{F_0 a^2\hat{r}}{r^2}\,,\qquad \vec{F}_2=-\frac{F_0 z\hat{z}}{a}\,.$$

   Ytan $S$ är en kon med spetsen i $(0,0,4a)$, som är avhuggen (öppen nedåt) vid $xy$-planet. $\vec{F}_1$ är fältet från en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_0 a^2$. Ytan upptager rymdvinkeln $2\pi$, så bidraget till ytintegralen blir $2\pi F_0 a^2$. För $\vec{F}_2$ kan man använda Gauss sats. Slut med bottenytan, där fältet är noll. $\nabla\cdot\vec{F}_2=-\frac{F_0}{a}$, och bidraget blir detta gånger den inneslutna volymen, dvs. $-\frac{F_0}{a}\frac{1}{3}\pi(4a)^2 4a=-\frac{64\pi}{3}F_0 a^2$. Sammantaget blir hela den sökta integralen $-\frac{58\pi}{3}F_0 a^2$. Hade man valt normalen "inåt" hade man fått motsatt tecken.

4. Räkningen går bra att göra i Cartesiska koordinater, men är kanske litet enklare i sfäriska, där

$$\phi=\frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5}=\frac{qa^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{\sin^2\theta\sin 2\varphi}{r^3}\,.$$

5. Lösningen till värmeledningsekvationen är att temperaturen varierar linjärt i väggen mellan de två randvillkoren. Dess gradient är då $\nabla T=-\frac{\Delta T}{d}\hat{n}$, där $d$ är väggens tjocklek och enhetsvektorn $\vec{n}$ pekar "utåt". Värmeströmmen är $\vec{\jmath}=-\lambda\nabla T=\frac{\lambda\Delta T}{d}\hat{n}$, där $\lambda$ betecknar värmeledningsförmågan i väggen. Med totala ytan $A$ har man alltså effekten

$$P=\frac{A\lambda\Delta T}{d}\approx\frac{8\times 0.15\times 20}{0.1}\mathrm{m}^2\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km}}K\frac{1}{\mathrm{m}}\approx 240\mathrm{W}.$$