

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 3, 2019

## 1. Fält och derivator

Ett fält är en fysikalisk storhet som kan beskrivas som en funktion av positionen i rummet  $\vec{r}$  och tiden  $t$ . I den här kursen kommer vi att behandla två typer av fält, skalära fält och vektorfält.

**Skalärfält.**

$$\Phi = \Phi(\vec{r}, t), \quad \Phi \in \mathbf{R}, \quad \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \quad (1)$$

Skalär	Symbol	Enhet
tryck	$p$	Pascal (Pa), $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
densitet	$\rho$	$\text{kg/m}^3$
temperatur	$T$	Kelvin (K), Celsiusgrader ( $^{\circ}\text{C}$ )

**Vektorfält.**

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t), \quad \vec{F} \in \mathbf{R}^3, \quad \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \quad (2)$$

Vektor	Symbol	Enhet
hastighet	$\vec{v}$	m/s
kraft	$\vec{F}$	N
Magnetfält	$\vec{B}$	Tesla (T)

## Rum och koordinatsystem

En viktig egenskap hos skalärer och vektorer är att dessa är **oberoende** av koordinatsystem (transformation). Mer om detta senare när vi pratar om tensorfält.

I ett Cartesiskt koordinatsystem på  $\mathbf{R}^3$  gäller att en allmän vektor  $\vec{A}$  kan skrivas

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (3)$$

där  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  och  $\hat{z}$  är ortonormerade **basvektorer**.

I detta koordinatsystem har vi följande partiella derivator  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Vi använder ibland kortnotationen  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ .

Detta ger vektoroperatoren

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z, \quad (4)$$

som uttalas *nabla* eller *dell*.

## Vektoralgebra

Repetera detta om ni känner er osäkra!

Exemplen nedan i Cartesiska koordinater.

### Addition.

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z} \quad (5)$$

och motsvarande för subtraktion.

Resultatet är en vektor.

### Skalärprodukt.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta, \quad (6)$$

där  $|\vec{A}|$  och  $|\vec{B}|$  är vektornormerna enligt nedan och  $\theta$  är vinkeln mellan vektorerna.

På komponentform

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (7)$$

eftersom  $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$  och  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ .

Resultatet är en skalär.

### Vektornorm.

$$A = |\vec{A}| = (\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2} = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}. \quad (8)$$

### Kryssprodukt.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}. \quad (10)$$

## Skalärfält

Ett skalärt fält representeras av ett tal i varje punkt. Exempel på sådana fält är temperatur, tryck, elektrisk laddningstäthet.

**Nivåyta.** Geometriskt brukar vi beskriva ett skalärt fält  $\Phi(x, y, z, t)$  genom att rita de ytor på vilka fältet är konstant. Vi kallar sådana ytor för **nivåytor**, eller i två dimensioner **nivåkurvor**. Vissa typer av nivåkurvor har fått speciella namn, till exempel isotermer för kurvor längs vilka temperaturen är konstant och isobarer längs vilka trycket är konstant. Man kan konstruera nivåytorna genom att ställa upp ekvationen  $C = \Phi(x, y, z, t)$ , och lösa den för olika  $C$ .

**Gradient, fältlinjer.** Ett viktigt begrepp när vi arbetar med skalära fält är **gradienten**. Betrakta två punkter  $(x, y, z)$  och  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ . Skillnaden i skalären  $\Phi$  mellan dessa båda punkter är

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi(x+dx, y+dy, z+dz) - \Phi(x, y, z) \\ &\approx \Phi(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz - \Phi(x, y, z) \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Den här skillnaden kan vi tolka som skalärprodukten mellan vektorn

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz), \quad (12)$$

som beskriver separationen mellan de båda punkterna och vektorn

$$\vec{\nabla}\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right), \quad (13)$$

som vi kallar för gradienten av  $\Phi$ . Dvs  $d\Phi = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi$ .

Med en normalvektor  $\hat{n}$  som har längden 1, så är  $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi$  riktningsderivatan för  $\Phi$  i riktningen  $\hat{n}$ , det vill säga den mäter hur snabbt  $\Phi$  varierar i denna riktning.

### Riktningsderivata

Vad blir enheten på denna riktningsderivata?

**Svar:** Enheten är  $[\Phi]/\text{längd}$ . Notera att  $[\hat{n}] = 1$ .

Gradientoperatorn

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (14)$$

är i sig själv inte en vektor, utan den är en vektoroperator, som tar ett skalärfält och producerar ett vektorfält. Skillnaden mellan en vektoroperator och en vektor kommer att märkas när vi bekantar oss med räkneregler för vektoroperatorer.

Det är enkelt att visa att  $\vec{\nabla}\Phi$  är ortogonal mot nivåytorna för  $\Phi$ . Låt  $\hat{e}_t$  vara en tangentvektor till en nivåyta genom en punkt  $\vec{r}_0$ . Eftersom  $\Phi = \Phi_0$  (konstant) längs nivåytan gäller att

$$\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_t \perp \vec{\nabla}\Phi.$$

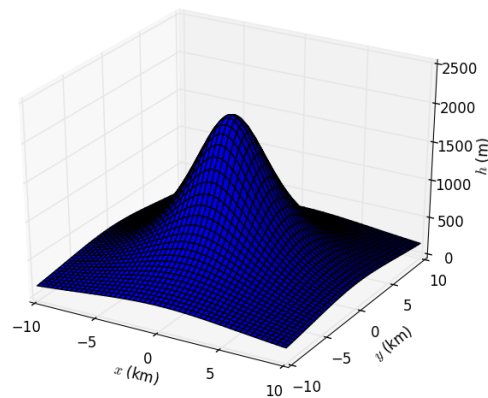
Kurvor som i varje punkt har  $\vec{\nabla}\Phi$  som tangentvektor kallas för **fältlinjer**.

### Exempel: Höjdkurvor och riktningderivata

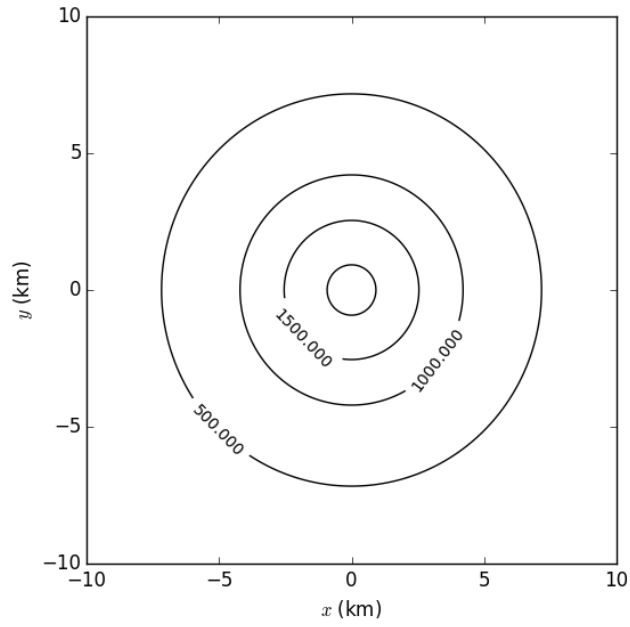
Betrakta en bergstopp med en höjdyta som ges av

$$h(\vec{r}) = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}}, \quad (15)$$

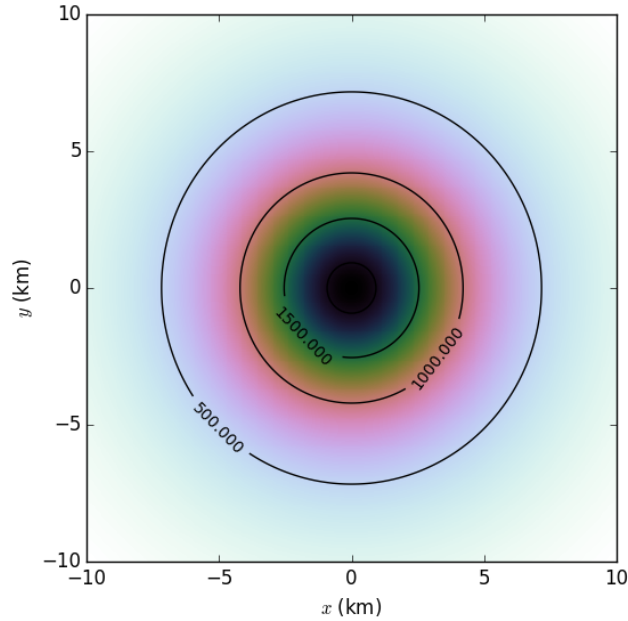
där  $h$  ger höjden över havet,  $h_0$  är höjden på toppen av berget, och  $R$  är ett mått på bergets utbredning.



Vi kan göra en höjdkarta genom att rita upp några nivååtor, dvs kurvor som motsvarar konstanta värden på  $h$ . Vi ser enkelt att kurvan  $x^2 + y^2 = C^2$  (konstant) ger  $h_C = \frac{h_0}{1 + \frac{C^2}{R^2}}$  (konstant) och att höjdkurvorna därför motsvarar cirklar med centrum i origo ( $x = y = 0$ ).



Eller kombinerat med höjdkurvor enligt en kontinuerlig färgskala



Gradienten av detta fält kommer att motsvara höjdändringen per längdenhet i horisontalplanet. Vi finner denna genom att skriva  $x^2 + y^2 = r^2$  så att  $h = h(r)$ . Vi får

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h_0}{(1 + r^2/R^2)^2} \frac{2r}{R^2} \quad (16)$$

Vidare är

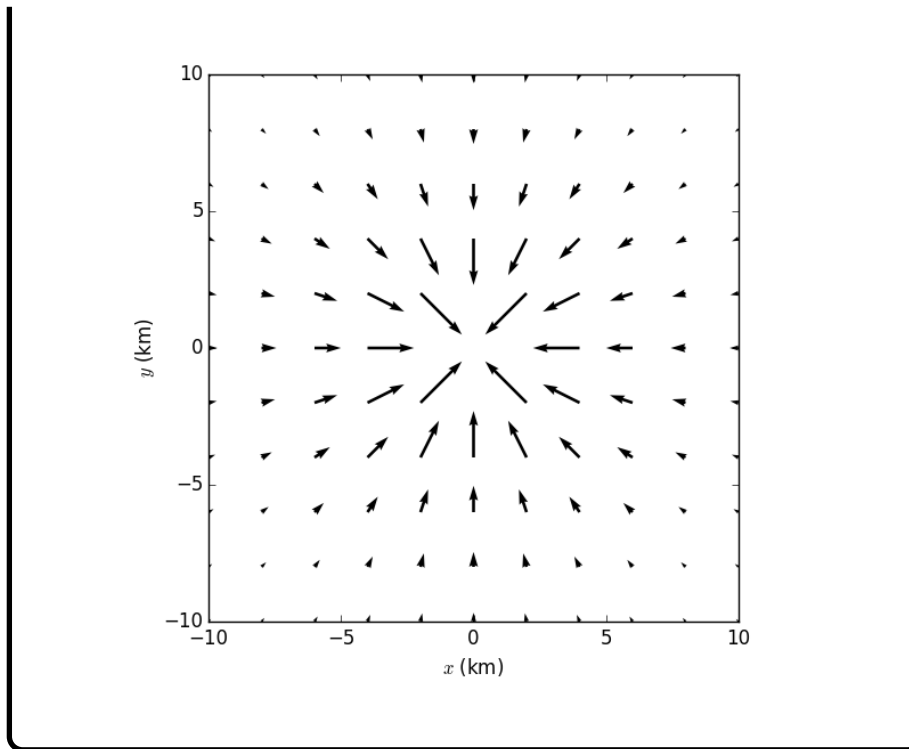
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{r}, \quad (17)$$

och pss  $\partial_y r = y/r$ . Därför blir

$$\vec{\nabla} h = \hat{x} \partial_x h + \hat{y} \partial_y h = \hat{x} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (18)$$

$$= -\frac{2h_0}{R^2(1 + r^2/R^2)^2} (x\hat{x} + y\hat{y}). \quad (19)$$

Riktningen på denna vektor ser vi är  $-(x\hat{x} + y\hat{y}) = -r\hat{r}$ , dvs den horisontella höjdgradienten är riktad radiellt inåt - mot större värden av  $h$ .



## Vektorfält

Ett vektorfält beskriver på samma sätt en fysikalisk kvantitet som i varje punkt i rummet är en vektor. Exempel på sådana kvantiteter är hastigheten i en strömmande fluid, den magnetiska fältstyrkan, och den elektriska strömtätheten.

**Fältlinjer.** Geometriskt kan vi representera ett vektorfält genom att konstruera fältlinjer. Fältlinjerna till ett vektorfält  $\vec{F}(\vec{r})$  är de kurvor som överallt har  $\vec{F}(\vec{r})$  som tangentvektor.

För att förstå begreppet fältlinjer kan vi börja med att tänka oss ett vektorfält  $\vec{V}(x, y, z)$  som representerar en hastighet i en fluid. En testpartikel i fluiden följer då en bana  $\vec{r}(t)$  som ges av

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(\vec{r}). \quad (20)$$

Analogt med detta definierar vi en fältlinje som den bana vi får genom att följa med ett godtyckligt vektorfält  $\vec{F}$  som om det var ett hastighetsfält. Ekvationen för ett sådant vektorfält är

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = C\vec{F}(\vec{r}(\tau)), \quad (21)$$

där  $C$  är en godtycklig konstant (dvs du kan välja den som du själv vill, så länge som du inte sätter den till noll), och  $\tau$  är en parameter för att numrera punkterna längs fältlinjen.

**Exempel: fältlinjer (enkel diff.ekv.)**

Vi vill konstruera fältlinjerna till

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \left( \frac{x}{a} \hat{x} + \hat{y} \right). \quad (22)$$

Detta ger oss differentialekvationerna

$$\frac{dx}{d\tau} = CF_0 \frac{x}{a}, \quad (23)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = CF_0. \quad (24)$$

Vi väljer nu  $C = a/F_0$ , så att ekvationerna blir

$$\frac{dx}{d\tau} = x, \quad (25)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = a \quad (26)$$

Dessa har lösningen

$$x = x_0 e^\tau, \quad (27)$$

$$y = a\tau + y_0 \quad (28)$$

där  $x_0$  och  $y_0$  är den punkt på fältlinjen där  $\tau = 0$ .

**Divergens och rotation.** Vi kan derivera ett vektorfält på två huvudsakliga sätt. Dels kan vi bilda en skalär genom **divergensen**  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  (eller  $\text{div} \vec{F}$ ), eller en vektor genom rotationen  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  (eller  $\text{rot} \vec{F}$ ). I cartesiska koordinater blir de explicita uttrycken

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z, \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y) \hat{x} + (\partial_z F_x - \partial_x F_z) \hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \hat{z}. \quad (30)$$

Divergensen ger ett mått på hur mycket fältet *går isär* (divergerar), medan rotationen mäter hur mycket det *snurrar runt*.



**Exempel: divergens**

Vektorfältet  $\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  har divergensen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3$  och rotationen  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  (fältet är rotationsfritt). Notera att negativa värden på divergensen betyder att fältet *går ihop* (konvergerar).

**Exempel: rotation**

Hastighetsfältet för en roterande fluid  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Med  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$  fås  $\vec{v} = -\omega y\hat{x} + \omega x\hat{y}$  och rotationen blir  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\omega\hat{z}$  medan divergensen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . Detta specifika hastighetsfält är alltså **divergensfritt**.

**Laplaceoperatoren.** Vi kommer också att stöta på den viktiga **Laplaceoperatoren**:  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ . Verkande på ett skalärt fält i cartesiska koordinater blir detta

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\Phi. \quad (31)$$

Likaså kan denna verka på ett vektorfält  $\Delta\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{F} = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\vec{F}$ .

**En första bekantskap med potentialfält**

En potential,  $\Phi$ , är ett viktigt specialfall av ett skalärt fält. Ur en potential kan vi beräkna ett vektorfält  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$ , som vi ofta kallar för en fältstyrka.

