Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

Lördagen den 28 oktober 2006, kl. 8.30 - 12.30.

Examinator: Henrik Johannesson, ankn. 3185, mobil 0768-237042.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Lösningarna anslås på entrédörren till Fysicum omedelbart efter skrivningens slut. Tentamensresultaten anslås i trapphuset senast den 8 november. Tentamensgranskning den 8 november kl. 12-13 i Origo 7104A.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.
Maximal bonus från datoruppgifter är 10 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras** (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ekvationerna för isotermerna (nivåkurvorna till ett temperaturfält) nära ett yttre hörn av en vägg ges av $xy/a^2 =$ konstant. Bestäm ekvationerna för fältlinjerna till vektorfältet som beskriver värmeströmmen. I vilken riktning strömmar värmen i punkten $P : (a, 3a)$?

2. Ett koordinatsystem uvw definieras av

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv + \lambda w \\ z = w \end{cases}$$

a) Bestäm λ så att koordinatsystemet blir ortogonalt, och beräkna systemets skalfaktorer. Är koordinatsystemet uvw ett höger- eller vänsterorienterat system?

b) Använd resultatet i a) till att beräkna $\nabla \times \mathbf{A}$ där

$$\mathbf{A} = \frac{2\cos u}{w}\hat{u} + \frac{2\sin v}{w}\hat{v} + w\hat{w}.$$

Kan det finnas ett magnetfält som har $\mathbf{A}$ som vektorpotential?

. *VÄND!*

3. Vektorfältet $\mathbf{A}$ och ytan S är givna i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$:

$$\mathbf{A}(\rho,\alpha,z) = A_0 a^{-1}\left(a^3(\rho^2+z^2)^{-3/2}(\rho\,\hat{\rho}+z\,\hat{z}) + \rho(1+\cos 2\alpha)\,\hat{\rho} - \rho\sin 2\alpha\,\hat{\alpha}\right)$$
$$S : \rho = 2a - z,\ z > 0.$$

Beräkna normalytintegralen av $\boldsymbol{A}$ över S.

4. En partikel rör sig längs en bana som ges av skärningskurvan mellan ytorna

$$S_1 : r\cos\theta = 1$$
$$S_2 : r^2\sin^2\theta + 2r^2\cos^2\theta = 4r\cos\theta$$

Partikeln påverkas av en kraft

$$\mathbf{F} = y^2\,\hat{x} + 2xy\,\hat{y}.$$

Ber̈kna det arbete som kraften utför på partikeln mellan punkterna $P_1 : (\sqrt{2},0,1)$ och $P_2 : (1,1,1)$.

5. Tyngdkraftsaccelerationen $\mathbf{g}(\boldsymbol{r})$ kan skrivas som $= -\nabla\phi$, där potentialfunktionen $\phi(\boldsymbol{r})$ satisfierar ekvationen

$$\nabla^2\phi = \gamma\rho,$$

där γ är en konstant och $\rho(\boldsymbol{r})$ är masstätheten. Beräkna $\mathbf{g}(\boldsymbol{r})$ när $\rho = 0$ utom i rymden mellan två sfäriska ytor med radierna $R_1 < R_2$ där $\rho = \rho_0$ =konstant.
Ledning: Behandla var för sig intervallen $0 < r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ och $r > R_2$. Utnyttja att ϕ och $\mathbf{g}$ måste vara kontinuerliga på ytorna $r = R_1$ och $r = R_2$ samt i $r = 0$.

28/10 2006

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM232

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $\vec{j} = -\lambda \nabla T = -\frac{\lambda}{a^2}(y,x)$

$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = C\vec{j} = -C\frac{\lambda}{a^2}(y,x) = (y,x)$ välj $C = -a^2/\lambda$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y \\ \frac{dy}{d\tau} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx$$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = \text{KONST.}$

HYPERBLAR

Värmeström : P: (a, 3a)

$\vec{j} = -\frac{\lambda}{a^2}(3a, a) \sim -(3,1)$ $a > 0$

2a) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u, 2v, 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-2v, 2u, 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = (0, \lambda, 1)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2u & 2v & 0 \\ -2v & 2u & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{4(u^2+v^2)}_{>0}\hat{z} \sim \hat{z}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{HÖGERSYSTEM}}$

