Chalmers/Göteborgs Universitet
Institutionen för Tillämpad Fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Lördag 23 oktober 2004, kl. $8^{30} - 12^{30}$
Plats: V
Examinator: Mats Persson, tel. 031-772 3666 (arbete), 031-913237 (bostad), 0707-535666 (mobil)
Jourhavande: Mats Persson
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling i vektoranalys av Olle Brander och Standard Math Tables.

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 25 oktober. Resultaten anslås senast den 3 november. Tentamensgranskning den 3 november kl. 12-13 i rum 3035 på Soliden.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.
(FFM231): Betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 26 poäng; betyg 5: 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett hastighetfält $\mathbf{v}$ i cylindriska koordinater $\rho\alpha z$ har formen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{v_0}{a}(2\rho f(\alpha)\hat{\rho} + \rho\frac{df}{d\alpha}(\alpha)\hat{\alpha}) \ ,$$

där a är en konstant. Bestäm $f(\alpha)$ så att detta fält beskriver en inkompressibel fluid ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), som strömmar rotationsfritt ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) med en normal hastighet $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$ på planen $\alpha = 0$ och $\alpha = \frac{\pi}{2}$ och $\mathbf{v}(a, \frac{\pi}{2}, z) = -v_0\hat{\rho}$.

VÄND !!

2. (a) Mellan två koncentriska cylindrar med radierna a och $2a$ finns ett material med värmeledningsförmågan λ. Bestäm temperaturfördelningen mellan cylindrarna då den innersta och yttersta cylindern håller temperaturen T_1 och T_2, respektive. (6p) (b) Bestäm dessutom totala värmeflödet från innercylindern till yttercylindern per längdenhet längs cylindrarna med hjälp av Fourier's lag. (2p)

3. Bestäm elektriska fältet från en laddningsfördelning svarande mot en väteatom. Rymdladdningen från elektronens rörelse runt protonen ges av,

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\pi a_0^3} \exp(-\frac{2r}{a_0}) \ ,$$

där r är avståndet från protonen, $-e$ är elektronens laddning, och a_0 är Bohr radien. Protonens laddningsfördelning kan betraktas som punktformig.

4. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där S är ytan

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \ z > 0$$

med en normal som pekar bort från origo. Fältet har formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0(\frac{r}{a})((\frac{a^3}{r^3} + \cos 2\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin 2\theta\hat{\theta} + \cos^2\theta\hat{\varphi})$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater och F_0 och a är konstanter.

5. (Endast för FFM232, 3p.) En ström I genomflyter en tunn ledare i formen av en cirkel med radien a. I ett yttre, konstant och homogent magnetfält $\mathbf{B}$ påverkas den strömförande ledaren av ett kraftmoment som ges av kurvintegralen,

$$\mathbf{M} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B})$$

Bestäm $\mathbf{M}$ som funktion av orienteringen av $\mathbf{B}$ och ytnormalen till den inneslutna cirkelskivan. För vilka orienteringar är kraftmomentet noll.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Bestäm käll- och virvelfördelningen för fältet

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} F_0(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta)\hat{\mathbf{r}} \ , \theta < \frac{\pi}{2} \\ F_0(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r}\sin\theta)\hat{\mathbf{r}} \ , \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

där F_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen (FFM231) kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ tfymp/Homepage/Teaching/FFM232.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 2/11 till Mats Persson, rum 3035 i Soliden på vån. 3. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Mats Persson.* För mer information skicka e-mail till: tfymp@fy.chalmers.se.