Vi kan då både konstruera nivåytorna till potentialen, vilka kallas ekvipotentialytor, och fältlinjerna till fältstyrkan. Lägg märke till att ekvipotentialytorna och fältlinjerna överallt måste vara ortogonala mot varandra.

**Exempel: Fältbild (med en svårare diff.ekv.)**

Bestäm fältbilden till potentialen

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2}{ax}. \quad (32)$$

Vi börjar med att bestämma ekvipotentialkurvorna genom att sätta  $\Phi = 2C/\Phi_0$ , så att vi får ekvationen

$$2C = \frac{x^2 + y^2}{ax}. \quad (33)$$

Vi multiplicerar med  $ax$  och sätter alla termerna på samma sida om likhetstecknet

$$0 = x^2 - 2aCx + y^2. \quad (34)$$

Efter kvadratkomplettering får vi

$$0 = (x - aC)^2 - a^2C^2 + y^2. \quad (35)$$

Denna ekvation kan vi skriva om som

$$a^2C^2 = (x - aC)^2 + y^2, \quad (36)$$

vilket är ekvationen för en cirkel med centrum i  $(aC, 0)$  och radien  $|aC|$ . Detta innebär att alla ekvipotentialytorna går genom origo. Notera att det finns inget som förbjuder  $aC$  från att vara ett negativt tal.

Nu bestämmer vi fältstyrkan

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\Phi_0}{a} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right). \quad (37)$$

Fältlinjerna är då lösningen till

$$\frac{dx}{d\tau} = -C \frac{\Phi_0}{a} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \right), \quad (38)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -C \frac{\Phi_0}{a} \frac{2y}{x}. \quad (39)$$

Vi dividerar nu (39) med (38)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y/x}{1 - y^2/x^2}, \quad (40)$$

**Lösning 1.** (Se avsnitt 7.2 i Arfken.)

Vi noterar att vi har den allmänna formen av en första ordningens differentialekvation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (41)$$

Hade vår ekvation varit separabel hade vi fått en väldigt snabb lösning. För en separabel diff.ekv. gäller att  $P(x, y) = P(x)$  och  $Q(x, y) = Q(y)$  så att

$$Q(y)dy = -P(x)dx, \quad (42)$$

vilket vi enkelt kan integrera. Men tyvärr, i vårt fall kan vi inte skriva ekvationen på denna form. Istället undersöker vi om den är en exakt differential. I sådana fall existerar det en funktion  $\varphi(x, y)$  så att

$$\partial_x \varphi(x, y) = P(x, y) \quad \text{och} \quad \partial_y \varphi(x, y) = Q(x, y). \quad (43)$$

Detta är i sin tur uppfyllt omm

$$\partial_y P(x, y) = \partial_x Q(x, y). \quad (44)$$

I vårt fall är detta inte omedelbart sant eftersom vi har  $P(x, y) = -2y/x$  och  $Q(x, y) = 1 - y^2/x^2$ . Men strukturen ser ändå lovande ut; vi skulle dock önska att kvoterna var de omvända, dvs  $x/y$ . Vi multiplicerar täljare och nämnare med  $-x^2/y^2$  vilket ger

$$P(x, y) = \frac{2x}{y}, \quad (45)$$

$$Q(x, y) = 1 - \frac{x^2}{y^2}. \quad (46)$$

vilket uppfyller  $\partial_y P(x, y) = \partial_x Q(x, y)$  (kolla gärna). En sådan funktion (i vårt fall  $\alpha(x, y) = -x^2/y^2$ ) kallas för en integrerande faktor och går alltid att finna. Men tyvärr existerar det inget systematiskt sätt att konstruera denna (förutom för linjära, första ordningens ODE).

Under detta villkor har diff.ekvationen lösningen (om du är intresserad, se ett bevis av denna ekvation [här](#). Notera också att Arfken är lite slarvig med att skilja på integrationsvariabler och integrationsgränser.)

$$\int_{x_0}^x P(x', y) dx' + \int_{y_0}^y Q(x_0, y') dy' = \text{konstant}. \quad (47)$$

Vi får att

$$\text{konstant} = \left[ \frac{x'^2}{y} \right]_{x_0}^x + \left[ y' + \frac{x_0^2}{y'} \right]_{y_0}^y. \quad (48)$$

Sätt in integrationsgränserna

$$\text{konstant} = \frac{x^2}{y} - \frac{x_0^2}{y} + y + \frac{x_0^2}{y} - y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}. \quad (49)$$

Två termer tar ut varandra och vi kan baka ihop alla konstanter till en ny (konstant +  $y_0 + x_0^2/y_0 \equiv 2D$ ). Multiplicera med  $y$  vilket ger

$$x^2 + y^2 - 2Dy = 0. \quad (50)$$

Efter kvadratkomplettering får vi

$$x^2 + (y - D)^2 = D^2, \quad (51)$$

vilket är ekvationen för en cirkel med centrum i  $(0, D)$  och med radien  $|D|$ , det vill säga alla fältlinjerna går genom origo. Notera att det finns inget som förbjuder  $D$  från att vara ett negativt tal.

**Lösning 2.** Diff.ekvationen ovan kan skrivas om som

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}. \quad (52)$$

Om vi flyttar om termerna så får vi

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 0. \quad (53)$$

Multiplitera med  $-x^2/y^2$

$$\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y} = 0. \quad (54)$$

Vi noterar nu att

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{y} + y \right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y}, \quad (55)$$

det vill säga vår ekvation kan skrivas

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{y} + y \right) = 0. \quad (56)$$

Om vi integrerar detta uttryck får vi

$$\frac{x^2}{y} + y = 2D, \quad (57)$$

där  $D$  är en integrationskonstant. Vi multiplicerar med  $y$

$$x^2 + y^2 = 2Dy. \quad (58)$$

Detta är samma lösning som ovan.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 3, 2019

## 2. Kroklinjiga koordinater

Allmänt behöver vi tre parametrar  $u_1, u_2, u_3$  för att beskriva en godtycklig punkt i rummet. Jämför med *generaliserade koordinater* i analytisk mekanik. Vi kan då skriva Ortsvektorn som  $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ .

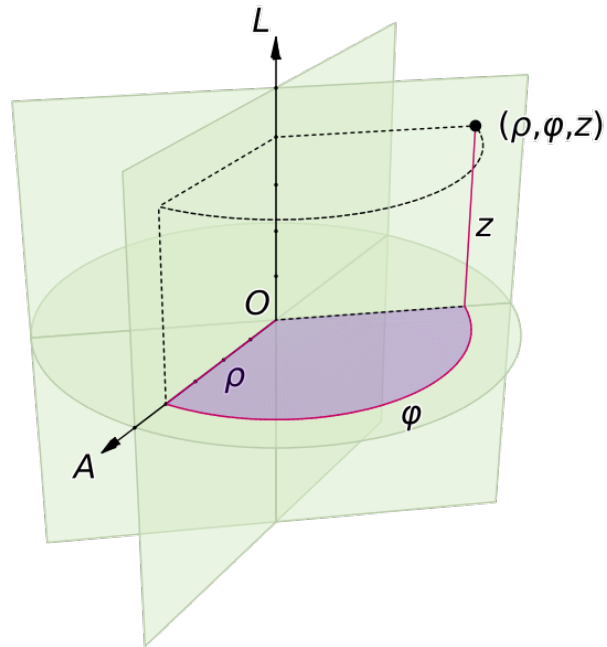
**Koordinatyta.** för koordinat  $i$ : alla lösningar till  $u_i = \text{konstant}$ .

**Koordinatkurva.** den kurva som fås om en koordinat tillåts variera och de andra hålls konstanta.

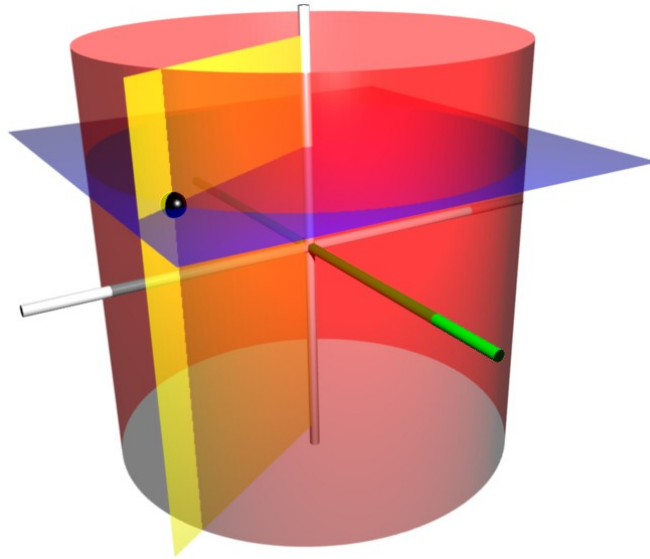
Om vi då håller en av parametrarna, säg  $u_1$ , fix och låter  $u_2$  och  $u_3$  variera, så får vi en två-dimensionell yta, vilken vi kallar  $u_1$ -ytan. På samma sätt kan vi då definiera ytor för de andra koordinaterna. Två koordinatytor, till exempel de för koordinaterna  $u_2$  och  $u_3$ , skär varandra längs en en-dimensionell kurva. Längs denna kurva kommer då bara koordinaten  $u_1$  att variera, så denna kurva är en koordinatkurva för  $u_1$ .

### Exempel: cylindriska koordinater

I de cylindriska koordinaterna  $\rho, \phi, z$  kan vi skriva Ortsvektorn som  $\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$ .



Koordinatytorna för  $\rho, \phi, z$  är då en cylinder med  $z$ -axeln som symmetriaxel och med radien  $\rho$ , ett plan som utgår från  $z$ -axeln och bildar en vinkel  $\phi$  med  $x$ -axeln, samt ett plan parallellt med  $xy$ -planet och med  $z$ -koordinaten  $z$ .



Koordinatlinjerna för  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$  blir då en stråle som utgår från  $z$ -axeln och bildar vinkeln  $\phi$  med  $x$ -axeln, en cirkel med radien  $\rho$  och en linje parallell med  $z$ -axeln.

## Enhetsvektorer

Om vi nu studerar en liten förskjutning av Ortsvektorn,  $d\vec{r}$ , så kan vi i och med att Ortsvektorn är en funktion av  $u_1, u_2, u_3$  skriva denna som

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (1)$$

Tänk nu på att den partiella derivatan  $\partial \vec{r} / \partial u_1$  är definierad som derivatan då vi håller  $u_2$  och  $u_3$  fixa. Därför måste  $\partial \vec{r} / \partial u_1$  vara en tangentvektor till koordinatkurvan för  $u_1$ . Vi kan då definiera en enhetsvektor för  $u_1$  som

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad (2)$$

där

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \quad (3)$$

kallas för skalfaktorn. På samma sätt kan vi bestämma skalfaktorer och enhetsvektorer till  $u_2$  och  $u_3$ . Förskjutningsvektorn  $d\vec{r}$  kan vi nu skriva som

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + h_2 \hat{e}_2 du_2 + h_3 \hat{e}_3 du_3. \quad (4)$$

**Alternativ definition.** Ett alternativ till att använda de normerade tangentvektorerna som enhetsvektorer är att använda normalvektorerna till koordinatytorna. Betrakta t.ex.

$$u_1 = u_1(x, y, z) = \text{konstant}. \quad (5)$$

Detta motsvarar en nivåyta till ett skalärfält. Normalvektorn ges alltså av  $\vec{\nabla}u_1$ . Det gäller alltid att

$$\vec{\nabla}u_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \quad (6)$$

När vi inskränker oss till ortogonala system gäller dessutom att  $\vec{\nabla}u_i \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ . Notera dock att dessa vektorer i allmänhet kan ha *olika* längd. Faktum är att följande samband gäller för ortogonala system

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \vec{\nabla}u_i. \quad (7)$$

#### Exempel: Enhetsvektorer för cylindriska koordinater

I cylindriska koordinater är  $\vec{r} = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$ . Vi kan då beräkna

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \quad (10)$$

Skalfaktorerna blir då

$$h_\rho = (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^{1/2} = 1, \quad (11)$$

$$h_\phi = (\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi)^{1/2} = \rho, \quad (12)$$

$$h_z = 1. \quad (13)$$

Enhetsvektorerna blir

$$\hat{\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (14)$$

$$\hat{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad (15)$$

$$\hat{z} = (0, 0, 1). \quad (16)$$

Förskjutningsvektorn kan då skrivas som

$$d\vec{r} = \hat{\rho}d\rho + \rho\hat{\phi}d\phi + \hat{z}dz. \quad (17)$$



I fortsättningen skall vi begränsa oss till koordinatsystem med ortogonala enhetsvektorer, dvs

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (18)$$

där vi passat på att introducera Kroneckers delta,  $\delta_{ij}$ .

Vi skall också anta att enhetsvektorerna bildar ett högersystem

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad (19)$$

*Visa att enhetsvektorerna i de cylindriska koordinaterna uppfyller dessa villkor.*

Vi kan nu härleda några användbara samband som båglängden längs en kurva

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2. \quad (20)$$

Betrakta ovanstående båglängd för fallet då  $du_2 = du_3 = 0$ . Det står då klart att vi kan tolka  $h_1 du_1$  som båglängden  $ds_1$ , dvs som en infinitesimal förflyttning i  $u_1$ -riktningen. Notera därför att  $h_i du_i$  alltid måste ha enheten längd.

Ett ytelement  $d\vec{S}_1$  på koordinatytan  $u_1$  är en rektangel som genereras av  $du_2$  och  $du_3$ . Rektangelns sidor har då längderna  $h_2 du_2$  och  $h_3 du_3$ . Ytelementet blir

$$d\vec{S}_1 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3, \quad (21)$$

och på samma sätt kan vi beräkna ytelementen på koordinatytorerna för  $u_2$  och  $u_3$ .

Analogt kan vi beräkna volymelementet som genereras av  $du_1$ ,  $du_2$  och  $du_3$ , vilket blir

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (22)$$

#### Exempel: båg- yt- och volymselement i cylindriska koordinater

Bågelementet i cylindriska koordinater blir

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (23)$$

Ett ytelement på  $\rho$ -ytan skrives

$$d\vec{S}_\rho = \hat{e}_\rho \rho d\phi dz, \quad (24)$$

på  $\phi$ -ytan

$$d\vec{S}_\phi = \hat{e}_\phi d\rho dz \quad (25)$$

och på  $z$ -ytan

$$d\vec{S}_z = \hat{e}_z \rho d\rho d\phi. \quad (26)$$

Volymelementet kan vi skriva som

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (27)$$

## Vektoroperatorer i kroklinjiga koordinater

**Gradient.** Betrakta ett skalärt fält  $\phi$ . Om vi förflyttar oss en sträcka  $d\vec{r}$  så förändras  $\phi$

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}. \quad (28)$$

Samtidigt, om vi skriver  $\phi$  som en funktion av  $u_1, u_2$  och  $u_3$  får vi

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\phi}{\partial u_3} du_3 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} h_3 du_3 \\ &= \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{e}_3 \right) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (29)$$

Förflyttningen  $d\vec{r}$  (ovan) kan vi i de nya koordinaterna skriva som [se ekv. (4)]

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + h_2 \hat{e}_2 du_2 + h_3 \hat{e}_3 du_3. \quad (30)$$

Då kan vi identifiera uttrycket inom parentes som gradienten i de nya koordinaterna  $u_1, u_2, u_3$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{e}_3. \quad (31)$$

**Gradient i cylindriska koordinater:** I cylindriska koordinater blir gradienten

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (32)$$

### Exempel: skalärfält och dess gradient i olika koordinatsystem

Ett skalärfält är givet i Cartesiska koordinater

$$\beta = x^2 + y^2. \quad (33)$$

Motsvarande skalärfält i plana polärkoordinater blir

$$\beta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2. \quad (34)$$

Gradienten i Cartesiska koordinater blir

$$\vec{\nabla}\beta = \hat{x}\partial_x\beta + \hat{y}\partial_y\beta = 2(x\hat{x} + y\hat{y}). \quad (35)$$

Medan i plana polärkoordinater blir den

$$\vec{\nabla}\beta = \hat{e}_r\partial_r + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\beta = 2r\hat{e}_r. \quad (36)$$

Eftersom  $x\hat{x} + y\hat{y} = r\hat{e}_r$  är det uppenbart att detta är samma vektor!

