Chalmers
Institutionen för Tillämpad Fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232

Tid: Torsdag 13 januari 2004, kl. $14^{00} - 18^{00}$
Plats: V
Examinator: Mats Persson
Jourhavande: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (kontor), 0733-261681 (mobil)
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling i vektoranalys av Olle Brander och Standard Math Tables.

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 14 januari. Resultaten anslås senast den 1 Februari. Tentamensgranskning den 3 februari kl. 12-13 i rum 3035 på Soliden.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning. Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ via sambandet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Bestäm den fältlinje till $\mathbf{B}$ som går igenom punkten $a\hat{\mathbf{x}}$ om

$$\mathbf{A} = -\frac{A_0}{a^2}\rho^2\hat{\mathbf{z}}$$

i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$. A_0 och a är konstanter.

2. Ett kroklinjigt koordinatsystem $uv\alpha$ ges av

$$\mathbf{r} = uv(\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\hat{\mathbf{y}}) + \frac{(u^2 - v^2)}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

där $0 \leq u, v < \infty$ och $0 \leq \alpha < 2\pi$. Bestäm skalfaktorerna och beräkna $\nabla^2(uv)$.

VÄND !!

3. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där ytan S är given i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$ av

$$\rho = 2a - z, \ -a < z < a, \ 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Ytnormalen pekar bort från origo. Fältet har formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0 \left((\frac{a}{\rho} + 2\frac{\rho \sin^2 \alpha}{a})\hat{\rho} + \frac{\rho}{a} \sin 2\alpha\hat{\alpha} + \frac{z}{a}\hat{\mathbf{z}} \right)$$

där F_0 och a är konstanter.

4. En elektrisk ledare som beskrivs av kurvan C: $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ och $z = 0$ genomlöps moturs av en ström I. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \left(-(\frac{x}{a})\hat{\mathbf{x}} + \left((\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{a}) \right) \hat{\mathbf{z}} \right)$$

påverkar ledaren. B_0 och a är konstanter.

5. En sfär med radien a innehåller en utbredd laddningsfördelning ρ_0 given i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$ av

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{\pi a^4} \cos\theta$$

där μ_0 är en konstant. Bestäm den elektriska potentialen ϕ innanför och utanför sfären. (*Ledning:* ϕ och $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ är kontinuerliga igenom sfären och ϕ är begränsad i $r = 0$ och $r \to \infty$.)

VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK (FFM232)

TENTAMEN 2005-01-13

LÖSNINGAR

1.

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{A_0\rho^2}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{2A_0}{a^2}\rho\hat{\alpha}$$

fältlinjernas ekvation:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\hat{\rho} + \rho\frac{d\alpha}{d\tau}\hat{\alpha} + \frac{dz}{d\tau}\hat{z} = \frac{CA_0}{a^2}\rho\hat{\alpha}$$

$\frac{d\rho}{d\tau} = 0 \qquad \rho$ är konstant $(x^2+y^2 = \text{konstant})$

$\frac{dz}{d\tau} = 0 \qquad z$ är konstant

$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{C2A_0}{a^2} \qquad \alpha = \tau \quad$ då $\quad C2A_0/a^2 = 1$

Fältlinjerna är cirklar i planen z är konstant med centrum i origo. Fältlinjen som passerar punkten $a\hat{x}$ har ekvationen: $x^2+y^2=a^2$, $z=0$

2. Skalfaktorer

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = \left| v(\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}) + u\hat{z}\right| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \left| u(\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}) - v\hat{z}\right| = \sqrt{u^2+v^2}$$

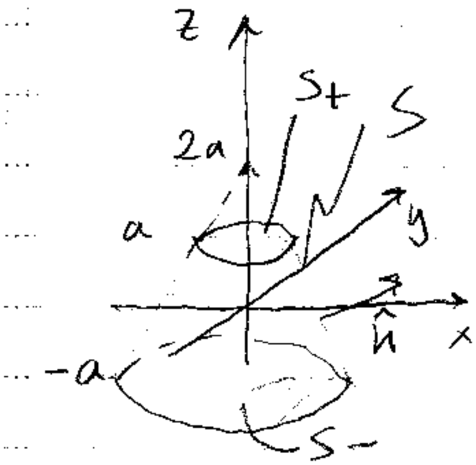
$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}\right| = \left| uv(-\sin\alpha\,\hat{x} + \cos\alpha\,\hat{y})\right| = uv$$

$$\nabla^2(uv) = \frac{1}{(u^2+v^2)uv}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial}{\partial u}(uv)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(uv\frac{\partial}{\partial v}(uv)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2)uv}(u^2+v^2) =$$

$$\underline{\underline{\nabla^2(uv) = \frac{1}{uv}}}$$

3.