Lösningar

1.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{v_0}{\rho a}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\rho f & \rho^2 f' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{v_0}{\rho}\left(0\hat{\rho} - 0\hat{\alpha} + (2\rho f' - 2\rho f')\hat{z}\right) = 0$$

alltid uppfyllt

$$0 = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{v_0}{a}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho 2\rho f\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\rho f'\right)\right)$$

$$= \frac{v_0}{a}\left(4f + f''\right)$$

$$f(\alpha) = A\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha$$

$\hat{\alpha}$ är en ytnormal till planen $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$0 = \hat{\alpha}\cdot\mathbf{v} = v_0\frac{\rho}{a}f'(\alpha) = v_0\frac{\rho}{a}\left(-2A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha\right)$$

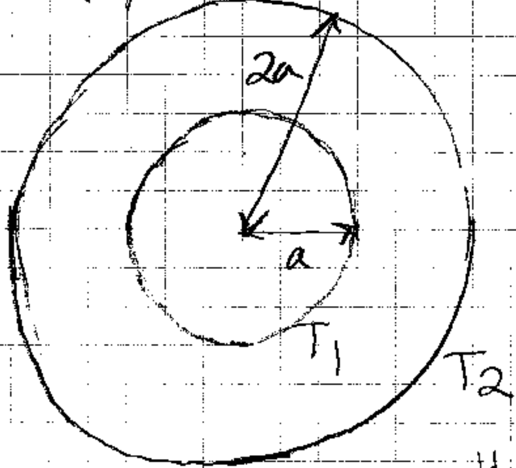
uppfyllt på planen om och endast om $B = 0$

$$\mathbf{v}(a, \tfrac{\pi}{2}, z) = -2v_0 A\hat{\rho} = -v_0\hat{\rho} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Svar: $f(\alpha) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$$\mathbf{v} = \frac{v_0}{a}\rho\left(\cos 2\alpha\,\hat{\rho} - \sin 2\alpha\,\hat{\alpha}\right)$$

2. (a)



Stationär värmeledning:

$$\nabla^2 T = 0 \quad ; \quad a<\rho<2a$$

cylinderkoordinater $\rho \alpha z$

axiell symmetri $T = T(\rho)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = 0 \quad a<\rho<2a$$

Homogen lösning: $T(\rho) = A \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + B$

Randvillkor:

$$\begin{cases} T_1 = T(a) = B = T_1 \\ T_2 = T(2a) = A \ln 2 + B = T_2 \end{cases}$$

$$A = (T_2 - T_1)/\ln 2 \quad , \quad B = T_1$$

<u>Svar</u>: $T(\rho) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$

(b) Värmeströmtäthet (Fouriers lag)

$$\mathring{j} = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \rho}\hat{\rho} = \frac{\lambda}{\rho}\frac{(T_1 - T_2)}{\ln 2}\hat{\rho}$$

värmeflöde I per längdenhet

$$I = 2\pi\rho \cdot \mathring{j} \cdot \hat{\rho} = 2\pi\lambda (T_1 - T_2)/\ln 2$$

<u>Svar</u>: $I = 2\pi\lambda (T_1 - T_2)/\ln 2$

CHALMERS

Dokumentnamn | Sida

Utfärdare | Datum

Ärende

3. Sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning

Gauss lag: $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{r}$

$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E_r(r) = \underbrace{4\pi\int_0^r r'^2 \rho(r')\,dr'}_{\text{elektronen}} + \underbrace{e}_{\text{protonen}}$$

$$\int_0^r r'^2\left(-\frac{e}{\pi a_0^3}\right)\exp\left(-\frac{2r'}{a_0}\right)dr' = \left\{\begin{array}{l} x' = 2r'/a_0 \\ dx' = 2dr'/a_0 \end{array}\right\}$$

$$= -\frac{e}{8\pi}\int_0^x x'^2 e^{-x'}dx' = -\frac{e}{8\pi}\left(\left[-x'^2 e^{-x'}\right]_0^x + \int_0^x 2x' e^{-x'}dx'\right)$$

$$= -\frac{e}{8\pi}\left(-x^2 e^{-x} + \left[-2x' e^{-x'}\right]_0^x + 2\int_0^x e^{-x'}dx'\right)$$