### Exempel: Tentauppgift 2010-08-26: 1b

För vilka värden på  $\alpha, \beta, \gamma$  har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater  $\xi$  och  $\eta$ , givna av

$$\xi = x^2 - y^2 \quad (37)$$

$$\eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \quad (38)$$

ortogonala basvektorer?

**Lösning.** Vi kan konstruera basvektorer på två sätt:

- $\hat{e}_i \propto \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$
- $\hat{e}_i \propto \vec{\nabla} u_i$

Det första sättet innebär att vi behöver räkna ut storheterna  $\frac{\partial x}{\partial u_i}$  och  $\frac{\partial y}{\partial u_i}$ , dvs vi behöver veta  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ . Vi skulle behöva invertera det givna koordinatsambandet.

Det andra sättet kräver istället  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  och  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  (samt motsvarande för  $\eta$ ) och detta blir enkelt med de givna koordinatstransformationerna. Vi får

$$\vec{\nabla}\xi = 2x\hat{x} - 2y\hat{y} \quad (39)$$

$$\vec{\nabla}\eta = (2\alpha x + \beta y)\hat{x} + (\beta x + 2\gamma y)\hat{y} \quad (40)$$

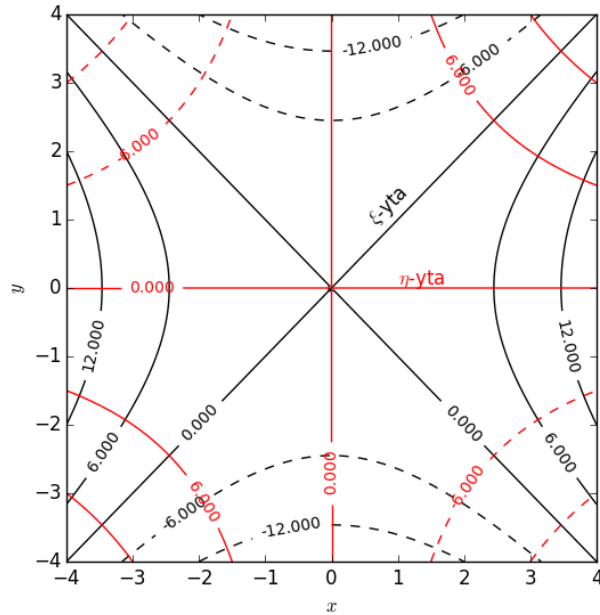
För att koordinatsystemet skall vara ortogonalt behöver vi

$$\hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 0. \quad (41)$$

Från uttrycken för dessa gradienter ovan får vi

$$\vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 2x(2\alpha x + \beta y) - 2y(\beta x + 2\gamma y) = 4\alpha x^2 - 4\gamma y^2. \quad (42)$$

För att få  $\vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 0$  måste vi ha  $\alpha = \gamma = 0$ , medan  $\beta$  är godtyckligt.



### Exempel: Fältlinjer i kroklinjiga koordinater

Låt oss konstruera och rita fältlinjerna till en så kallad virveltråd

$$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (43)$$

som alltså är uttryckt i cylindriska koordinater. Notera att detta fält är singulärt längs hela  $z$ -axeln vid  $\rho = 0$ , men vi kommer här enbart att betrakta  $\rho > 0$ .

**Lösning.** Vi kan rita fältlinjerna på två sätt:

- Det första alternativet är förstås att finna ett explicit uttryck för fältlinjerna genom att formulera och lösa differentialekvationerna. Sedan kan vi definiera dessa kurvor som en funktion i Matlab (eller Python) och rita upp dem explicit för några olika startpunkter.
- Det andra alternativt är att utnyttja funktionen 'streamline' i Matlab ('streamplot' i Python) och mata in vektorfältet på ett rutnät av olika

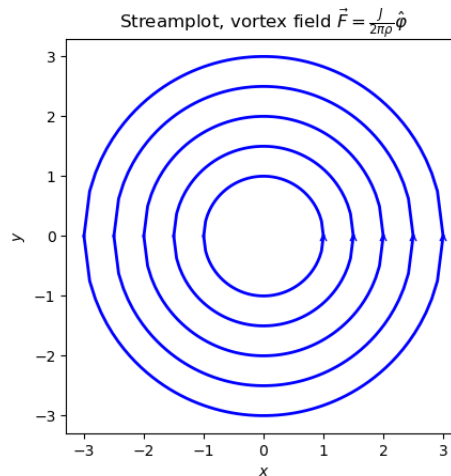
koordinatpunkter. Notera dock att detta alternativ bygger på att vi transformerar till ett Cartesiskt koordinatsystem.

Vi börjar med att konstruera fältlinjerna i cylindriska koordinater. Här noterar vi att förskjutningsvektorn ges av  $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$ . Vi tecknar nu ekvationen  $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = C\vec{F}$ , med  $C = 2\pi/J$ , på komponentform

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} = 0 &\Rightarrow \rho(\tau) = \rho_0, \\ \rho \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\rho} &\Rightarrow \varphi(\tau) = \frac{\tau}{\rho_0^2} + \varphi_0, \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 &\Rightarrow z(\tau) = z_0. \end{aligned}$$

Ur detta ser man att fältlinjerna blir cirklar i  $xy$ -planet vid  $z = z_0$  och med radie  $\rho_0$ . De genomlöps moturs eftersom vinkeln  $\varphi$  ökar med ökande  $\tau$ .

Vi kan teckna ekvationen för fältlinjerna i Cartesiska koordinater som sambandet  $x^2 + y^2 = \rho_0^2$  och rita upp dessa för några olika val av  $\rho_0$ . I figuren nedan är fältlinjerna ritade som funktioner  $y = \pm\sqrt{\rho_0^2 - x^2}$  för  $\rho_0 = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ .



Nu tittar vi på det andra alternativet och använder tillgänglig funktionalitet i Matlab (eller Python). Här krävs dock att vektorfältets Cartesiska komponenter räknas ut. Från transformationen mellan cylindriska och

Cartesiska koordinater ser vi direkt att

$$\frac{2\pi}{J} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\phi} = \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}).$$

Koordinaterna är relaterade enligt  $\rho^2 = x^2 + y^2$  och  $\cos \varphi = x/\rho$ ,  $\sin \varphi = y/\rho$ , vilket ger

$$\frac{2\pi}{J} \vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y\hat{x} + x\hat{y}).$$

I både Matlab och Python kan vi skapa ett rutnät av  $x, y$ -koordinater och tillhörande  $F_x, F_y$  komponenter som vi sedan ritar med 'streamline' ('streamplot' i Python). Se nedan för kod och figur med Matlab:

```
% Make an x,y grid
[X,Y] = ndgrid(linspace(-2.5,2.5,100),linspace(-2.5,2.5,100));
R=sqrt(X.^2+Y.^2);

% Plot streamlines for corresponding vector field
v_x = - Y ./ R.^2; % Note that -Y/R = -sin(phi)
v_y = X ./ R.^2; % Note that X/R = cos(phi)

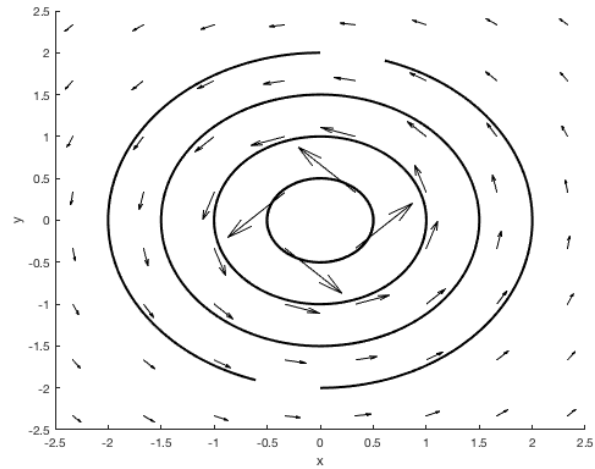
% In Matlab we have to provide start points for streamlines.
start1_y=-2.0:0.5:-0.5;
start_y=[start1_y, -start1_y];
start_x=[zeros(size(start_y))];

% Fine tuning might be needed to get a nice set of streamlines.
strm=streamline(X', Y', v_x', v_y', start_x, start_y,[0.01]);
set(strm,'LineWidth',2,'Color','k')

hold on

% Matlab streamlines have no arrows. Combine with quiver.
% Use fewer grid points to avoid too many arrows in the plot.
[Xc,Yc] = ndgrid(linspace(-3,3,10),linspace(-3,3,10));
Rc=sqrt(Xc.^2+Yc.^2);
v_xc = - Yc ./ Rc.^2; % Note that -Y/R = -sin(phi)
v_yc = Xc ./ Rc.^2; % Note that X/R = cos(phi)
qvr=quiver(Xc', Yc', v_xc', v_yc', 'Color','k');

xlabel('x')
ylabel('y')
xlim([-2.5,2.5])
ylim([-2.5,2.5])
```



Och samma exempel med Python:

```
import sys
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w = 3
Y, X = np.mgrid[-w:w:100j, -w:w:100j]
R = np.sqrt(X**2+Y**2)
U = -Y / R**2 # Note that -Y/R = -sin(phi)
V = X / R**2 # Note that X/R = cos(phi)

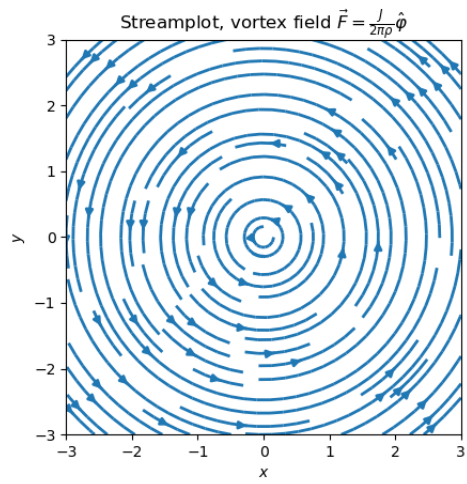
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)

strm = ax.streamplot(X, Y, U, V, linewidth=2)

ax.set_title(r'Streamplot, vortex field ' +\
             r'$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$')
ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')

ax.set_aspect('equal')

plt.savefig('streamlines-vortex.png')
```





# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 9, 2019

## 3. Integraler

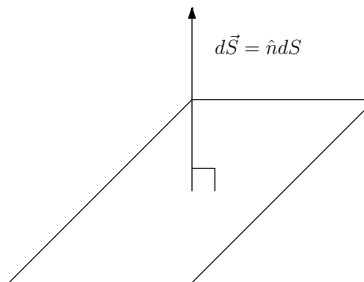
Det mesta av detta material förutsätts vara känt från kursen i flervariabelanalys.  
Vi kommer att repetera

### Linje- (kurv-) integraler.

- t.ex.  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- eller  $\int_C \phi \cdot ds$
- eller ...
- (integral över en sluten kurva betecknas  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ )

### Ytintegraler.

- t.ex.  $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
- eller ...
- (integral över en sluten yta betecknas  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$ )



### Volymintegraler.

- $\int_V \vec{F} dV$
- eller  $\int_V \phi dV$

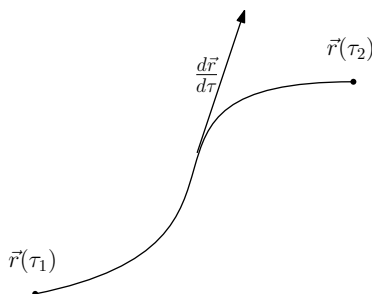
### Parametrisering

Integralerna kan i allmänhet lösas genom parametrisering.

**Parametrisering av kurvintegraler:** T.ex. ges en kurva  $C$  av  $\vec{r}(\tau)$  med  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ . Då blir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

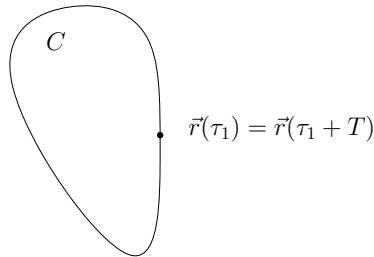
och efter att ha beräknat skalärprodukten har vi en helt vanlig endimensionell integral.



#### Kommentar

Lägg här märke till att  $d\vec{r}/d\tau$  är en tangentvektor till kurvan  $C$ . I princip finns det oändligt många parametriseringar till kurvan  $C$ , och rent matematiskt spelar det ingen roll vilken man väljer, fast vissa parametriseringar ger snällare räkningar än andra!

Ibland är kurvan  $C$  sluten, det vill säga kurvans start- och slutpunkt sammanfaller.



Man skriver då integralen som

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2)$$

Det finns andra typer av linjeintegraler, till exempel

$$\int \phi d\vec{r}, \quad \int \phi ds \quad (3)$$

där  $\phi$  är ett skalärt fält och  $ds = |d\vec{r}|$ . Samt

$$\int \vec{F} \times d\vec{r}, \quad \int \vec{F} ds. \quad (4)$$

### Studera räkneexempel:

- Kurvintegral, cirkel 1
- Kurvintegral, cirkel 2

### Konservativa fält

Om

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5)$$

för varje sluten kurva  $C$ , så säges fältet  $\vec{F}$  vara konservativt. För ett konservativt fält  $\vec{F}$  gäller att givet en fix startpunkt A och en fix slutpunkt B, så beror integralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

inte på valet av kurvan  $C$  mellan dessa punkter.

#### Bevis

Betrakta två kurvor  $C_1$  och  $C_2$  mellan A och B. Då kan vi skapa en sluten kurva  $C_0$  genom att först följa kurvan  $C_1$  från A till B, och sedan kurvan  $C_2$  baklänges, det vill säga i negativ riktning, tillbaka till A. Integralen

över  $C_0$  måste då vara 0, fast den integralen kan vi också skriva som

$$\oint_{C_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (7)$$

ty integralen byter tecken om vi följer kurvan i *fel* riktning. Nu följer det att

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8)$$

### Exempel: Kurvintegral fältstyrka

Betrakta kurvintegralen  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  där  $\vec{A} = -\vec{\nabla}\phi$ , dvs en fältstyrka.

- Det betyder att  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$ .
- Kom ihåg att  $\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = d\phi$ .
- Alltså  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_1 - \phi_2$ .

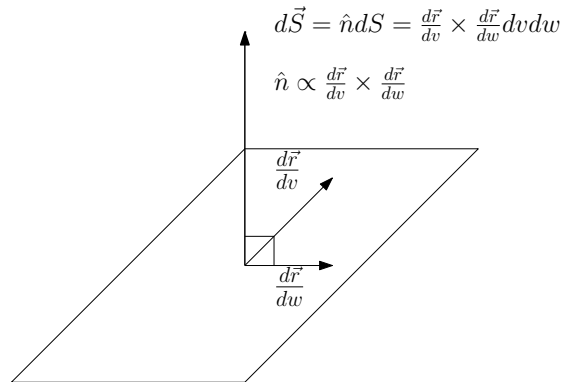
Dvs kurvintegralen av en fältstyrka är oberoende av vägen  $C$  utan beror bara på potentialens värden i start- och slutpunkterna.

