Övningstentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM
Oktober 2009

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 30 poäng, för betyg 4 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, poängen från datoruppgifterna inräknad. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{\pi}{4}) \tan x \, dx$?

b) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\hat{\varrho}}{2\pi\varrho}$ ($\varrho$ är den radiella cylindriska koordinaten) och $S$ är en sfär med radien 1 och mittpunkt i origo?

c) $M$ är matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Vad är värdet av $\frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}M_{il}M_{jm}M_{kn}$?

2. Maxwells ekvationer lyder

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 ,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ,$$

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} .$$

Visa att $\vec{B}$-fältet uppfyller vågekvationen i frånvaro av laddningar och strömmar. Visa, för en plan våg, att $\vec{B}$ är vinkelrät mot vågens rörelseriktning.
(10 poäng)

3. Beräkna integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{(x-1)\hat{y} - y\hat{x}}{(x-1)^2 + y^2} + \hat{\varrho}(1-\varrho)e^{-\varrho} \sin\alpha + \hat{\alpha}(e^{-\varrho}\cos\alpha - z\sin\alpha) + \hat{z}\cos\alpha$$

och $C$ är kurvan $(\varrho, \alpha, z) = (2 + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}, t, 0)$ då parametern $t$ går från 0 till $4\pi$. (De cylindriska koordinaterna $(\varrho, \alpha, z)$ är relaterade på vanligt sätt till de cartesiska $(x, y, z)$.)
(10 poäng)

4. Visa eller argumentera övertygande för att om ett skalärt fält $\phi$ uppfyller Laplaces ekvation på hela $\mathbb{R}^3$ (och inte är en trivial lösning med $\nabla\phi = 0$), kan inte någon ekvipotentialyta till $\phi$ vara sluten.
(10 poäng)

5. Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien $a$ hålls vid den elektriska potentialen $\phi(\varrho = a, \alpha, z) = \phi_0 \cos 2\alpha$. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissera ekvipotentialytor och fältlinjer.
(10 poäng)

6. Antag att man vid tiden $t = 0$ har en endimensionell temperaturfördelning $T(x, t = 0) = T_0 \frac{x}{a}$. (Detta är förstås i praktiken omöjligt, eftersom det finns en undre gräns för temperatur, så man kan se det som giltigt i ett område. Här behandlar vi det dock rent matematiskt.) Eftersom Laplaceoperatorn på begynnelsevärdet är noll, verkar det inte som att man (i frånvaro av värmekällor) får något tidsberoende alls hos temperaturen, utan $T(x, t) = T_0 \frac{x}{a}$. Verifiera att detta också är resultatet som en beräkning med Greensfunktion ger. Greensfunktionen för värmeledningsekvationen i en rumsdimension är

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}}$$

för $t - t_0 > 0$.
(10 poäng)

Lösningar till övningstentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM
Oktober 2009

---

1. a) 1

   b) 2

   c) 4

3. Den första termen i $\vec{F}$ känns igen som fältet från en virveltråd med styrkan $2\pi$ på linjen $x = 1$, $y = 0$. Eftersom $z = 0$ och $\hat{z} \cdot d\vec{r} = 0$ bidrager inte termerna $-\hat{\alpha} z \sin\alpha + \hat{z}\cos\alpha$. Resten av $\vec{F}$, dvs. $\hat{\varrho}(1 - \varrho)e^{-\varrho}\sin\alpha + \hat{\alpha}e^{-\varrho}\cos\alpha$, är rotationsfritt, vilket ses genom explicit uträkning av rotationen i cylindriska koordinater (eller så ser man att det är gradienten av $\varrho e^{-\varrho}\sin\alpha$). Kurvan $C$ omsluter virveltråden två varv i positiv riktning. Värdet av integralen är därför $2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

4. T.ex.: Om $\phi$ uppfyller Laplaces ekvation är fältstyrkan $\nabla\phi$ divergensfri. Det finns alltså inga källor. Gauss sats säger att för en sluten yta $\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\phi$=0. Om det finns slutna ekvipotentialytor får man alltså att flödet genom dem är noll. Men på en ekvipotentialyta $S$ är $\vec{n} = \pm\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ med samma tecken på hela ytan. Man får $\int_S |\nabla\phi| dS = 0$ på varje ekvipotentialyta, och därför $\nabla\phi = 0$.

   Eller: Om $S = \partial V$ är en sluten ekvipotentialyta är $\phi$ en lösning till Laplaces ekvation med randvillkoret $\phi = \phi_0$ på $S$. Betrakta istället fältet $\psi = \phi - \phi_0$, som lyder Dirichlets homogena randvillkor. Vi använder $\nabla \cdot (\psi\nabla\psi) = |\nabla\psi|^2 + \psi\Delta\psi = |\nabla\psi|^2$. Gauss sats ger $\int_V |\nabla\psi|^2 = \int_{\partial V} \psi\nabla\psi \cdot d\vec{S} = 0$, så $\psi = 0$ innanför varje ekvipotentialyta.