$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_S + \mathbb{F}_R$$

$$\mathbb{F}_S = \frac{F_0 a}{\rho}\hat{\rho} \quad \text{linjekälla}$$

$$\int_S \mathbb{F}_S \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \cdot 2a \cdot F_0 a = 4\pi F_0 a^2$$

③

$$\nabla \cdot \mathbb{F}_R = F_0\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho 2\rho\frac{\sin^2\alpha}{a}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\rho}{a}\sin 2\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{a}\right)\right)$$

$$= F_0\left(\frac{4\sin^2\alpha}{a} + \frac{2\cos 2\alpha}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{3}{a}F_0$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_R \, dV = \frac{3F_0}{a}\int_{-a}^{a}\pi(2a-z)^2\,dz = 26\pi a^2 F_0$$

S_+ : $\rho < a$ och $z = a$, $\hat{n} = \hat{z}$

$$\int_{S_+}\mathbb{F}_R\cdot\hat{z}\,dS = F_0\int_{S_+}dS = \pi a^2 F_0$$

S_- : $\rho < 3a$ och $z = -a$, $\hat{n} = -\hat{z}$

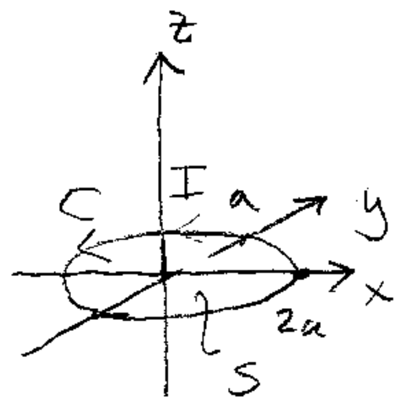
$$\int_{S_-}\mathbb{F}_R\cdot(-\hat{z})\,dS = F_0\int_{S_-}dS = 9\pi a^2 F_0$$

$$\int_S \mathbb{F}_R\cdot d\mathbb{S} = 26\pi a^2 F_0 - \pi a^2 F_0 - 9\pi a^2 F_0 = 16\pi a^2 F_0$$

$$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = 4\pi a^2 F_0 + 16\pi a^2 F_0 = \underline{\underline{20\pi a^2 F_0}}$$

④

4\.



Stokes analog sats

$$\int_C I\,d\mathbf{r} \times \mathbb{B} = I \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbb{B}$$

ytnormal $\hat{n} = \hat{z}$, $\hat{z} \times \nabla = \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0\right)$

$$(\hat{z} \times \nabla) \times \mathbb{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial B_x}{\partial x}\hat{z}$$

$$= 0 + \frac{2y}{a} B_0 \hat{y} + \frac{B_0}{a}\hat{z}$$

$$I \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbb{B} = I \left(\frac{2B_0}{a} \hat{y} \underbrace{\int y\,dS}_{=0 \text{ udda integrand}} + \frac{B_0 \hat{z}}{a} \int dS \right)$$

$$= \frac{B_0 I}{a} \cdot \pi \cdot 2a \cdot a \hat{z} = \underline{\underline{2\pi B_0 I a \hat{z}}}$$

5\. Poisson's ekvation: $\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon$

ansats $\phi = f(r) \cos\theta$

[illegible]

(5)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) - 2f = \begin{cases} -\dfrac{3\mu_0}{\pi a^4 \epsilon_0} r^2 , & r < a \\ 0 , & r > a \end{cases}$$

$r > a$: homogen lösning: $Ar + Br^{-2}$
$f(r)$ begränsad $r \Rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$
$f(r) = Br^{-2}$

$r < a$ homogen lösning: $Cr + Dr^{-2}$
$f(r)$ begränsad $r = 0 \Rightarrow D = 0$
partikulärlösning: Er^2
$\Rightarrow 4E = -3\mu_0 / (\pi a^4 \epsilon_0)$
$f(r) = Cr + Er^2$

f och $\frac{df}{dr}$ kontinuerliga vid $r = a$

$$\begin{cases} Ba^{-2} = Ca + Ea^2 \\ -2Ba^{-3} = C + 2Ea \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} C = -\dfrac{4Ea}{3} = \dfrac{\mu_0}{\pi \epsilon_0 a^3} \\ B = -\dfrac{Ea^4}{3} = \dfrac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} , & r > a \end{cases}$$

$\phi(r)$