**Parametrisering av ytintegraler:** Precis som man kan beräkna linjeintegralerna genom att parametrisera linjen längs vilken man integrerar kan man beräkna ytintegralerna genom att parametrisera ytan längs med vilken man integrerar. Skillnaden är att ytan är två-dimensionell så behöver man två parametrar. Antag att Ortsvektorerna för punkterna på ytan kan skrivas som  $\vec{r}(v, w)$  där  $v$  och  $w$  är våra parametrar. Vi kan då bilda två tangentvektorer till ytan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}. \quad (9)$$

Förutsatt att dessa tangentvektorer inte är parallella, annars måste vi finna en ny parametrisering, kan vi bilda en normalvektor till ytan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}. \quad (10)$$



Analogt med hur vi tidigare uttryckte linjeintegralen med hjälp av vår parameter kan vi nu skriva ytintegralen som

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dv dw, \quad (11)$$

där  $d\vec{S} = \hat{n} dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dv dw$  är ytan på det parallelogram som spänns upp av de två tangentvektorerna. Normalvektorn uppfyller  $|\hat{n}| = 1$ .

Jämför gärna denna parametrisering med våra tidigare uttryck för ytelement i kroklinjiga koordinater. Kan vi välja ett koordinatsystem så att det sökta ytelementet ligger på  $u_1$ -ytan så blir  $d\vec{S} = d\vec{S}_1 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$ , vilket man t.ex. ser från  $d\vec{S}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_2 du_3 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$

Allmänt skriver man ytintegraler över en yta  $S$  (ofta använder man i de här sammanhangen  $S$  för att beteckna en yta) som

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (12)$$

För att skilja dessa integraler från andra ytintegraler, som emellanåt förekommer, kallar man dem för normalytintegraler.

### Studera räkneexempel:

- Cylinderyta

#### Kommentar

För resten av den här kursen kommer det ofta att vara lämpligt att på detta sätt beskriva arean av ett ytelement som en vektor. En komplikation är förstås att en yta i allmänhet har två motsatta normalvektorer, och man måste därför ange vilken riktning som är positiv. Ytterligare en komplikation är att det finns ytor för vilka man inte kan definiera normalvektorn på ett kontinuerligt sätt över hela ytan, till exempel Möbius-bandet. Vi skall

inte befatta oss med sådana ytor här, utan begränsa oss till orienterbara ytor, ytor som har en insida och en utsida.

Om ytan  $S$  är sluten så skriver man

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (13)$$

För slutna ytor definierar man den positiva riktningen som den som ges av en vektor som pekar ut från den inneslutna volymen.

Det finns också andra former av ytintegraler, vilka emellanåt används:

$$\int_S \phi dS, \quad (14)$$

där  $\phi$  är en skalär, och vi i detta fall inte betraktar  $S$  som en vektor.

$$\int_S \phi d\vec{S} \quad (15)$$

Skillnaden mot det första fallet är att  $S$  här behandlas som en vektor.

$$\int_S \vec{v} \times d\vec{S} \quad (16)$$

där  $\vec{v}$  är en vektorvärd funktion.

**Parametrisering av volymintegraler.** Det finns bara två möjliga sätt att volymintegrera ett fält. Med (det skalära) volymelementet  $dV$

$$\int_V \phi dV, \quad \int_V \vec{F} dV. \quad (17)$$

En parametrisering med  $(u, v, w)$  ger att volymselementet blir volymen av parallelepipederna med sidorna  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$  (som då måste vara linjärt oberoende). Denna volym är

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw. \quad (18)$$

## Integration med ortogonala kroklinjiga koordinater

Från tidigare kapitel har vi

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 h_1 du_1 + \hat{e}_2 h_2 du_2 + \hat{e}_3 h_3 du_3 \quad (19)$$

Vidare ytelementet, t.ex. för en  $u_1$ -yta (dvs i  $u_2 u_3$ -planet):

$$dS_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (20)$$

$$d\vec{S}_1 = \pm \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (21)$$

vilket man t.ex. ser från

$$d\vec{S}_1 = \frac{d\vec{r}}{du_2} \times \frac{d\vec{r}}{du_3} du_2 du_3 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (22)$$

Volymelement:

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (23)$$

Med ett vektorfält  $\vec{F}$  som tecknas i det kroklinjiga koordinatsystemet  $\vec{F} = F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3$  får vi t.ex.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} F_1 h_1 du_1 \quad (24)$$

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (25)$$

$$\int_V \vec{F} dV = \int_V \vec{F} h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3, \quad (26)$$

där  $C_1$  är en kurva längs  $u_1$ -riktningen och  $S_1$  är en  $u_1$ -yta.

## Räkneexempel: Linjeintegraler

### Exempel: Kurvintegral cirkel 1

Beräkna integralen  $\oint_C \phi d\vec{r}$  där  $\phi = \phi_0$  (konstant) och kurvan  $C$  beskriver en cirkel i  $xy$ -planet med radie  $a$  och centrum i origo som genomlöps medurs.

- Notera att svaret kommer att bli en vektor.
- Parametrisera kurvan (notera riktningen):  $\vec{r}(\tau) = x(\tau)\hat{x} + y(\tau)\hat{y} = a \sin \omega\tau \hat{x} + a \cos \omega\tau \hat{y}$  med  $\tau \in [0, 2\pi/\omega]$ .
- Vi inkluderar konstanten  $\omega$  för att illustrera att det finns ett oändligt antal parametreringar och att svaret inte kan bero på detta.
- Förskjutningsvektorn  $d\vec{r} = \hat{x} \frac{dx}{d\tau} d\tau + \hat{y} \frac{dy}{d\tau} d\tau$ .

Den parametriserade kurvintegralen blir

$$\oint_C \phi d\vec{r} = \phi_0 \int_0^{2\pi/\omega} [\hat{x} a \omega \cos \omega\tau - \hat{y} a \omega \sin \omega\tau] d\tau = 0 \quad (27)$$

### Exempel: Kurvintegral cirkel 2

Beräkna integralen  $\oint_C \phi dr$  där  $\phi = \phi_0$  (konstant) och kurvan  $C$  beskriver en cirkel i  $xy$ -planet med radie  $a$  och centrum i origo som genomlöps medurs.

- Notera att svaret kommer att bli en skalär.
- Lite eftertanke ger att svaret borde bli  $\phi_0 2\pi a$ , dvs den konstanta potentialen gånger omkretsen på cirkeln.
- Bågelementet blir  $dr = |d\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 d\tau^2} = a\omega d\tau$

Den parametriserade kurvintegralen blir

$$\oint_C \phi ds = \phi_0 a \omega \int_0^{2\pi/\omega} d\tau = \phi_0 2\pi a \quad (28)$$

### Exempel: Kraft och arbete

En partikel rör sig längs en bana  $C$ , som ges av  $\vec{r}(t)$ , under inverkan av en kraft  $\vec{F}(\vec{r})$ . Vi vill då beräkna arbetet som kraften utövar på partikeln. Mellan punkterna  $\vec{r}$  och  $\vec{r} + d\vec{r}$  så är arbetet

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (29)$$

Vi kan då beräkna arbetet längs hela kurvan genom att beräkna integralen

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (30)$$

Denna integral är ett exempel på en linjeintegral (kurvintegral). Vi kan skriva

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int P dt, \quad (31)$$

där  $P$  är effekten.

### Exempel: Konservativ kraft och arbete

En elektron rör sig längs banan  $y = \frac{x^2}{H}$  från  $(0, 0)$  till  $(L, L^2/H)$  under inverkan av en elektrostatisk kraft  $\vec{F} = eE_0 \hat{y}$ . Beräkna det arbete som kraften utför på elektronen.

**Lösning 1:** Arbetet ges av integralen

$$\int_C eE_0 \hat{y} \cdot d\vec{r}, \quad (32)$$



där  $C$  är den kurva som elektronen följer. Vi kan nu använda koordinaten  $x$  för att parametrisera vår kurva och skriver kurvan som  $\vec{r}(x) = (x, x^2/H)$ . Då gäller att

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \left(1, \frac{2x}{H}\right). \quad (33)$$

Vi kan nu beräkna arbetet ur

$$\int_C eE_0\hat{y} \cdot d\vec{r} = \int_0^L eE_0\hat{y} \cdot \frac{d\vec{r}}{dx} dx = \int_0^L eE_0 \frac{2x}{H} dx = \frac{eE_0}{H} [x^2]_0^L = \frac{eE_0L^2}{H}. \quad (34)$$

**Lösning 2:** Elektrostatiska krafter är konservativa, så vi kan ersätta kurvan med två räta linjer, en  $C_1$  som går från  $(0, 0)$  till  $(L, 0)$  och är parallell med  $x$ -axeln, och en kurva  $C_2$  som går från  $(L, 0)$  till  $(L, L^2/H)$  och är parallell med  $y$ -axeln. Arbetet kan nu skrivas som

$$\int_C eE_0\hat{y} \cdot dr = \int_{C_1} eE_0\hat{y} \cdot dr + \int_{C_2} eE_0\hat{y} \cdot dr. \quad (35)$$

Eftersom kraften överallt är ortogonal mot kurvan  $C_1$  följer att integralen längs med  $C_1$  måste vara noll, så det återstår bara att beräkna

$$\int_{C_2} eE_0\hat{y} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} eE_0\hat{y} \cdot \hat{y} dr = eE_0 \int_{C_2} dr. \quad (36)$$

Den sista integralen ger nu längden på kurvan  $C_2$ , vilken är  $L^2/H$ , så arbetet blir till slut

$$\frac{eE_0L^2}{H}. \quad (37)$$

### Exempel: Parametriserad 3d-kurva

Beräkna integralen av  $\vec{u} = (xy/a^2, z^2/a^2, x/a)$  längs med kurvan

$$\begin{cases} x &= (1+t)a \\ y &= 0 \\ z &= t^2a \end{cases} \quad (38)$$

där  $0 \leq t \leq 3$ .

Vi beräknar då först

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = a(1, 0, 2t). \quad (39)$$

Vektorfältet uttryckt i  $t$  är

$$\vec{u} = ((1+t) \cdot 0, t^4, 1+t) = (0, t^4, 1+t). \quad (40)$$

Skalarprodukten mellan vektorerna är

$$(0, t^4, 1+t) \cdot a(1, 0, 2t) = a(2t + 2t^2). \quad (41)$$

Integralen blir

$$a \int_0^3 (2t + 2t^2) dt = a \left[ t^2 + \frac{2t^3}{3} \right]_0^3 = a(9 + 18) = 27a. \quad (42)$$

## Räkneexempel: Ytintegraler

### Exempel: Flöde genom yta

En vätska med densiteten  $\rho$  och hastigheten  $\vec{u}$  strömmar parallellt genom ett rör med tvärsnittsarean  $A$ . Flödet av vätska genom röret (det vill säga kg vätska som per sekund strömmar genom röret) är då  $\rho u A$ .

Vad händer då om vätskans hastighet  $\vec{u}$  beror på avståndet  $r$  från rörets symmetriaxel? I så fall får vi definiera en flödestäthet  $\rho u(r)$  så att flödet genom ett ytelement  $dS$  blir  $\rho u(r) dS$ . Om vi tar  $dS$  som en ring med centrum i symmetriaxeln och med en tjocklek  $dr$  så är  $dA = 2\pi r dr$  och det totala flödet genom röret blir

$$\int \rho u(r) dS = \int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr, \quad (43)$$

där  $R$  är rörets radie.

För att nu ytterligare komplicera det hela och verkligen blanda in vektorerna så antar vi att vätskan strömmar genom en tvärsnittsarea  $dS$ , vilken inte är vinkelrät mot vätskans strömningshastighet  $\vec{u}$ . Vi antar att vinkeln mellan normalvektorn  $\vec{n}$  till ytan  $dS$  och vätskans hastighet  $\vec{u}$  är  $\theta$ . Då blir flödet genom ytan  $dS$

$$\rho u dS \cos \theta. \quad (44)$$

Om vi nu väljer att definiera en vektor  $d\vec{S}$  för ett ytelement med storleken  $dS$  och riktningen  $\vec{n}$ , så ser vi att vi kan skriva flödet som

$$\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}, \quad (45)$$

där  $\rho \vec{u}$  kan kallas för en massflödestäthet (jämför med en strömtäthet för flöde av elektrisk laddning).

Vi kan nu skriva vätskeflödet genom en godtycklig yta  $A$  som

$$\int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}, \quad (46)$$

vilket är ett typiskt exempel på en ytintegral.

### Exempel: Cylinderyta

Beräkna ytintegralen av fältet  $\vec{u} = (x, z, -y)$  över cylinderytan  $x^2 + y^2 = 1$  mellan  $z = 0$  och  $z = 1$  med normalen pekandes bort från  $z$ -axeln. Vi kan då beskriva punkterna på ytan genom deras  $z$ -koordinat och vinkeln  $\varphi$  som Ortsvektorn bildar med  $\hat{x}$ -vektorn. Det vill säga  $\vec{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ , och tangentvektorerna blir

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (47)$$

och

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \quad (48)$$

Ytelementet blir

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} d\varphi dz = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) d\varphi dz. \quad (49)$$

Vi kan sedan beräkna integralen som

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi, z, -\sin \varphi) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) d\varphi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + z \sin \varphi) d\varphi dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + z \sin \varphi \right) d\varphi dz \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi - z \cos \varphi \right]_0^{2\pi} dz = \int_0^1 \pi dz = \pi. \end{aligned} \quad (50)$$

**Alternativ.** Integrationsytan motsvarar en  $\rho$ -yta i cylindriska koordinater. Detta ger direkt att

$$d\vec{S} = \hat{\rho} h_\varphi h_z d\varphi dz = \{h_z = 1, h_\varphi = \rho = 1\} = \hat{\rho} d\varphi dz. \quad (51)$$

Skalärprodukten  $\vec{u} \cdot d\vec{S} = (x\hat{x} \cdot \hat{\rho} + z\hat{y} \cdot \hat{\rho} - y\hat{z} \cdot \hat{\rho})d\varphi dz = (\cos^2 \varphi + z \sin \varphi)d\varphi dz$ ,  
vilket leder till samma integral som ovan.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 9, 2019

## 4. Integralsatser

Minnesregel för strukturen på alla integralsatser

$$\int_{V_D} (\text{derivata av fält}) = \int_{(\partial V)_{D-1}} (\text{fält}) \quad (1)$$

Enkelt exempel: integration av funktion av en variabel:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad (2)$$

Randen av den endimensionella volymen  $[a, b]$  är de två punkterna  $a$  och  $b$ , så tolkningen av högerledet i det schematiska uttrycket ovan blir en summa över dessa två punkter.

### Gauss sats

Man kan alltid beräkna integraler enligt metoderna på förra föreläsningen, men i vissa fall kan man tillämpa integralsatser som förenklar beräkningarna.

Ett viktigt exempel på en sådan sats är Gauss sats.

#### Sats:

Antag att  $\vec{F}$  är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat i en volym  $V$ .  $\partial V = S$  är den slutna ytan som bildar randen till  $V$  och  $d\vec{S} = \hat{n}dS$  där

$\hat{n}$  är den utåtriktade enhetsnormalen. Då gäller att

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3)$$

Kvantiteten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (4)$$

kallar vi för divergensen av  $\vec{F}$ . Om man tänker sig att  $\vec{F}$  är hastigheten för en vätska, så kan man se divergensen av  $\vec{F}$  i en punkt som ett mått på hur mycket vätska som strömmar ut från den punkten.

Lägg märke till att volymen  $V$  i Gauss sats måste vara sammanhängande, men att det inte är nödvändigt att  $S$  är sammanhängande.  $S$  kan mycket väl bestå av ett ändligt antal var för sig glatta ytsegment, så länge som de bara tillsammans bildar en sluten yta. Vidare kommer vi tills vidare att begränsa oss till "hyfsat snällafält". Mer om detta längre fram i kursen.

En fysikalisk tolkning av Gauss sats är att högerledet representerar flödet ut genom en yta  $S$  och att vänsterledet representerar närvaror av källor till detta flöde innanför ytan. Integranden  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  kallas också för källtäthet.

#### Exempel: Gauss sats (tentamen 2011-08-25 variant)

Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

där  $\vec{F} = -F_0 z \hat{z}/a$  och  $S$  är ytan  $x^2 + y^2 = (z - 4a)^2$  och  $0 \leq z \leq 4a$  med normalen snett uppåt (alltså positiv z-komponent).