SKALFAKTORER

$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = 1$

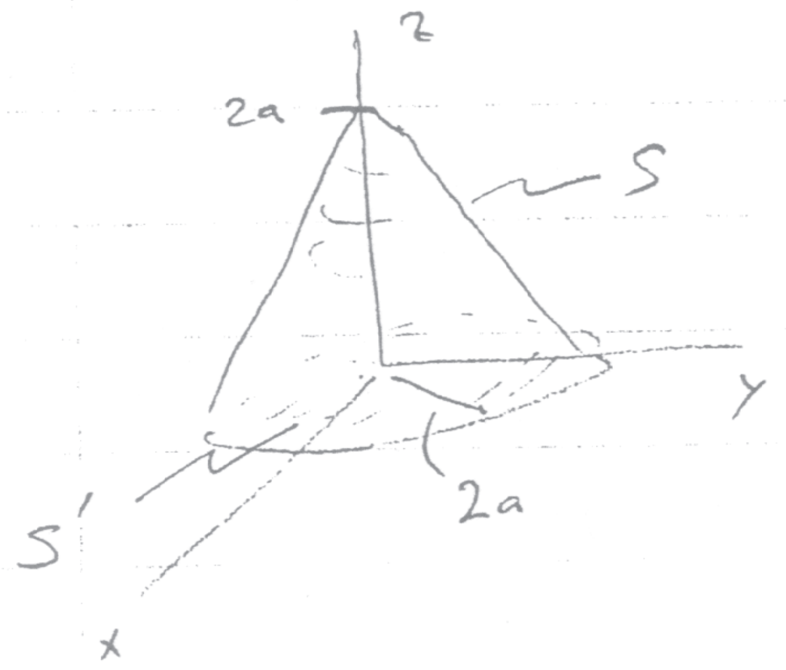
b) $$\boxed{\nabla \times \vec{A}} = \frac{1}{4(u^2+v^2)} \begin{vmatrix} 2\sqrt{u^2+v^2}\,\hat{u} & 2\sqrt{u^2+v^2}\,\hat{v} & \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 2\sqrt{u^2+v^2}\,\frac{2\cos u}{w} & 2\sqrt{u^2+v^2}\,\frac{2\sin v}{w} & w \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{2\sin v}{w^2}\hat{u} - \frac{2\cos u}{w^2}\hat{v} + \frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2} w}(u \sin v - v\cos u)\hat{w}}$$

3. $\vec{A} = \vec{A}_{sing} + \vec{A}_{reg}$, $\quad \vec{A}_{reg} = \frac{A_0}{a}\left(\rho(1+\cos 2\alpha)\hat{\rho} - \rho \sin 2\alpha\, \hat{\alpha}\right)$

$$\vec{A}_{sing} = A_0 a^2 \underbrace{(\rho^2+z^2)^{-3/2}}_{r^{-3}} \underbrace{(\rho\hat{\rho}+z\hat{z})}_{\vec{r}} = A_0 a^2 \frac{1}{r^2}\hat{r}$$

punktkällan!



$S: \rho = 2a - z, \quad 2a > z > 0$

Bidrag från $\vec{A}_{reg}$:

$$\oint_{S+S'} \vec{A}_{reg}\cdot d\vec{S} \overset{\text{GAUSS}}{=} \int_V \nabla\cdot\vec{A}_{reg}\, dV$$

$$\nabla\cdot\vec{A}_{reg} = A_0 a^{-1}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2(1+\cos 2\alpha)\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho \sin 2\alpha)\right] = \frac{2A_0}{a}.$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{A}_{reg}\cdot d\vec{S} = -\int_{S'} \underbrace{\vec{A}_{reg}\cdot(-\hat{z})}_{=0}\, dS + \frac{2A_0}{a}\underbrace{\int dV}_{\frac{1}{3}\pi(2a)^2(2a)}$$

$$= \frac{16\pi A_0 a^2}{3} \quad (1)$$

Bidrag från $\vec{A}_{sing}$:

Slut volymen med en halvsfär S'' med radien $2a$

$$\int_{S+S''} \vec{A}_{sing}\cdot d\vec{S} = 4\pi A_0 a^2$$

bidrag från punktkälla till flödet genom den slutna ytan $S+S''$

$$\Rightarrow \int_S \vec{A}_{sing}\cdot d\vec{S} = 4\pi A_0 a^2 - A_0 a^2 \int_{S''} \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\underbrace{\hat{r}\, r^2 d\varphi\, d\theta}_{d\vec{S}}$$

$$= 4\pi A_0 a^2 - 2\pi A_0 a^2 = 2\pi A_0 a^2 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \frac{16\pi A_0 a^2}{3} + 2\pi A_0 a^2 = \boxed{\frac{22\pi}{3} A_0 a^2}$$

4. $\vec{F}$ är konservativ ty $\nabla \times \vec{F} = 0$.

$\Rightarrow \exists \phi, \quad \vec{F} = -\nabla\phi$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 \Rightarrow -\phi = y^2 x + f(y,z) \\ -\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy \Rightarrow -\phi = y^2 x + g(x,z) \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi(x,y,z) = -y^2 x + h(z)$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} d\phi$$