   (Kommentar: Påståendet, och argumenten, håller i $\mathbb{R}^3$, men inte om området man löser Laplace ekvation har mer en en rand, t.ex. om det är området mellan två koncentriska sfärer.)

5. Inget i problemställningen beror på $z$, så vi betraktar det som ett 2-dimensionellt problem. Den elektrostatiska potentialen uppfyller Laplaces ekvation på cirkelskivan $\varrho < a$. En rimlig ansats är $\phi(\varrho, \alpha) = f(\varrho)\cos 2\alpha$. Laplaces ekvation säger

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} = \varrho^{-1}(\varrho f'(\varrho))'\cos 2\alpha - 4\varrho^{-2}f(\varrho)\cos 2\alpha\,.$$

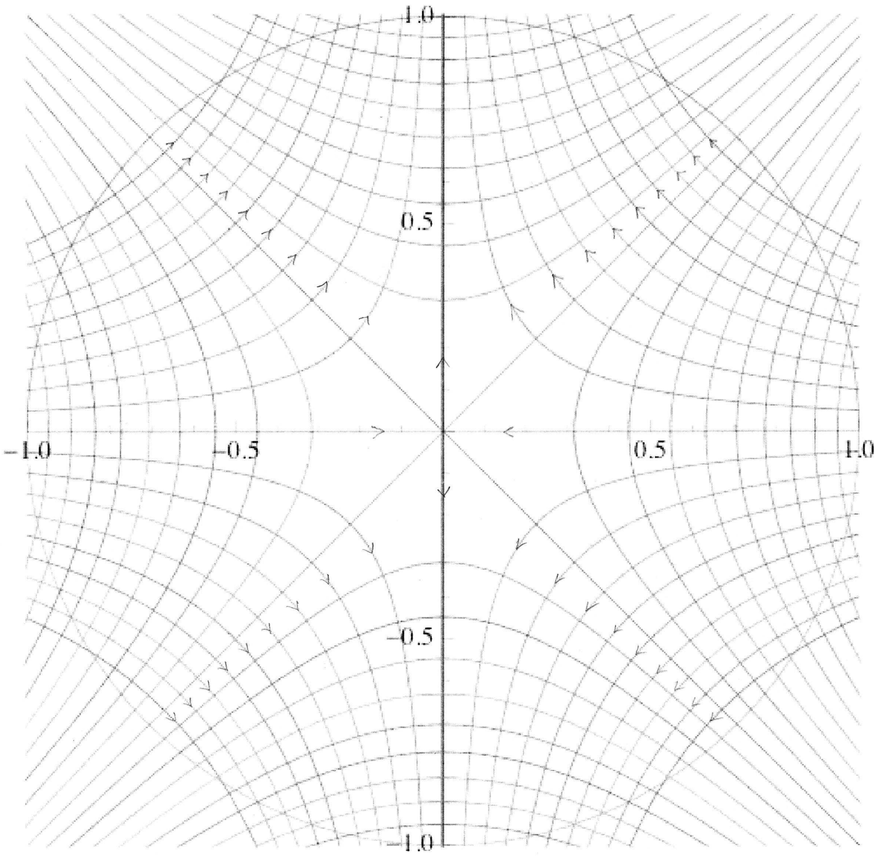
   En ansats $f(\varrho) = A\varrho^p$ ger $p^2 - 4 = 0$, $p = \pm 2$. Minustecknet ger ett singulärt fält. Randvillkoret ger $A = \frac{\phi_0}{a^2}$. Potentialen är

$$\phi = \phi_0\frac{\varrho^2}{a^2}\cos 2\alpha = \phi_0\frac{x^2 - y^2}{a^2}\,.$$

   (Från det senare uttrycket är det uppenbart att $\phi$ löser $\Delta\phi = 0$.) Det elektriska fältet är

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{2\phi_0\varrho}{a^2}(-\hat{\varrho}\cos 2\alpha + \hat{\alpha}\sin 2\alpha) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(x\hat{x} - y\hat{y})\,.$$

   Ekvipotentialytorna är hyperbler $x^2 - y^2 =$ konstant. Fältlinjerna är hyperbler $xy =$ konstant.




6. Temperaturen vid tiden $t > 0$ ges m.h.a. Greensfunktionen och begynnelsevärdet av

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} T_0 \frac{y}{a} \,.$$

Byt integrationsvariabel till $z = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$.

$$T(x,t) = \frac{T_0}{a} \sqrt{4kt} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} dz (z\sqrt{4kt} + x) e^{-z^2} \,.$$

Vi använder $\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$ och $\int_{-\infty}^{\infty} dz z e^{-z^2} = 0$, vilket ger $T(x,t) = T_0 \frac{x}{a}$.