**Lösning:**

- Bestäm utseendet på ytan  $S$  och rita en tydlig figur.
- Undersök fältet  $\vec{F}$ . Singulariteter? Beräkna  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ .
- Slut ytan  $S$ . Undvik singulariteter inuti den inneslutna volymen.
- Teckna Gauss sats och beräkna integralen.
- Har normalen rätt riktning?

Vår ytan är en kon med spetsen i  $z = 4a$  och en öppning nedåt. Den är alltså inte sluten! Fältet är utan singulariteter och divergensen är  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -F_0/a$ .

Vi kan sluta ytan genom att lägga till en bottenplatta,  $S_{z=0}$ , i  $xy$ -planet. Detta blir en cirkelskiva med  $z = 0$  och radie  $4a$ . Normalvektorn blir  $-\hat{z}$

för att peka ut från den inneslutna volymen. På den slutna ytan  $S + S_{z=0}$  kan vi sedan tillämpa Gauss sats

$$\oint_{S+S_{z=0}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = -\frac{F_0}{a} \int_V dV = -\frac{F_0}{a} \frac{1}{3} \pi (4a)^2 4a. \quad (6)$$

Vi kan nu separat beräkna

$$\int_{S_{z=0}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (7)$$

eftersom  $\vec{F} = 0$  då  $z = 0$ . Slutligen har vi alltså

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{64\pi}{3} F_0 a^2. \quad (8)$$

## Kontinuitetsekvationen

Tänk oss ett fall med en strömmande fluid där vi antar att den totala massan är bevarad.

- Densitetsfält  $\rho(\vec{r}, t)$
- Hastighetsfält  $\vec{v}(\vec{r}, t)$
- Massflödestäthet  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$

Definiera en yta  $d\vec{S}$  med normalriktning  $\hat{n}$ . Då blir  $\vec{j} \cdot \hat{n} = \text{massa/tidsenhet} \cdot \text{areaenhet}$  genom ytan.

Inne i en volym  $V$  finns massan  $m_V = \int_V \rho dV$ . Vi kan räkna ut  $\frac{dm_V}{dt}$  på två sätt:

- Från integralen ovan:  $\frac{dm_V}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ .
- Hur mycket massa flödar in i volymen per tidsenhet

$$\begin{aligned} \frac{dm_V}{dt} &= -\{\text{det som flödar ut}\} = -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \{\text{Gauss sats}\} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV \end{aligned} \quad (9)$$

Sammantaget så innebär det att  $\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV = 0$  för alla volymer  $V$ . Därför får vi kontinuitetsekvationen (som uttrycker en storhets bevarande)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (10)$$

## Stokes sats

Först given på skrivningen för Smith's priset i februari 1854 i Cambridge. (Bästa student J. C. Maxwell).

### Sats:

Den slutna kurvan  $C$  är randen till ytan  $S$ . Då gäller för ett kontinuerligt deriverbart vektorfält  $\vec{F}$  på  $S$  att

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (11)$$

där  $\partial S = C$  är randen till  $S$  och  $d\vec{S} = \hat{n}dS$ . Normalriktningen ( $\hat{n}$ ) och randens riktning ( $C$ ) är orienterade enligt högerhandsregeln.

En viktig observation är att man kan välja olika ytor  $S$  som alla har samma rand. Integralen i vänsterledet är alltså oberoende av vilken man väljer. Tag två ytor  $S_1$  och  $S_2$  med samma rand. Genom att sätta samman dem, och vända riktning på normalen till den ena får vi en sluten yta  $S$  med  $\partial S = \emptyset$ . Vi har alltså

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \left( \int_{S_1} - \int_{S_2} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (12)$$

Eftersom ytan är sluten kan vi använda Gauss sats, som säger att detta skall vara lika med  $\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dV$  där  $\partial V = S$ . Integranden här är identiskt noll. Så vänsterledets i Stokes sats oberoende av vilken yta man väljer kan via Gauss sats ses som en konsekvens av identiteten

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (13)$$

## Inifinitesimala volymer och ytor: uttryck för divergens och rotation

Vi kan använda Gauss och Stokes satser på inifinitesimala volymer och ytor för att finna koordinatoberoende definition av divergens och rotation på ett fält.

**Divergens i kroklinjiga koordinater.** Med hjälp av ytintegralen kan vi konstruera en koordinatoberoende definition av divergensen i punkten  $P (u_1 u_2 u_3)$ . Betrakta en volym  $\delta V$  runt  $P$ , som är så liten att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  kan betraktas som konstant, och använd Gauss sats

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \Rightarrow \\ &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\partial(\delta V)} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \end{aligned} \quad (14)$$



- $\partial(\delta V)$  är den infinitesimala volymens begränsningsyta.
- Dessa begränsningsytor väljs som koordinatytor för  $u_1, u_2, u_3$
- Vi skriver  $\vec{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$ .

Betrakta först integralen över  $u_1$ -ytorna. Storleken på ytelementet blir  $h_2h_3du_2du_3$  och riktningen blir  $+\hat{e}_1$  och  $-\hat{e}_1$  på de två sidorna. Produkten  $\vec{F} \cdot d\vec{S}$  kommer därmed ha storleken  $(F_1h_2h_3)du_2du_3$  och vi får inte glömma att storheterna inom parantesen kan ha ett  $u_1$ -beroende

$$\begin{aligned} \int_{u_1\text{-ytorna}} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \left( (F_1h_2h_3)_{u_1+du_1/2} - (F_1h_2h_3)_{u_1-du_1/2} \right) du_2du_3 \\ &= \frac{\partial(F_1h_2h_3)}{\partial u_1} du_1du_2du_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Eftersom volymen  $\delta V = h_1h_2h_3du_1du_2du_3$  blir det totalt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{du_1du_2du_3}{h_1h_2h_3du_1du_2du_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2) \right) \\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left[ \frac{h_1h_2h_3}{h_i} F_i \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

#### Exempel: sfäriska koordinater

- skalfaktorer  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$
- Ett vektorfält  $\vec{F} = F_r\hat{e}_r + F_\theta\hat{e}_\theta + F_\varphi\hat{e}_\varphi$

Divergensen blir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (17)$$

**Rotation i kroklinjiga koordinater.** Med hjälp av en kurvintegral kan vi konstruera en koordinatoberoende definition av rotationen. För ett infinitesimalt litet ytelement  $d\vec{S} = \hat{n}dS$  har vi

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \int_{\delta S} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \\ &= \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\partial(\delta S)} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \end{aligned} \quad (18)$$

där  $\delta S$  är ett litet ytelement med normalen  $\hat{n}$  och uttrycket ovan alltså ger komponenten av  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  längs enhetsvektorn  $\hat{n}$ .

- Vi får (exempelvis)  $u_1$ -komponenten av  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  genom att låta  $\delta S$  vara en  $u_1$ -yta.
- Randen  $\partial(\delta S)$  utgörs då av koordinatlinjerna för  $u_2$  och  $u_3$ .
- Lägg ihop de fyra bidragen och dela med  $\delta S = h_2 h_3 du_2 du_3$ .
- Upprepa detta för  $u_2$  och  $u_3$  komponenterna.

Slutresultatet blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

**Laplaceoperatoren i kroklinjiga koordinater.** Slutligen kan man använda uttrycken för gradient och divergens för att få Laplaceoperatoren på en skalär i kroklinjiga koordinater:

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right). \quad (20)$$

#### Exempel (Gauss sats): Tentamen 2003-08-18

Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (21)$$

där  $S$  är ytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z > 0, \quad (22)$$

och fältet  $\vec{F}$  ges av

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a^2} (ax, ay, x^2 + y^2). \quad (23)$$

$a$  och  $F_0$  är konstanter.

*Lösning:*

Vi konstaterar först att ytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z > 0 \quad (24)$$

är en halvsfär med radien  $a$ .

Fältet  $\vec{F}$  är reguljärt överallt, och det har divergensen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{F_0}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} (ax) + \frac{\partial}{\partial y} (ay) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2) \right) = \frac{F_0}{a^2} (a + a) = 2 \frac{F_0}{a}. \quad (25)$$

Allt vi behöver göra för att kunna tillämpa Gauss sats är därför att sluta ytan genom att lägga till en bottenyta  $S_1$  med normalen  $-\hat{z}$ , samtidigt som vi sätter normalen till  $S$  till  $\hat{e}_r$ . Gauss sats ger oss nu att

$$\begin{aligned} \oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_V 2\frac{F_0}{a} dV \\ &= 2\frac{F_0}{a} \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4\pi F_0 a^2}{3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Vi övergår nu till att beräkna integralen över  $S_1$ :

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot (-\hat{z}) dS = \int_{S_1} -\frac{F_0}{a^2} (x^2 + y^2) dS. \quad (27)$$

Det är nu praktiskt att skriva om integralen på cylinderkoordinater

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{F_0}{a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\varphi d\rho = -2\pi \frac{F_0}{a^2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^a = -\frac{\pi F_0 a^2}{2}. \quad (28)$$

Vi kan nu få fram ett värde på vår sökta integral

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{S+S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi F_0 a^2}{3} + \frac{\pi F_0 a^2}{2} = \frac{11\pi F_0 a^2}{6}. \quad (29)$$

### Exempel (Stokes sats): Tentamen 2003-08-18

Beräkna integralen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (30)$$

där kurvan  $C$  ges av skärningen mellan ytorna

$$r^2 \sin^2 \theta (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4a^2, \quad (31)$$

och

$$z = 0. \quad (32)$$

Kurvan omsluts i moturs riktning sett ovanifrån (dvs högerorienterad relativt  $z$ -axeln). Vidare ges fältet  $\vec{F}$  av

$$\vec{F} = F_0 \left[ \left( \frac{a}{r} + \frac{r}{2a} \sin^2 \theta \sin 2\varphi \right) \hat{r} + \left( \frac{a}{r} \cot \theta + \frac{r}{4a} \sin 2\theta \sin 2\varphi \right) \hat{e}_\theta - \frac{r}{a} \sin \theta \sin^2 \varphi \hat{e}_\varphi \right]. \quad (33)$$

$F_0$  och  $a$  är konstanter.

**Lösning:** Strategi:

- Bestäm kurvan  $C$  och rita en tydlig figur
- Undersök fältet  $\vec{F}$ , singulariteter? Räkna ut  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , singulariteter?
- Slut kurvan  $C$  och bestäm ytan  $S$  (ofta flera möjligheter). Undvik singulariteter på ytan.
- Teckna Stokes sats och beräkna de integraler som uppträder
- Kontrollera en gång till att delkurvorna och ytan  $S$  har konsistenta riktningar.

Vi följer lösningsstrategin

- Bestäm kurvan  $C$  och rita en tydlig figur

Formen på denna kurva tolkas kanske enklast i kartesiska koordinater

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (34)$$

Vi börjar alltså med att skriva om

$$r^2 \sin^2 \theta (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4a^2 \quad (35)$$

i kartesiska koordinater

$$4x^2 + y^2 = 4a^2, \quad (36)$$

vilket är mantelytan till en elliptisk cylinder med halvaxlarna  $a$  och  $2a$ . Skärningen med  $z = 0$  planet blir då en ellips i  $xy$ -planet med mittpunkt i origo och med halvaxlarna  $a$  och  $2a$ .

- Undersök fältet  $\vec{F}$ , singulariteter? Räkna ut  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , singulariteter?

Vi skriver om fältet genom att gruppera termerna enligt gemensam prefaktor. Sedan noterar vi att de två termerna blir väldigt enkla om de uttrycks i varsitt koordinatsystem

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_0 \left[ \left( \frac{a}{r} + \frac{r}{2a} \sin^2 \theta \sin 2\varphi \right) \hat{e}_r + \left( \frac{a}{r} \cot \theta + \frac{r}{4a} \sin 2\theta \sin 2\varphi \right) \hat{e}_\theta - \frac{r}{a} \sin \theta \sin^2 \varphi \hat{e}_\varphi \right] \\ &= F_0 \left[ \frac{a}{r \sin \theta} (\sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta) + \frac{r}{a} \sin \theta \sin \varphi (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_\theta - \sin \varphi \hat{e}_\varphi) \right] \\ &= F_0 \left( \frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho + \frac{y}{a} \hat{x} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Där vi alltså har använt att projektionen i  $xy$ -planet är  $\rho = r \sin \theta$  och att  $\hat{e}_\rho = \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta$  och  $\hat{x} = \cos \varphi \hat{e}_\rho - \sin \varphi \hat{e}_\varphi$ .

Notera att vi har skrivit  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  där vi uttryckt de två termerna i olika koordinatsystem. Den första termen är uttryckt i ett cylindriskt koordinatsystem och den andra i ett kartesiskt.

Vi konstaterar nu att  $\vec{F}$  är singular för  $\rho = 0$  (genom  $\vec{F}_1$ -termen).

Sedan beräknar vi rotationen. Det är inget problem att vi har skrivit vektorn som summan av två termer eftersom  $\vec{\nabla} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 + \vec{\nabla} \times \vec{F}_2$ . Kom bara ihåg att använda rätt uttryck för rotationsoperatoren för de olika koordinatsystemen.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (F_\rho \hat{e}_\rho + F_x \hat{x}) = 0 + \vec{\nabla} \times F_x \hat{x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( F_0 \frac{y}{a} \right) \hat{z} = -\frac{F_0}{a} \hat{z}. \quad (38)$$

Vi noterar att denna ej beror på  $\rho$  och ej är singular. Faktum är att det var ganska uppenbart att den första termen skulle ha noll rotation (skissa gärna fältlinjerna).

- Slut kurvan  $C$  och bestäm ytan  $S$  (ofta flera möjligheter). Undvik singulariteter på ytan.

Kurvan  $C$  omsluter redan en yta, men singulariteten gör det svårt att applicera Stokes sats. Notera att det faktum att singulariteten sitter längs hela  $z$ -axeln (en sk linjesingularitet) gör det omöjligt att konstruera en yta utan singularitet med bara  $C$  som rand.

Istället inför vi en inre rand för att kunna använda Stokes sats. Omge  $z$ -axeln med en liten cirkel,  $C_\epsilon$  med radien  $\epsilon$ . Lagg märke till att medan vi följer  $C$  i moturs riktning, så måste vi följa  $C_\epsilon$  i medurs riktning.

**Kommentar 1: Högerhandsregeln. Stå på ytan med tummen upp i normalens riktning och titta på randen. Fingrarna ger riktningen.**

- Teckna Stokes sats och beräkna de integraler som uppträder

Stokes sats ger oss att

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (39)$$

där  $S_\epsilon$  är en yta som har  $C$  och  $C_\epsilon$  till rand. Denna yta har normalvektorn  $\hat{z}$ . I gränsen  $\epsilon \rightarrow 0$  kommer  $S_\epsilon \rightarrow S$ .

Ytintegralen, i gränsen  $\epsilon \rightarrow 0$ , blir då

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{F_0}{a} \int_S dS = -\frac{F_0}{a} \pi(a)(2a) = -2\pi F_0 a. \quad (40)$$

För att räkna ut integralen över  $C_\epsilon$  parametriserar vi kurvan med vinkeln  $\varphi$ . Eftersom vi skall gå moturs längs en cirkel med radien  $\epsilon$  inser vi att

$d\vec{r} = -\epsilon\hat{e}_\varphi d\varphi$  så att integralen blir

$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} F_0 \left( \frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho + \frac{y}{a} \hat{x} \right) \cdot (-\hat{e}_\varphi) \epsilon d\varphi \\ &= F_0 \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \sin \varphi}{a} \sin \varphi d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{då } \epsilon \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (41)$$

Alltså följer det att

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C+C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2\pi F_0 a. \quad (42)$$

- Kontrollera en gång till att delkurvorna och ytan  $S$  har konsistenta riktningar. Det är även en god idé att kontrollera enheten som skall vara enheten på  $F_0$  gånger längd (eftersom vi utfört en kurvintegral).

