Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

Tisdagen den 29 augusti 2006, kl. 8.30 - 12.30 i V-huset

Examinator: Henrik Johannesson, ankn. 3185, mobil 0768-237042.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Lösningarna anslås på entrédörren till Fysicum omedelbart efter skrivningens slut. Tentamensresultaten anslås i trapphuset senast den 26 september. Tentamensgranskning den 26 september kl 12-13 i rum O7104A, Norra flygeln, Origohuset.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.
Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras** (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ett vektorfält har potentialen ϕ, given i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$ som

$$\phi = \left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha,$$

där a och b är konstanter. Beräkna vektorfältets flöde ut genom begränsningsytan till kuben med sidan c och mittpunkt i $(x, y, z) = (0, d, 0)$ där $c < d$.

2. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av sambandet

$$\begin{cases} u = r(1-\cos\theta) \\ v = r(1+\cos\theta) \\ w = \varphi \end{cases}$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater. Visa att systemet är ortogonalt och beräkna dess skalfaktorer. Hur ser (i) gradientoperatorn ∇ och (ii) ortsvektorn $\boldsymbol{r}$ ut i uvw systemet?

3. I en ledare längs kurvan C

$$C:\ \boldsymbol{r} = \begin{cases} (a\cos t, a\sin t, at), & 0 \le t \le 2\pi \\ (a, 0, 4\pi a - at), & 2\pi \le t \le 4\pi \end{cases}$$

går en elektrisk ström med strömstyrkan I. Ledaren befinner sig i ett magnetfält med flödestätheten $\boldsymbol{B}(x,y,z) = B_0[a(x^2+y^2)^{-1}(y\hat{x} - x\hat{y}) + a^{-1}x\hat{z}]$. Beräkna kraften $\boldsymbol{F} = I\int_C d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}$ på ledaren.

. *VÄND!*

4. Temperaturen i ett stycke uppvärmt keramiskt material anges av skalärfältet

$$T(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz \quad [°\mathrm{C}].$$

Betrakta temperaturvariationerna i olika riktningar från punkten $P_0 : (1, 2, -3)$ och visa att alla riktningar i vilka temperaturen minskar $2°C$/längdenhet bildar samma vinkel α med den riktning $\boldsymbol{n}$ i vilken temperaturen växer snabbast. Bestäm α och $\boldsymbol{n}$.

5. Hastighetsfältet $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ för en strömmande vätska i två dimensioner kan beskrivas med hjälp av en strömfunktion ψ, där

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Om vätskan är inkompressibel och strömningen är virvelfri överallt så uppfyller ψ Laplaces ekvation:

$$\nabla^2 \psi = 0 .$$

Betrakta en oändligt lång cylinder med radien a och med z-axeln som symmetriaxel. En inkompressibel vätska strömmar in med konstant hastighet u_0 i x-riktningen från vänster ($x < 0$). Bestäm vätskans hastighet i varje punkt i xy-planet utanför cylindern om strömningen antas vara virvelfri överallt.
Ledning: Ansätt en lösning av formen $\psi(\rho, \alpha) = f(\rho)\sin\alpha$, där ρ och α är cylinderkoordinater. Utnyttja också att ψ uppfyller ett homogent Dirichlet randvillkor på cylinderns mantelyta.

LÖSNINGSFÖRSLAG

Tentamen : VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM 232

29/8 2006

---

1) Flödet ut ur kuben ges av

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \{\text{Gauss sats}\} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{F} &= -\nabla\cdot(\nabla\Phi) = -\nabla^2\Phi \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\frac{\alpha}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha \\
&= \left(-\frac{a}{\rho^3} - \frac{b}{\rho}\right)\sin\alpha + \left(\frac{\alpha}{\rho^3} + \frac{b}{\rho}\right)\sin\alpha = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0 .$$

SVAR : FLÖDET = 0.

2) $\vec{r} = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$

$v-u = 2r\cos\theta, \quad vu = r^2(1-\cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow \vec{r} = (\sqrt{vu}\cos w,\ \sqrt{vu}\sin w,\ (v-u)/2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec r}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{v}{u}}\cos w,\ \sqrt{\dfrac{v}{u}}\sin w,\ -1\right) \\ \dfrac{\partial \vec r}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}\cos w,\ \sqrt{\dfrac{v}{u}}\sin w,\ 1\right) \\ \dfrac{\partial \vec r}{\partial w} = \left(-\sqrt{uv}\sin w,\ \sqrt{uv}\cos w,\ 0\right) \end{cases}$$

ORTOGONALITET OK

SKALFAKTORER

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}}$$
$$h_v = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}}$$
$$h_w = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial w}\right| = \sqrt{uv}$$