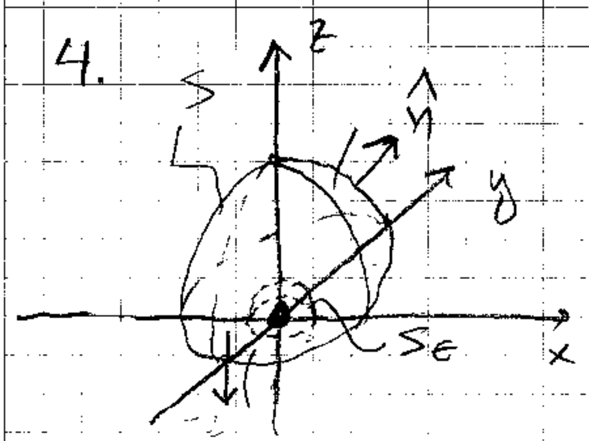
$$= +\frac{e}{8\pi}\left[\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x} - 2\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi}\left(2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a_0}\right) + 1\right)e^{-2r/a_0} - \frac{e}{4\pi}$$

<u>Svar</u>: $$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a_0}\right) + 1\right)e^{-2r/a_0}$$

CHALMERS	Dokumentnamn	Sida
	Utfärdare	Datum
Ärende		

4.



S : halv ellipsoid

Singulјär del av fältet

$$\mathbb{F}_S = F_0\left(\frac{a}{r}\right)^2\hat{r}$$

punktkälla i origo med styrka $F_0 a^2$

Halvellipsoiden upptar rymdvinkeln 2π

$$\int_S \mathbb{F}_S\cdot d\mathbb{S} = 2\pi F_0 a^2$$

Reguljär del av fältet:

$$\mathbb{F}_r = \frac{F_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)\left(\cos 2\theta\,\hat{r} - \sin 2\theta\,\hat{\theta} + \cos^2\theta\,\hat{\varphi}\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F}_r = -\frac{F_0}{a}$$

Gauss sats:

$$\oint_{S+S'} \mathbb{F}_r\cdot d\mathbb{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_r\,dV = -\frac{F_0}{a}\overbrace{\frac{2\pi}{3}a\cdot 2a\cdot 3a}^{\text{volym av halv-ellipsoid}} = -4\pi F_0 a^2$$

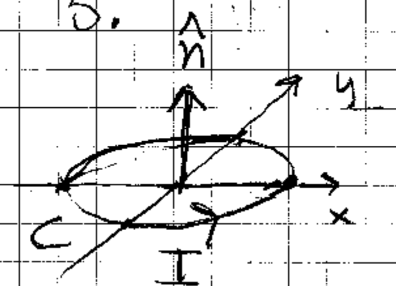
$$S' : \mathbb{F}_r\cdot\hat{n} = F_0\left(\frac{r}{a}\right)\sin 2\theta = 0,\quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

medför

$$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \int_S \mathbb{F}_S\cdot d\mathbb{S} + \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_r\,dV - \overbrace{\int_{S'} \mathbb{F}_r\cdot d\mathbb{S}}^{=0}$$

Svar: $-2\pi F_0 a^2$

5.



$$\mathbb{M} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbb{B})$$

$$= I\left(\oint (\mathbb{B}\cdot\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - \int (\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})\,\mathbb{B} \right)$$

eftersom $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$

Stokes satser

$$\oint_C (\mathbb{B}\cdot\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_S (\hat{n} \times \nabla)\, \mathbb{B}\cdot\mathbf{r}\, dS = \int \hat{n} \times \mathbb{B}\, dS$$

$$= \mathbf{n} \times \mathbb{B}\, \pi a^2$$

$$\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \underbrace{\nabla \times \mathbf{r}}_{=0}\, dS = 0$$

$$\mathbb{M} = \pi a^2 I\, \hat{n} \times \mathbb{B}$$

alternativt direkt uträkning av kurvintegralen

Svar: $\mathbb{M} = I \pi a^2\, \hat{n} \times \mathbb{B}$

$\mathbb{M} = 0$ då $\hat{n}$ är parallell med $\mathbb{B}$