## Ytterligare räkneproblem

### Exempel: Ytintegral med öppning

Beräkna integralen

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (43)$$

där  $\vec{F} = F_0/a(x\hat{x} + y\hat{y})$  och  $S$  är ytan  $2a - \sqrt{x^2 - y^2} = z$  och  $0 \leq z \leq 2a$  med normalen snett uppåt (alltså positiv  $z$ -komponent).

Vi kan då börja med att beräkna  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2F_0/a$ . Eftersom divergensen har ett så enkelt uttryck är det lockande att använda Gauss sats, men ytan  $S$  är en kon med spetsen i  $z = 2a$  och öppningen nedåt; den är alltså inte en sluten yta. Vi kan dock sluta den genom att lägga till en cirkelskiva,  $S_\epsilon$  i  $xy$ -planet med radien  $2a$  och normalvektorn  $-\hat{z}$ . På den slutna ytan  $S + S_\epsilon$  kan vi sedan tillämpa Gauss sats

$$\oint_{S+S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \frac{2F_0}{a} \int_V dV. \quad (44)$$

Volymen av konen är

$$\int_V dV = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 2a = \frac{8\pi a^3}{3}, \quad (45)$$

och alltså blir integralen

$$\oint_{S+S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2F_0}{a} \frac{8\pi a^3}{3} = \frac{16\pi F_0 a^2}{3}. \quad (46)$$

Vi kan nu separat beräkna

$$\int_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (47)$$

men här lägger vi märke till att  $\vec{F}$  saknar en  $z$ -komponent, så  $\vec{F} \cdot \hat{z} = 0$ , och integralen över  $S_\epsilon$  blir också noll. Slutligen har vi alltså

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{16\pi F_0 a^2}{3}. \quad (48)$$

### Exempel: kurvintegral längs komplicerad ellips

**Kommentar 2:** PLK Kap. 2.5 Uppg. 3: Beräkna integralen

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (49)$$

där

$$\vec{F} = [x^2 - a(y+z)] \hat{x} + (y^2 - az) \hat{y} + [z^2 - a(x+y)] \hat{z}, \quad (50)$$

och  $\Gamma$  är den kurva som utgör skärningen mellan cylindern

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad z \geq 0, \quad (51)$$

och sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R > 2a, \quad (52)$$

där  $a$  är en konstant med dimensionen längd.

**Lösning:** Vi kan först konstatera att skärningen mellan cylinder och sfär är en ellips vars exakta form är något komplicerad att fastställa. Eftersom kurvan  $\Gamma$  är en sluten kurva är det lockande att använda Stokes sats, så vi beräknar rotationen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - a(y+z) & y^2 - az & z^2 - a(x+y) \end{vmatrix} \\ &= (-a+a) \hat{x} + (-a+a) \hat{y} + a \hat{z} = a \hat{z}. \end{aligned} \quad (53)$$

Alltså är rotationen av  $\vec{F}$  en rent vertikal vektor.

Vi kan nu använda Stokes sats

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (54)$$

Lägg märke till att ytan skall orienteras så att den följer högerhandsregeln. Detta betyder att om vi följer kurvan  $\Gamma$  moturs så skall normalen  $\hat{n}$  till  $S$  peka uppåt.

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S a\hat{z} \cdot \hat{n} dS = a \int_S \hat{z} \cdot \hat{n} dS. \quad (55)$$

Skalarprodukten i den sista integralen betyder att vi projicerar ner arean  $S$  på ett plan vinkelrät mot  $\hat{z}$ , det vill säga på  $xy$ -planet. I detta planet är skärningen cylinderns tvärsnittsytta, en cirkel med radien  $a$ , och integralen blir cirkelarean  $\pi a^2$ . Alltså blir integralen till slut

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = a\pi a^2 = \pi a^3. \quad (56)$$

### Exempel: kurvintegral för ett kraftfält

**Kommentar 3:** PLK Kap. 2.5, Uppg. 2: En partikel påverkas av kraftfältet

$$\vec{F} = F_0 \left[ \left( \frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi z}{a} \right) \hat{x} + \frac{x}{a} \hat{y} + \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \hat{z} \right]. \quad (57)$$

Vilket arbete uträttar fältet då partikeln rör sig i positiv riktning kring den cirkel som ges av skärningen mellan

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (58)$$

och

$$x = z? \quad (59)$$

**Lösning:** För att få ut arbetet behöver vi beräkna integralen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (60)$$

Vi börjar med att bestämma skärningskurvan  $C$ .  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  är en sfär med radien  $a$  och centrum i origo, medan  $x = z$  är ett plan med normalvektorn

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1). \quad (61)$$



Skärningen mellan de båda ytorna blir en cirkel med radien  $a$ . Den motsvarande cirkelskivan har också normalvektorn  $\hat{n}$ . Med det val som vi har gjort av normalvektorn, så gäller Stokes sats om partikeln rör sig moturs längs cirkeln.

Vi beräknar nu rotationen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= F_0 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi z}{a} & \frac{x}{a} & \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \end{vmatrix} \\ &= 0\hat{x} + F_0 \left( \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi z}{a} - \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \right) \hat{y} + F_0 \left( \frac{1}{a} - \frac{\pi}{a} \right) \hat{z} = F_0 \frac{1-\pi}{a} \hat{z}. \end{aligned} \quad (62)$$

Stokes sats ger oss sedan

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S F_0 \frac{1-\pi}{a} \hat{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1) dS = \frac{1-\pi}{\sqrt{2}a} F_0 \int_S dS \\ &= \frac{1-\pi}{\sqrt{2}a} \pi a^2 F_0 = \frac{\pi(1-\pi)a}{\sqrt{2}} F_0, \end{aligned} \quad (63)$$

vilket är svaret.

#### Exempel: Ytintegral halvcylinder

**Kommentar 4: PLK Kap. 2.4, Uppg. 7:** Låt  $S$  vara ytan  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $z \geq 0$  med normalvektor riktad uppåt. Beräkna

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (64)$$

där  $\vec{F} = (x, x^2yz^2, x^2y^2z)$ .

*Lösning:* Ytan  $S$  är en den övre halvan av en cylinder med  $x$ -axeln som symmetriaxel. För att tillämpa Gauss sats behöver vi sluta denna yta, vilket vi kan göra genom att lägga till två halvcirklar,  $S_1$  och  $S_3$  vid  $x = 1$  och  $x = -1$ , samt en bottenyta,  $S_2$ . Normalvektorn till dessa ytor skall väljas som en kontinuerlig fortsättning av normalvektorn på  $S$ . Detta innebär att  $S_1$  och  $S_3$  får normalvektorerna  $\hat{x}$  och  $-\hat{x}$ , samt att normalvektorn till  $S_2$  blir  $-\hat{z}$ . Vi ser nu att normalvektorn överallt pekar ut från den volym som innesluts av  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  och  $S_3$ , vilket är vad som krävs för att vi skall kunna använda Gauss sats.

Vi kan nu beräkna divergensen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y^2 z) = 1 + x^2 z^2 + x^2 y^2 = 1 + x^2 \rho^2, \quad (65)$$

där vi har infört  $\rho^2 = y^2 + z^2$ . Vi inför alltså en form av cylindriska koordinater som utgår från  $x$ -axeln istället för som vanligt från  $z$ -axeln. Vi kan nu beräkna volymsintegralen

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_V dV + \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^\pi x^2 \rho^2 d\varphi \rho d\rho dx. \quad (66)$$

Tänk här på att vi bara integrerar över en halvcylinder, så att integrationsintervallet för  $\varphi$  går från 0 till  $\pi$ . Den första integralen är bara halvcylindersn volym, så nu får vi

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \frac{1}{2} 2\pi + \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \pi + \pi \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{4} = \frac{7\pi}{6}. \quad (67)$$

Vi får nu ta hand om de enskilda begränsningsytorna.

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} x dS = \int_{S_1} dS = \frac{\pi}{2}, \quad (68)$$

eftersom  $x = 1$  på  $S_1$ . På samma sätt får vi på  $S_3$

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} -x dS = -\frac{\pi}{2}, \quad (69)$$

då  $x = -1$  på  $S_3$ . Slutligen så finner vi att på  $S_2$  så är

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} -x^2 y^2 z dS = 0, \quad (70)$$

ty  $z = 0$  på  $S_2$ .

Om vi ställer samman dessa uträkningar har vi

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV, \quad (71)$$

och om vi här löser ut integralen över  $S$  samt sätter in värdena för de enskilda integralerna får vi

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad (72)$$

*Kommentar:* För att ytintegralen skall vara definierad måste en yta vara orienterbar, det vill säga de skall gå att kontinuerligt transportera normalvektorn från en del av ytan till en annan. Det finns exempel på ytor som inte är orienterbara, till exempel Möbius-band, och för sådana ytor kan man inte definiera en ytintegral.

### Exempel: Ytintegral med koordinatbyte

Beräkna ytintegralen

$$\oint_S (a^2 \hat{x} + ay\hat{y} + z^2 \hat{z}) \cdot d\vec{S} \quad (73)$$

över den slutna ytan  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ .

*Lösning:* Vi börjar med att studera ytan  $S$ . Den kan skrivas om som

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0. \quad (74)$$

Efter kvadratkomplettering har vi

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2. \quad (75)$$

Detta är en sfär med radien  $a$  och centrum i  $(0, 0, a)$ . Lägg märke till att eftersom ytan redan är sluten, så råder det inte någon tvekan om hur normalvektorn är riktad. Konventionen säger oss att normalvektorn för en sluten yta alltid pekar ut från den inneslutna volymen.

I och med att vi redan har en sluten yta, så är det lockande att använda Gauss sats, och därför beräknar vi divergensen

$$\vec{\nabla} \cdot (a^2 \hat{x} + ay\hat{y} + z^2 \hat{z}) = a + 2z. \quad (76)$$

Innan vi tar itu med volymsintegralen byter vi  $z$ -koordinaten till  $z' = z - a$ , så att sfären i de nya koordinaterna får sitt centrum i origo. I dessa koordinater blir divergensen  $3a + 2z'$ . Enligt Gauss sats blir vår ytintegral nu

$$\oint_S (a^2 \hat{x} + ay\hat{y} + z^2 \hat{z}) \cdot d\vec{S} = \int_{V'} (3a + 2z') dV. \quad (77)$$

Vi byter nu till sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a (3a + 2r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi &= 2\pi \int_0^a [-3ar^2 \cos \theta + r^3 \sin^2 \theta]_0^\pi dr \\ &= 2\pi \int_0^a 6ar^2 dr = 2\pi [2ar^3]_0^a = 4\pi a^4, \end{aligned} \quad (78)$$

vilket är värdet på vår ursprungliga ytintegral.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 16, 2019

## 5. Indexnotation

Precis som vi har räkneregler för derivatorer, så kan vi härleda räkneregler för våra differentialoperatorer. Det är då viktigt att komma ihåg att fälten på de båda sidorna av likhetstecknet skall vara av samma typ, det vill säga om vi har ett skalärt fält till vänster om likhetstecknet skall vi ha ett skalärt fält till höger om likhetstecknet, och om vi har ett vektorfält till vänster om likhetstecknet skall också fältet till höger vara ett vektorfält. På så sätt kan man resonera sig fram till några av räknereglerna.

### Gradient, divergens och rotation av en produkt av fält

För vanliga funktioner  $f$  och  $g$  gäller att

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}. \quad (1)$$

Om vi istället betraktar  $\vec{\nabla}(fg)$ , där  $f$  och  $g$  är skalära fält, ser vi att det resulterande fältet skall vara ett vektorfält, och att vi måste derivera ett av fälten åt gången. Om vi tar gradienten av ett skalärt fält, så får vi ett vektorfält och om vi sedan multiplicerar med ytterligare ett skalärt fält, så har vi fortfarande ett vektorfält, alltså bör räknereglen

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \quad (2)$$

gälla. På liknande sätt kan vi resonera oss fram till

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{u}) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (3)$$

och

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{u}) = \vec{\nabla}f \times \vec{u} + f\vec{\nabla} \times \vec{u}. \quad (4)$$

Mer komplexa samband är dock svårare att resonera sig fram till. Detta gäller även kombinationer av flera vektoroperatorer. Vad blir t.ex.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ ? I princip kan man visa dem genom att skriva ut ekvationerna komponentvis, men en effektivare metod är att använda indexnotation. Indexnotationen är ett effektivt verktyg i stora delar av den teoretiska fysiken.

## Indexnotation

Vektorn  $\vec{A}$  är densamma i alla koordinatsystem, Cartesiska såväl som kroklinjiga. I någon given bas kan dess komponenter skrivas ut:  $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i$ .

- Vi kommer nu att betrakta  $A_i$  som komponenterna till  $\vec{A}$  i ett Cartesiskt koordinatsystem.
- Detta kan verka som en begränsning, men kommer faktiskt att ge oss en väldigt kraftfull formalism.
- Vi kommer alltså att skriva vektorn  $\vec{A}$  som  $A_i$ , vilket vi kan tolka som en lista över komponenterna,  $\{A_i\}_{i=1}^3$ .
- Indexet  $i$  kallas ett *fritt index*, eftersom det kan ta värdena  $i = 1, 2, 3$

**Produkter av vektorer.** Skalärprodukten av två vektorer  $\vec{A}$  och  $\vec{B}$  är  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$ . För att göra notationen mer kompakt inför vi nu *Einsteins summationskonvention*, som säger att summation är underförstådd så snart ett index förekommer två gånger. Med dessa skrivregler har vi då

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \tag{5}$$

### Kommentar

Att vi skriver lägre index har ingen betydelse, om man vill kan man t.ex. skriva  $A_i B^i$ . Först när man sysslar med vektorer/tensorer i icke-Cartesiska system behöver man göra åtskillnad på index uppe och nere. Detta gäller t.ex. i speciell relativitetsteori.

Det här uttrycket för skalärprodukten gäller i godtyckligt antal dimensioner. Resultatet av skalärprodukten är förstas en skalär. Indexen  $i$  ovan är *inte* fria index, utan *summationsindex*, eller kontraherade index.

### Exempel: matris-vektor-multiplikation

En matris representeras av sina matriselement (precis som enhetsmatrisen ovan). Det första indexet är rad- och det andra kolumnindex. Matris-vektor-

multiplikationen  $\mathbf{M}\vec{v}$  kan skrivas med indexnotation

$$[\mathbf{M}\vec{v}]_i = M_{ij}v_j \quad (6)$$

**Enhetsmatrisen.** Vi har redan sett Kroneckers delta,  $\delta_{ij}$ , som definieras av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

(notera att detta helt enkelt är matriselementen av enhetsmatrisen).

Betrakta uttrycket  $\delta_{ij}A_j$ . Här är indexet  $j$  repeterat och därför ett summationsindex, och uttrycket skall utläsas  $\sum_{j=1}^3 \delta_{ij}A_j = A_i$ , dvs. helt enkelt multiplikation av vektorn  $\vec{A}$  med enhetsmatrisen.

#### Kommentar

Notera att Kroneckers delta leder till att ett summationsindex "elimineras"; den plockar ut en term ur summan.

#### Exempel: matris-matris-multiplikation och spår av en matris

Matrismultiplikation  $\mathbf{MN} = \mathbf{P}$  skrivs som  $M_{ik}N_{kj} = P_{ij}$ . Spåret av en matris, dvs. summan av diagonalelementen är  $\text{tr}\mathbf{M} = M_{ii}$ .

**Kryssprodukt.** Låt  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ . Komponentvis gäller  $C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$ , och de andra komponenterna ges av cykliska permutationer av indexen. Vi inför nu objektet  $\varepsilon_{ijk}$ , som definieras av

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ jämn permutation av } 123, \\ -1, & ijk \text{ udda permutation av } 123, \\ 0, & \text{annars, dvs. om minst två index tar samma värde.} \end{cases} \quad (8)$$

$\varepsilon_{ijk}$  kallas "ε-tensorn", eller *Levi-Civita-tensorn*.