GRADIENT

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{u+v}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\hat{u} + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v+u}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{\sqrt{vu}}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\hat{w}$$

ORTSVEKTOR

$r = \frac{1}{2}(u+v)$

$$\vec{r} = r\nabla r = \frac{1}{2}(u+v)\left\{\frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{u+v}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial u}}_{=1/2}\hat{u} + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{u+v}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial v}}_{=1/2}\hat{v} + \frac{1}{\sqrt{vu}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial w}}_{=0}\hat{w}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u(u+v)}\,\hat{u} + \sqrt{v(u+v)}\,\hat{v}\right)$$

3) Kurvan består av två delar C_1 och C_2

$$\int_C d\vec{r} \times \vec{B} = \int_{C_1} d\vec{r} \times \vec{B} + \int_{C_2} d\vec{r} \times \vec{B}$$

För C_1 har vi :

$$d\vec{r} = a(-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

$$\vec{B} = B_0 \left[a(a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{-1} (a \sin t \,\hat{x} - a \cos t \,\hat{y}) + \cos t \,\hat{z} \right]$$

$$= B_0 \left[\sin t \,\hat{x} - \cos t \,\hat{y} + \cos t \,\hat{z} \right]$$

$$d\vec{r} \times \vec{B} = a B_0\, dt \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ \sin t & -\cos t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= a B_0\, dt \left\{ (\cos^2 t + \cos t)\,\hat{x} + (\sin t + \sin t \cos t)\,\hat{y} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} d\vec{r} \times \vec{B} = a B_0 \int_0^{2\pi} dt \left[\quad \ldots \quad \right] = a B_0 \pi \,\hat{x} \qquad (i)$$

För C_2 :

$$\begin{cases} d\vec{r} = -a \hat{z}\, dt \\ \vec{B} = B_0 \left[a \cdot a^{-2} (-a \hat{y}) + \hat{z} \right] \end{cases}$$

$$d\vec{r} \times \vec{B} = a B_0 (\hat{z} \times \hat{y})\, dt = -a B_0 \hat{x}\, dt$$

$$\int_{C_2} d\vec{r} \times \vec{B} = \int_{2\pi}^{4\pi} dt\, (-a B_0)\, \hat{x} = -2\pi a B_0 \hat{x} \qquad (ii)$$

$$\vec{F} = I \int d\vec{r} \times \vec{B} = I\, ((i) + (ii)) = \underline{-\pi a I B_0 \hat{x}}$$

riktnings derivata

4) $\left(\frac{dT}{d\hat{\tau}}\right)_{P_0} = (\mathrm{grad}\, T)_{P_0} \cdot \hat{\tau} = |\mathrm{grad}\, T|_{P_0}\, \hat{\tau} \cdot \hat{n}$

$= \underbrace{|\mathrm{grad}\, T|}_{(4,-1,-2)}\,\Big|_{P_0} \cos\alpha$

$\hat{n} = \left(\frac{\mathrm{grad}\, T}{|\mathrm{grad}\, T|}\right)_{P_0} = \frac{(4,-1,-2)}{\sqrt{21}}$

$\left(\frac{dT}{d\hat{\tau}}\right)_{P_0} = -2 = |\mathrm{grad}\, T|_{P_0} \cos\alpha = \sqrt{21}\cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$

[redacted]

notation: $\Phi \equiv \psi$!

5) $$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \Phi = f(\rho)\sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(f(\rho)\sin\alpha\right)\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(f(\rho)\sin\alpha\right)}_{=-f(\rho)\sin\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} - f = 0$$ Euler ekvation

sätt $f = C\rho^m \Rightarrow \rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + m\rho\rho^{m-1} - \rho^m = 0$

$$\Rightarrow m = \pm 1$$

$$\Rightarrow \Phi = \left(A\rho + \frac{B}{\rho}\right)\sin\alpha$$, A, B konstanter

RANDVILLKOR ① $\Phi(\rho,\alpha) \rightarrow u_0 \underbrace{\rho\sin\alpha}_{y}$ då $\rho \rightarrow \infty$, $|\alpha| > \pi/2$

ty $v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = u_0$ då $\rho \rightarrow \infty$, $|\alpha| > \pi/2$
(givet i texten)

② $\Phi(a,\alpha) = 0$ (homogent Dirichlet)

① & ② $\Rightarrow A = u_0$, $B = -a^2 \Rightarrow \Phi = u_0\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\sin\alpha$
$= u_0 y - u_0 a^2 \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = u_0 - u_0 a^2\left(\frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right) = u_0 - u_0 a^2\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\left\{-u_0 a^2\left(\frac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\right\} = -2u_0 a^2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$