Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Måndagen 10 januari 2011, 14.00-18.00, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y, x, 0)$ och den slutna kurvan $C$ parametriseras enligt $(x, y, z) = (b\cos t, c\sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

b) Matriserna $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ och $\mathbf{Z}$ ges av

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}X_{il}Y_{jm}Z_{kn}$.

c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\psi(\vec{r}) = (1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2z^2)^{-1}$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $\vec{r} = (1, 1, 1)$ är maximal.

2. Kraftfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \left( \frac{x-y}{a} - \frac{ay}{x^2+y^2}, \frac{y-z}{a} + \frac{ax}{x^2+y^2}, \frac{z-x}{a} \right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på en partikel som transporteras längs kurvan $C$: $(x, y, z) = a(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\tau, \sin\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\tau)$ då $\tau$ går från 0 till $2\pi$.
(10 poäng)

3. På en sfär med radien $a$ befinner sig en ytladdning $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos\theta$. Bestäm det elektrostatiska fältet för alla punkter på $z$-axeln. Åskådliggör fältet i någon graf.
(10 poäng)

4. Koordinaterna $\xi$, $\eta$ och $\zeta$ definieras av

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)\,,$$
$$y = \xi\eta\,,$$
$$z = \zeta\,.$$

Visa att $\xi\eta\zeta$-systemet är ett ortogonalt högersystem. Beräkna arean av ytan $\xi = \alpha > 0$, $0 < \eta < \beta$, $0 < \zeta < \gamma$, där $\alpha$, $\beta$ och $\gamma$ är konstanter.
(10 poäng)

5. En kropp $V$ hålls värmeisolerad från omgivningen; på randen till kroppen gäller Neumanns homogena randvillkor för temperaturen. Initialt gäller $T = T_0$ i hela kroppen. Vid tiden $t = 0$ slås en värmekälla på med värmekälltätheten $s = P\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, där $P$ är en konstant och $\vec{r}_0$ ortvektorn för en punkt i kroppen. Denna värmekälla förblir sedan påslagen. Bestäm värdet av $\int_V T(\vec{r}, t)dV$ för alla tider $t > 0$.
(Värmeledningsekvationen lyder $c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T = s$, där $\lambda$ är värmeledningsförmågan, $c$ värmekapacitiviteten och $\rho$ densiteten. Dessa förutsätts vara konstanta i kroppen.)
(10 poäng)

6. Schrödingerekvationen för den komplexa vågfunktionen $\Psi$ som kvantmekaniskt beskriver en fri partikel med massan $m$ lyder

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\Psi = 0 \quad ,$$

där $\hbar$ är Plancks konstant dividerad med $2\pi$. Vilken dispersionsrelation, dvs. relation mellan vinkelfrekvens $\omega$ och vågtal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ för en plan våg leder denna ekvation till?
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Måndagen 10 januari 2011, 14.00-18.00

---

1. a) $\frac{2\pi bc}{a}F_0$

   b) 14

   c) $-\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$

2. Vektorfältet kan skrivas
$$\vec{F}=\frac{F_0}{a}\vec{r}-\frac{F_0}{a}(y,z,x)+F_0a\frac{\hat{\varphi}}{\varrho}\,.$$
Den första delen är reguljär och rotationsfri. Den andra delen har rotationen $\frac{F_0}{a}(1,1,1)$, och den tredje är fältet från en virveltråd längs $z$-axeln med styrka $2\pi F_0$.

   Kurvan är en cirkel med radien $a$ centrerad i origo. Normalvektorn till cirkelytan den begränsar är $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. Stokes sats ger att bidraget från den första delen försvinner (eftersom rotationen är noll), och att bidraget från den andra delen också försvinner (eftersom dess rotation är vinkelrät mot normalvektorn). Eftersom kurvan omsluter $z$-axeln ett varv i positiv led ger den sista delen bidraget $2\pi F_0 a$, vilket är det sökta arbetet.

3. Man kan använda en Greensfunktionsmetod. Avståndet från en punkt $(0,0,z)$ till en punkt på källan med sfärisk koordinat $\theta'$ är $\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta'}$. P.g.a. rotationssymmetri är $E_x=E_y=0$ på $z$-axeln. Potentialen ges av
$$\phi(0,0,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\frac{\sigma_0+\sigma_1\cos\theta'}{\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta'}}\,.$$
Beräkning av integralen ger
$$\epsilon_o\phi=\begin{cases}\frac{a^2\sigma_0}{z}+\frac{a^3\sigma_1}{3z^2}\,, & z>a\,;\\ a\sigma_0+\frac{\sigma_1 z}{3}\,, & -a<z<a\,;\\ -\frac{a^2\sigma_0}{z}-\frac{a^3\sigma_1}{3z^2}\,, & z<-a\,.\end{cases}$$
Derivering ger $z$-komponenten av det elektriska fältet. Man kan kontrollera att diskontinuiteterna på ytan stämmer med ytladdningen.

   De två bidragen (med $\sigma_0$ och $\sigma_1$) skisseras lämpligen var för sig. Termerna med $\sigma_0$ behöver inte räknas ut såhär, utan kan skrivas ned direkt om man vill, eftersom man har sfärisk symmetri.

4. Vi har
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}=(\xi,\eta,0)\,,\quad\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}=(-\eta,\xi,0)\,,\quad\frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}=(0,0,1)\,.$$
Dessa är ömsesidigt ortogonala. Dessutom är $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}\cdot(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta})>0$, så det är ett högersystem. Skalfaktorerna är $h_\xi=h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $h_\zeta=1$. Ytan, vars area söks, är en koordinatyta. Den beräknas då genom integralen
$$A=\int_0^\beta d\eta\int_0^\gamma d\zeta h_\eta h_\zeta=\gamma\int_0^\beta\sqrt{\alpha^2+\eta^2}=\ldots=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}+\frac{\alpha}{\beta}\log\left(\frac{\beta}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\right)\right]\,.$$

5. Neumanns homogena randvillkor säger att $\hat{n} \cdot \nabla T = 0$ på randen. Värmeströmmen över randen är alltså noll, och all värmeenergi som "skapas" i $V$ stannar därför kvar i $V$.

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V T dV = \int\limits_V \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{c\rho} \int\limits_V s dV + \frac{\lambda}{c\rho} \int\limits_V \Delta T dV \, .$$

Den sista integralen ger noll m.h.a. Gauss sats och randvillkoret: $\int\limits_V \Delta T dV = \int\limits_{\partial V} \hat{n} \cdot \nabla T dS = 0$, varför

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V T dV = \frac{1}{c\rho} \int\limits_V P \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \frac{P}{c\rho} \, ,$$

som integreras till

$$\int\limits_V T dV = T_0 V + \frac{Pt}{c\rho} \, .$$

6. Om man sätter in en planvåg $\psi = A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ i ekvationen får man $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.