#### Kommentar

Vi har inte riktigt definierat vad en tensor är ännu. Det kommer senare, och är inte speciellt dramatiskt. För tillfället kan vi bara tänka på det som ett objekt som har ett antal index, alltså en naturlig generalisering av vektor- och matrisbegreppen.

Definitionen gör att  $\varepsilon_{ijk}$  har egenskapen att den byter tecken om man byter plats på två index, vilka som helst. Man säger att den är fullständigt antisymmetrisk.

Eftersom  $\varepsilon_{ijk}$  har tre index, kan vi kontrahera två av dem med index på vektorer, och alltså bilda  $C_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$ . Med hjälp av definitionen kan vi räkna ut t.ex.  $C_1$  (vi sätter  $i = 1$  och summerar över  $j, k$ ):

$i$	$j$	$k$	$\varepsilon_{ijk}$	term
1	2	3	+1	$A_2B_3$
1	3	2	-1	$-A_3B_2$
1	alla andra	0	0	0

(9)

och vi får resultatet  $C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$ , dvs. samma som första komponenten av  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Detsamma gäller de andra komponenterna. Kryssprodukten skrivs alltså

$$[\vec{A} \times \vec{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k. \quad (10)$$

Kryssprodukten är specifik för tre dimensioner, just för att  $\varepsilon$ -tensorerna har tre index i tre dimensioner. Motsvarande objekt i  $D$  dimensioner har  $D$  index:  $\varepsilon_{i_1i_2\dots i_D}$ .

## Produkter av flera vektorer

Låt oss studera följande vektorprodukt

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad (11)$$

vilket blir en vektor. Denna skrivs med indexnotation

$$\left[ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}B_lC_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_jB_lC_m. \quad (12)$$

Låt oss först poängtera att vi kan byta plats på faktorerna som vi gjorde ovan. Eftersom dessa är reella tal gäller t.ex. att  $A_jB_l = B_lA_j$  och motsvarande för  $\varepsilon$ -tensorerna.

Här dyker en produkt av två Levi-Cevita-tensorer upp. Låt oss se om sådana produkter kan förenklas

### Produkter av två $\varepsilon_{ijk}$

Först produkten med enbart två fria index

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}. \quad (13)$$

Detta inses ganska enkelt eftersom

- Produkten måste bli noll då  $i \neq j$ . T.ex.  $i = 1$  innebär att  $kl$  måste vara 23 eller 32, och då måste även  $j = 1$  för att den andra tensor skall vara nollskild.



- Med  $i = j$  måste summan över  $kl$  bli 2. Studera t.ex.  $i = j = 1$ ; de nollskilda termerna i summan blir  $ikl = jkl \in [123, 132]$ , dvs

$$\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{1kl} \varepsilon_{1kl} = \varepsilon_{123} \varepsilon_{123} + \varepsilon_{132} \varepsilon_{132} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2 \quad (14)$$

Nu produkten med enbart ett kontraherat index. Vi kommer att visa att

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (15)$$

Först, genom cyklisk permutation,

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}. \quad (16)$$

Det inses lätt att  $i \neq j$  och  $l \neq m$  (annars blir termerna lika med noll). Vidare inses att paret  $ij$  måste vara lika med  $lm$  eller  $ml$ . Betrakta ett sådant par, t.ex.  $i, j \in [1, 2]$  (alla andra möjligheter visas helt analogt). Då kommer enbart  $k = 3$  termen från summan att bidra och vi har följande möjligheter

$ij$	$lm$	$\sum_k : \text{bara } k = 3.$ $ijk$	$lmk$	Resultat	$\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$
12	12	123	123	= 1	= 1 - 0
12	21	123	213	= -1	= 0 - 1
21	12	213	123	= -1	= 0 - 1
21	21	213	213	= 1	= 1 - 0,

(17)

dvs, resultaten motsvarar exakt kombinationen av deltafunktioner i Ekv (15) ovan.

Ekv (15) motsvarar precis den produkt som dök upp i Ekv (12) ovan. Vi fortsätter

$$\begin{aligned} \left[ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= B_i A_m C_m - A_j B_j C_i = B_i \vec{A} \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \vec{B} C_i \end{aligned} \quad (18)$$

Här har vi bytt plats på  $A_m B_i = B_i A_m$ . Notera vidare att vi lika gärna kunde ha bytt t.ex.  $m \rightarrow j$  i den första termen. Dessa blir ändå ett summationsindex och det spelar ingen roll om det heter  $m$  eller  $j$ .

Till slut finner vi alltså likheten

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \quad (19)$$

## Kombinationer med två vektoroperatorer

En viktig konsekvens av Ekv (19) är

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{F}, \quad (20)$$

vilket ger oss följande uttryck för Laplacianen

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}), \quad (21)$$

eller *VektorLaplace = grad div - rot rot*.

Slutligen, två viktiga samband, vilka dessutom är enkla att härleda, är

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0 \quad (22)$$

och

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (23)$$

Visa gärna dessa själv (eller se bevis nedan)

### Bevis av Ekv (22)

$$\left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \right]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f \quad (24)$$

Till exempel för  $i = 1$

$ijk$	$\partial_j$	$\partial_k$	faktor
123	2	3	+1
132	3	2	-1

(25)

vilket betyder att  $\left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \right]_1 = (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) f = 0$ .

### Bevis av Ekv (23)

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \right] = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k \quad (26)$$

- En viktig poäng är att de sista två faktorerna *inte* får byta plats eftersom  $\partial_j F_k \neq F_k \partial_j$ .
- Däremot har vi att  $\partial_i \partial_j F_k = \partial_j \partial_i F_k$ , vilket betyder att dessa två faktorer kan byta plats.

Summan ovan har 27 termer, men enbart sex nollskilda

$ijk$	term
123	$\partial_1 \partial_2 F_3$
231	$\partial_2 \partial_3 F_1$
312	$\partial_3 \partial_1 F_2$
132	$-\partial_1 \partial_3 F_2$
213	$-\partial_2 \partial_1 F_3$
321	$-\partial_3 \partial_2 F_1$

och eftersom dessa tar ut varandra parvis blir summan noll.

### Tillbaks till början

Vi startade med diverse räkneregler för differentialekvationer. Låt oss studera en av dem med de tekniker som vi nu har lärt oss.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f\vec{u}) &= \left[ \vec{\nabla} \times (f\vec{u}) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (f u_k) = \varepsilon_{ijk} (\partial_j f) u_k + f \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \\ &= \vec{\nabla} f \times \vec{u} + f \vec{\nabla} \times \vec{u}, \end{aligned}$$

där vi använt oss av att  $\partial_j (f u_k) = (\partial_j f) u_k + f \partial_j u_k$ . Vi reproducerar alltså det resultat som vi resonerade oss fram till vid starten av föreläsningen.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 24, 2019

## Repetition: Integralsatser

- Gauss sats

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (1)$$

- Stokes sats

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2)$$

Gäller för kontinuerligt deriverbara vektorfält.

## 6. Singulära fält

### Fråga

Vad händer om fältet har en singularitet?

Det finns tre viktiga typer av singulariteter, vilka dyker upp för speciella vektorfält:

- Punktkälla
- Linjeälla
- Virveltråd

## Punktkällor

Ett fält av formen

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r \quad (3)$$

motsvarar fältet från en punktkälla med styrkan  $q$  (motiveras nedan). Med lämplig tolkning av konstanten  $q$  kan detta t.ex. föreställa det elektriska fältet från en laddning i origo, eller gravitationsfältet från en massa i origo.

### Kommentar

Notera att detta fält är singulärt i origo. Skissa gärna fältlinjerna.

Detta fält är rotationsfritt (åtminstone för  $r > 0$ )

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Rotationsfriheten är också en direkt följd av att  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$  med den skalära potentialen

$$\phi = \frac{q}{4\pi r} \quad (5)$$

Vektorfältet  $\vec{F}$  är också divergensfritt (för  $r > 0$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{q}{4\pi r^2} \right) = 0, \quad r > 0 \quad (6)$$

### Kommentar

Trots frånvaron av divergens får vi ett resultat skilt från noll om vi beräknar normalytintegralen av  $\vec{F}$  över en yta som omsluter origo. Detta görs enklast genom att utföra integralen över en sfär med radie  $a$ .

Normalytintegralen för en yta (sfäriskt skal, radie  $a$ ) som omsluter origo:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi a^2} 4\pi a^2 = q \quad (7)$$

medan Gauss sats skulle ge  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 0!$

### Kommentar

En viktig slutsats är att det vore fel att naivt tillämpa Gauss sats på en volym innehållande origo, trots att fältet ser divergensfritt ut. Det beror på

att det är singulärt där. Med vår nuvarande kunskap får vi acceptera att vi måste undvika punkter där fältet är singulära när vi använder integralsatser.

Mer allmänt:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{om ytan inte omsluter origo.} \\ q & \text{om ytan omsluter origo.} \end{cases} \quad (8)$$

Anledningen till att vi inte kan använda Gauss sats är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \text{ (bättre definition kommer senare)} \end{cases} \quad (9)$$

**Flöde från punktkälla genom allmän yta.** En mer förfinad version av ekv. (7) för normalytintegralen av fältet från en punktkälla över en godtycklig yta  $S$  kan fås genom att projicera normalytelementet på  $r$ -,  $\theta$ - och  $\varphi$ -ytor. Den relevanta projektionen är den på  $r$ -ytan eftersom fältet har den riktningen

$$d\vec{S}_r = \pm \hat{e}_r h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi \quad (10)$$

där tecknet beror på om normalen för  $S$  är utåtriktad (positiv) eller inåtriktad (negativ). Detta ger

$$\frac{q}{4\pi} \int_S \frac{\hat{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \pm \frac{q}{4\pi} \iint \sin \theta d\theta d\varphi = q \frac{\Omega}{4\pi} \quad (11)$$

där  $\Omega$  är den rymdvinkel ytan  $S$  tar upp sedd från origo. Läs mer om begreppet rymdvinkel: <http://mathworld.wolfram.com/SolidAngle.html>

T.ex. blir rymdvinkeln för en yta som helt omsluter origo

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi. \quad (12)$$

## Linjekällor

Ett fält av typen

$$\vec{F} = \frac{k}{2\pi\rho} \hat{e}_\rho \quad (13)$$

svarar fysikaliskt till exempel emot en laddning som är jämnt fördelad längs med en linje (i det här fallet  $z$ -axeln). Storheten  $k$  motsvarar då laddning/längdenhet. Linjekällan är då källan till ett fält som överallt pekar radiellt ut från  $z$ -axeln

### Rita

Fält för linjekälla genom  $z$ -axeln.

Fältet är divergensfritt  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ , förutom för  $\rho = 0$ .

Det kan erhållas från potentialen

$$\phi = -\frac{k}{2\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0} \quad (14)$$

Med konstant källtäthet fås normalytintegralen för en cylinder med längden  $L$  som omsluter linjekällan längs  $z$ -axeln

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = kL \quad (15)$$

#### Kommentar

Mer generellt blir normalytintegralen av fältstyrkan över en smal tub nära en godtycklig kurva lika med den inneslutna källan  $q(C) = \int_C k(\vec{r}) ds$ , där  $C$  är den del av kurvan som innesluts av tuben.

### Ytkälla

På motsvarande sätt kan vi tala om ytkällor i tre dimensioner. Fältet

$$\vec{F} = \frac{\sigma}{2} \text{sign}(z) \hat{z} \quad (16)$$

motsvar en ytkälla i  $xy$ -planet (vid  $z = 0$ ), där  $\sigma$ , i det elektrostatiska fallet, skulle kallas för en ytladdningstäthet.

Närvaron av en ytkälla på ytan  $S$  med styrkan  $\sigma$  är liktydigt med att normalkomponenten av  $\vec{F}$  har en diskontinuitet enligt  $\hat{n} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-) = \sigma$ , där  $\vec{F}_+$  är fältets värde på den sida dit normalen pekar, och  $\vec{F}_-$  dess värde på motsatta sidan.

#### Beräkna

Beräkna gärna flödet genom begränsningsytan till en kub som genomskärs av ytkällan och som har topp- och bottenytor (vardera med area  $A$ ) som är parallella med densamma. Man borde finna att det totala flödet blir  $\sigma A$ , dvs lika med den totala inneslutna laddningen.

#### Kommentar: Källtäthet

Vi har nu sett hur olika singulariteter kan vara källor till ett fält  $\vec{F}$ . Analogt med detta kan vi tolka  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  som en utbredd källa till  $\vec{F}$ . Därför kallar man ibland  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho$  för källtäthet.

- Singulära källor:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$  utom på vissa ställen där källtätheten blir oändlig.

**Repetition: Punktkälla i origo.** Fältet i punkten  $\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r, \quad (17)$$

vilket fås av potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r}, \quad (18)$$

eftersom

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\hat{e}_r \partial_r \frac{q}{4\pi r} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r. \quad (19)$$

**Punktkälla i punkten  $\vec{r}'$ .** Givet att vi har en punktkälla med laddning  $q$  belägen i punkten  $\vec{r}'$ . Potentialen i punkten  $\vec{r}$  blir uppenbart lika med

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (20)$$

Detta ger fältet

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -(\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z) \frac{q}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2(x-x')\hat{x} + 2(y-y')\hat{y} + 2(z-z')\hat{z}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

## Virveltråd

Fältlinjerna till det singulära fältet

$$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho} \hat{e}_\varphi \quad (22)$$

bildar koncentriska cirklar kring  $z$ -axeln. Därför säger vi att det finns en virveltråd med styrkan  $J$  på  $z$ -axeln.

Divergensfritt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ .

Rotationen av fältet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \frac{J}{2\pi\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{för } \rho > 0. \quad (23)$$



Stokes sats skulle ge

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (24)$$

men vad skulle ske om ytan  $S$  gick genom singulariteten?

### Rita

en cirkel med radien  $a$  runt  $z$ -axeln,  $d\vec{r} = a\hat{e}_\varphi d\varphi$

Linjeintegralen blir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{J}{2\pi a} a d\varphi = J. \quad (25)$$

Generellt gäller detta resultat för en kurva  $C$  som omsluter  $z$ -axeln ett varv i positiv led, medan integralen blir noll för kurvor som inte omsluter  $z$ -axeln.

Det vanligaste exemplet är det statiska magnetiska fältet från en ström. Dvs fältet är  $\vec{B}$  och  $J$  motsvarar den elektriska strömmen.

**Virveltäthet.** Vi har nu sett hur en virveltråd kan alstra en virvel i ett vektorfält. Det kan också uppstå virvlar i fält som saknar singulariteter, och för att få ett mått på omfattningen av sådana virvlar inför man virveltätheten  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ .

- Singulära virvlar:  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  utom på vissa ställen

### Exempel: 6.3

Beräkna integralen  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = a^2$  och  $z = 0$  (som genomlöps i positiv riktning) och

$$\vec{F} = F_0 \left[ \frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} \hat{e}_\varrho + \left( \frac{a}{\varrho} - \frac{\varrho \sin^2 \varphi}{a} \right) \hat{e}_\varphi \right] \quad (26)$$

$F_0$  och  $a$  är konstanter.

*Lösning:*

### Kommentar

Kurvan  $C$  är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna  $a$  och  $2a$ . Enligt högerhandsregeln väljer vi  $\hat{z}$  som normal till ellipsskivan.

$C$  kan parametreras  $(x, y) = (a \cos \varphi, 2a \sin \varphi)$ .

Dela upp  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  där  $\vec{F}_1 = F_0 \frac{a}{\rho} \hat{e}_\varphi$  innehåller fältets singularitet (motsvarar en virveltråd på  $z$ -axeln med styrkan  $2\pi F_0 a$ ).

Kurvan  $C$  omsluter virveltråden en gång i positiv led så att  $\oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 1 \cdot 2\pi F_0 a$

Bidraget från  $\vec{F}_2$  fås enklast med hjälp av Stokes sats. Rotationen blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \frac{F_0}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\varphi & \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} & -\frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{a} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\rho \sin 2\varphi}{2a} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{a} \hat{z} \quad (27)$$

Detta ger

$$\oint_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_S \left( -\frac{F_0}{a} \hat{z} \right) \cdot \hat{z} dS = -\frac{F_0}{a} \pi \cdot a \cdot 2a = -2\pi F_0 a \quad (28)$$

Värdet på den totala integralen blir alltså  $\oint_C (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = 0$ .