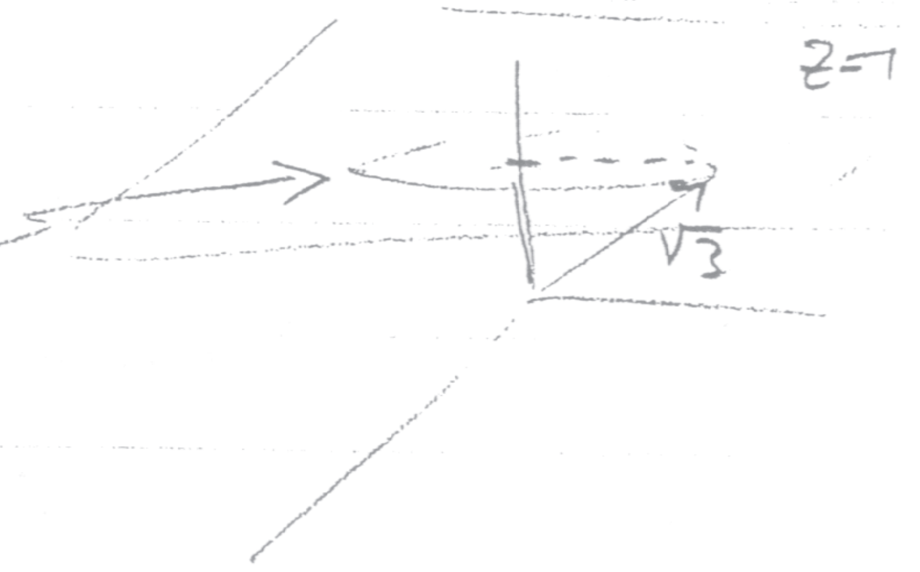
$$= \phi(P_1) - \phi(P_2)$$

$$= \phi(x=\sqrt{2}, y=0, z=1) - \phi(x=1, y=1, z=1)$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

Integralen kan också enkelt räknas via parametrisering:

KURVA: $\begin{cases} z = 1 \\ r^2 + z^2 = 4z \end{cases} \Rightarrow z = 1,\ r^2 = 3$

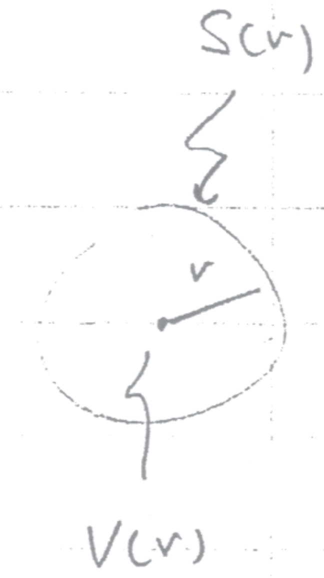


$\vec{r} = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, 1)$

5. Problemet kan behandlas på flera sätt, t.ex. genom att direkt lösa Poissonekvationen

$$\nabla^2\phi = 4\pi G \rho$$

och utnyttja kontinuitetsvillkoren för ϕ och $\vec{g} = -\nabla\phi$. Enklast är kanske att utnyttja Gauss sats:



$$\int_{V(r)} 4\pi G \rho(r)\, dV = \int_{V(r)} \nabla^2\phi\, dV = \oint_{S(r)} \nabla\phi \cdot d\vec{S}$$

$$= 4\pi r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = G \int_{V(r)} \rho(r)\, dV = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ G\rho_0 \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3), & R_1 < r < R_2 \\ G\rho_0 \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3), & R_2 < r \end{cases}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}\Big[\quad -\text{''}- \quad \Big]$$

Alternativ lösning (Poissons ekv.)

$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$

$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$

I : $0 < r < R_1$

$\nabla^2\phi(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$

$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{A}{r} + B \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{A}{r^2}\hat{r}$

II : $R_1 < r < R_2$

$\nabla^2\phi(r) = 4\pi G\rho_0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho_0$

$\Rightarrow \phi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 - \frac{C}{r} + D$

$\Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\left(\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r + \frac{C}{r^2}\right)\hat{r}$

III : $r > R_2$

$\nabla^2\phi(r) = 0 \overset{\text{se fall I}}{\Rightarrow} \phi(r) = -\frac{E}{r} + F$

$\Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{E}{r^2}\hat{r}$

$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ $\quad M$ = total massa

$= -G\left(\frac{4\pi}{3}R_2^3 - \frac{4\pi}{3}R_1^3\right)\frac{\rho_0}{r^2}\hat{r}$

$= -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\hat{r}$

$\Downarrow$ III

$E = \frac{4\pi}{3}G\rho_0(R_2^3 - R_1^3)$

$\vec{g}$ kontinuerlig på ytorna, dvs. $r = R_1$, $r = R_2$

R_2: $\quad \frac{4\pi}{3}\frac{G\rho_0(R_2^3 - R_1^3)}{R_2^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0 R_2 + \frac{C}{R_2^2}$

$\Rightarrow C = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R_1^3$

R_1: $\quad \frac{A}{R_1^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 R_1 - \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R_1^3}{R_1^2} = 0$

$\Downarrow$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{4}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_1^3}{r^2} - r\right)\hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ -\frac{4\pi}{3}G\rho_0(R_2^3 - R^3)\frac{\hat{r}}{r^2} & r > R_2 \end{cases}$$