## Superposition: beräkning av fält från allmänna källfördelningar

**Totalt fält från en ändlig uppsättning med punktkällor.** Vi kan nu beräkna fältet i punkten  $\vec{r}$  från en ändlig uppsättning med  $N$  st punktkällor med laddningar  $q_1, q_2, \dots, q_N$  belägna i punkterna  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  som en superposition

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (29)$$

Alternativt kan vi räkna ut potentialen i punkten  $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (30)$$

från vilken vi förstas får  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$ .

För en kontinuerlig fördelning av laddningar så övergår summorna i ovanstående uttryck förstas till integraler. Sådana situationer betraktar vi härnäst.

**Allmän (kontinuerlig) linjekälla.** Betrakta en linjekälla längs kurvan  $C$ , vilken ges av  $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ . Linjekällan har linjekälltätheten  $k(\tau)$ , som alltså inte nödvändigtvis är konstant.

Vi kan dela upp linjen i infinitesimala linjeelement  $ds$ , vardera med laddningen  $dq = k(\vec{r}(\tau)) ds$  (som alltså blir en funktion av  $\tau$ ). Vi kan betrakta dessa linjeelement som punktkällor. Bidraget från en sådan källa till potentialen i en (godtycklig) punkt  $\vec{r}$  är

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{k(\vec{r}'(\tau)) ds'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (31)$$

Genom att summera alla dessa bidrag, dvs integrera längs linjen  $C$ , får vi den totala potentialen i punkten  $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_C \frac{k(\vec{r}') ds'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (32)$$

Notera att  $\vec{r}' = \vec{r}'(\tau)$  och att  $ds' = \left| \frac{d\vec{r}'}{d\tau} \right| d\tau$

**Allmän (kontinuerlig) ytkälla.** Betrakta en ytkälla längs ytan  $S$ , vilken ges av  $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ . Ytkällan har ytkälltätheten  $\sigma(\vec{r}(s, t))$ .

Genom att summera alla bidrag från infinitesimala ytelement,  $\sigma(\vec{r}')dS$ , får vi den totala potentialen i punkten  $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (33)$$

**Allmän (kontinuerlig) rymdkälla.** En allmän rymdkälla har en rymdkälltätheten som ges av  $\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ . Återigen kan vi använda superposition för att få den totala potentialen i punkten  $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (34)$$

## Greensfunktion

Funktionen

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (35)$$

kallas *Greensfunktionen* och kan sägas motsvara bidraget till potentialen i punkten  $\vec{r}$  från en punktkälla med styrkan 1 belägen i punkten  $\vec{r}'$ . Dessa funktioner dyker upp igen i kapitel 9. Vi kan alltså skriva fältet från en allmän rymdkälla

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'. \quad (36)$$

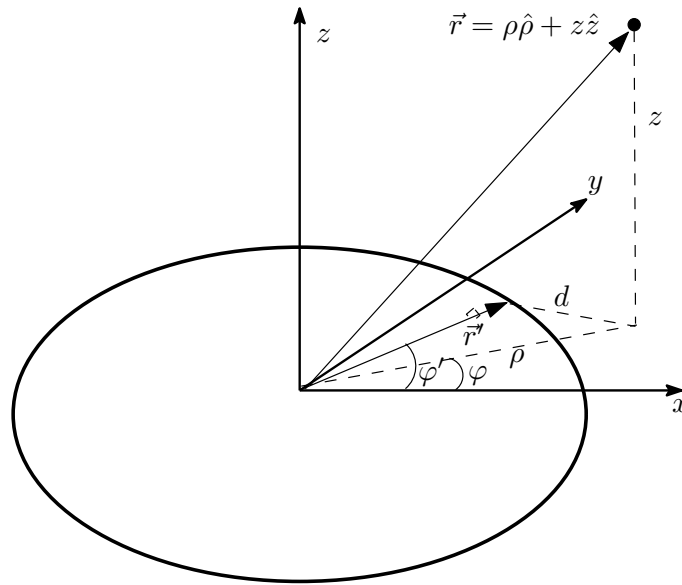
### Exempel: Cirkekälla

Vad är potentialen från en linjekälla med konstant täthet  $k$  (laddning per längdenhet), på cirkeln med radie  $a$  i  $(x, y)$ -planet med  $z$ -axeln som symmetriaxel? Speciellt, vad är potentialen på  $z$ -axeln?

*Lösning:* Beteckna ortvektorn för en punkt på källan med  $\vec{r}'$  och ortvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med  $\vec{r}$ .

Problemet symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Vi får lägesvektorn  $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ . Punkter på källan kan beskrivas med lägesvektorn  $\vec{r}' = a\hat{\rho}' = a\cos(\varphi')\hat{x} + a\sin(\varphi')\hat{y}$  (notera att  $z' = 0$  eftersom linjekällan ligger i  $xy$ -planet).

Ett litet element på linjekällan har laddningen  $dq' = kds' = kad\varphi'$ . Vi vill först beräkna bidraget från laddningen på det lilla elementet till potentialen i punkten  $\vec{r}$  för att sedan summera upp (integrera) den totala potentialen.



Vi får avståndet mellan de två punkterna som

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2} \quad (37)$$

med hjälp av cosinusteoremet.

Med superposition kan vi teckna ett explicit uttryck för potentialen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi' a \frac{k}{4\pi\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2}} \quad (38)$$

Vi kan konstatera att potentialen är symmetrisk runt  $z = 0$ . Specifikt, om  $\vec{r}$  ligger på  $z$ -axeln ( $\rho = 0$ ) förenklas uttrycket till

$$\phi(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi' a \frac{k}{4\pi\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{ak}{2(\sqrt{z^2 + a^2})}. \quad (39)$$

Vi kan kontrollera vad som händer för stora värden på  $|z|$ , dvs då  $|z| \gg a$ . Då är

$$\frac{1}{|z|(1 + \frac{a^2}{z^2})} \approx \frac{1}{|z|} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{z^2}\right), \quad (40)$$

så  $\phi(0, 0, z) \approx \frac{ak}{2|z|} = \frac{2\pi ak}{4\pi|z|}$ , vilket är fältet från en punktkälla med styrka  $2\pi ak$ . Befinner vi oss långt bort från linjekällan (dvs  $z \gg a$ ) så ser fältet ut som fältet från en punktkälla med laddning lika med den totala laddningen på cirkeln. Det verkar rimligt!

## Multipoler

Fältet

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r \quad (41)$$

kallas för ett monopolfält. Det kan finnas fält vars styrka avtar snabbare med  $r$ , men sådana fält innehåller praktiskt taget alltid ett vinkelberoende. Ett exempel på ett sådant fält är dipolfältet, dvs. två lika och motsatta laddningar nära varandra.

Lägg en laddning  $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$  på  $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$  och en laddning  $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$  i origo. Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r} \quad (42)$$

Vi kan skriva  $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\varrho^2 + (z - \varepsilon)^2}$ , och om  $\varepsilon$  är litet ( $\varepsilon/\varrho, \varepsilon/z \ll 1$ ) blir detta  $\sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$ . Så  $\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2})$ .

### Kommentar

Här har vi använt Taylorutvecklingarna  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$  samt  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ .

Potentialen blir

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\varepsilon z}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (43)$$

Mer generellt kan man skriva  $\phi = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$ . I vårt fall var alltså  $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$  dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen  $\frac{\mu}{\varepsilon}$  och separationsvektorn  $\varepsilon\hat{z}$ ).

Fältet blir

$$\vec{F} = \frac{\mu}{4\pi r^3} (\cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta). \quad (44)$$

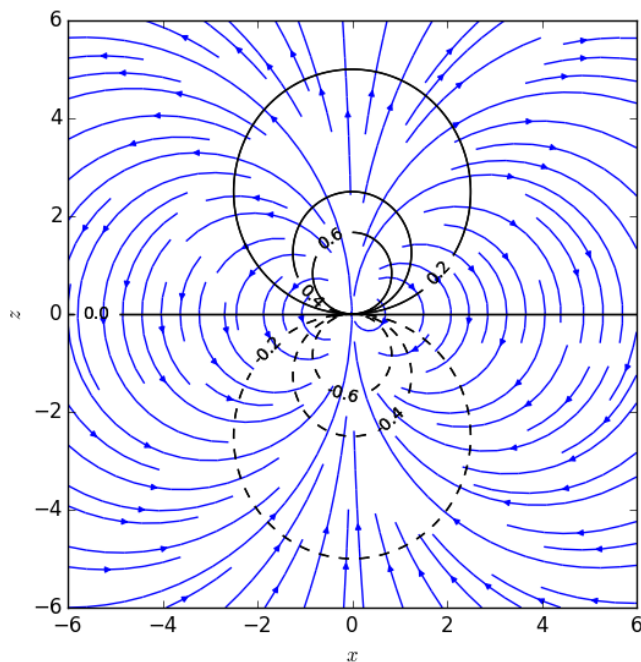
Notera att fältlinjerna är vinkelräta mot nivåkurvorna (eftersom  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ ). I detta fall kommer de alltså att vara cirklar med centrum längs  $x$ -axeln.

Om man integrerar dipolfältet över en sfär ser man att integralen blir 0. Detta beror på att man kan se fältet som sammansatt av en positiv och en negativ laddning på ett litet avstånd från varandra.

### Normalytintegral av ett dipolfält

Vi integrerar fältet (44) över ytan  $S$  som är en sfär med radie  $a$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\mu}{4\pi a^3} (\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta) \cdot \hat{e}_r a^2 \sin\theta d\theta d\varphi &= \frac{\mu}{4\pi a} 2\pi \int_0^\pi \frac{2\cos\theta \sin\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\mu}{2a} \left[ \frac{-\cos 2\theta}{4} \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$



Det går också att definiera kvadrupolfält, oktopolfält och så vidare.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 4, 2019

## Repetition: Singulära fält

### Punktkälla i origo.

- Fältet i punkten  $\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r, \quad (1)$$

fås av potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r}, \quad (2)$$

eftersom  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ .

- Superposition ger potentialen i punkten  $\vec{r}$  från en laddningsfördelning  $\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$ , där  $G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$  kallas för Greensfunktionen i  $\mathbb{R}^3$ .
- Hur skall vi skriva källtäteten,  $\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ , för en punktkälla? Och hur skall vi hantera Gauss sats?

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (3)$$

Vi har att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$  för  $r \neq 0$ , men explicit uträkning ger HL =  $q$  om den inneslutna volymen  $V$  innehåller origo.

## 7. Deltafunktioner

Kan vi approximera  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho(\vec{r})$ , där laddningsfördelningen motsvarar en punktkälla, på något sätt? T.ex.

$$\rho_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} c & r < \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

Dvs, en “utsmetad” punktladdning där vi väljer  $c$  så att den totala laddningen är  $q$ , dvs

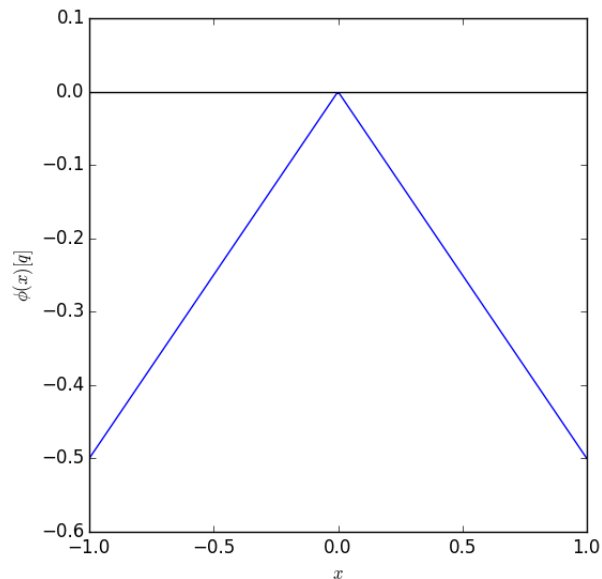
$$\rho_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon^3/3} & r \leq \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases} \quad (5)$$

- Vad blir funktionen då  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ?
- Det kan vi tyvärr inte definiera.
- $\rho(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho_\varepsilon(\vec{r})$  är inte en funktion; sekvensen av funktioner som erhålls genom att variera  $\varepsilon$  kallas för en distribution.

## Deltafunktioner i en dimension

**Punktkälla i  $D = 1$ .** I en dimension kan vi definiera en punktkälla från potentialen

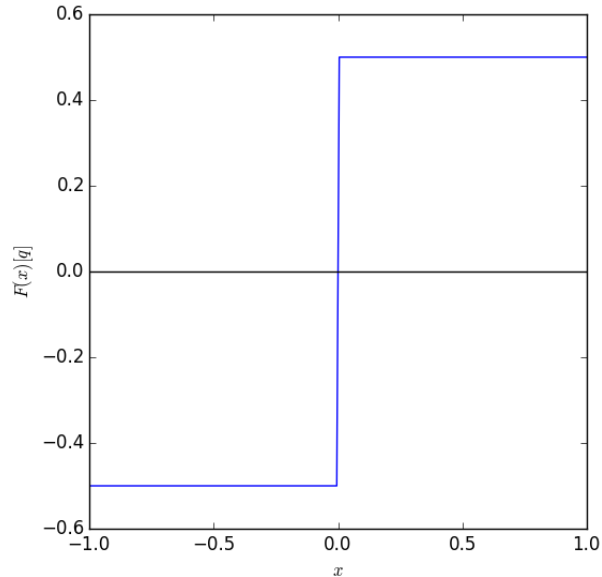
$$\phi(x) = -\frac{q}{2}|x| \quad (6)$$



vilket ger fältet

$$\vec{F}(x) = -\hat{x} \frac{d\phi}{dx} = \begin{cases} \frac{q}{2}\hat{x} & x > 0 \\ -\frac{q}{2}\hat{x} & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$





Vi kallar den enda komponenten av detta vektorfält för  $F(x)$ , dvs  $F(x) = \frac{q}{2}\text{sign}(x)$ . Motsvarigheten till Gauss sats för detta endimensionella fält är

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a) = \begin{cases} q, & \text{om } a < 0 < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad (8)$$

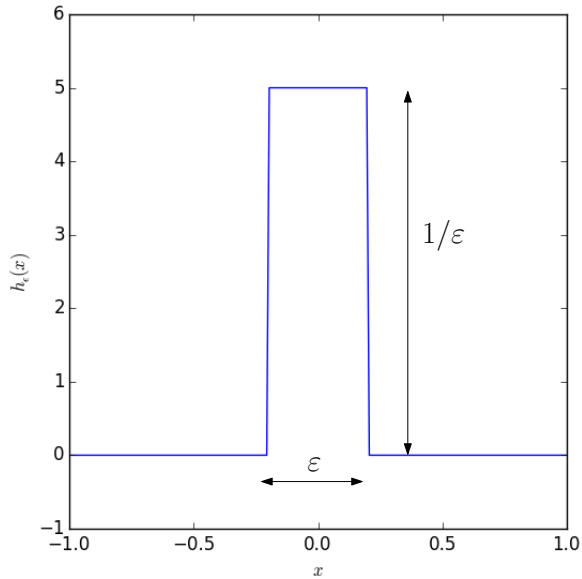
medan en naiv insättning av  $dF/dx = 0$  i VL hade gett noll.

Problemet är ju att  $\frac{dF}{dx} = 0$  för  $x \neq 0$ , men " $\frac{dF}{dx} = \infty$ " för  $x = 0$ . Vi kan uttrycka detta som en "funktion",  $\frac{dF}{dx} = q\delta(x)$ , där

- $\delta(x)$  är noll då  $x \neq 0$ , och
- integralen  $\int_{a < 0}^{b > 0} \delta(x) dx = 1$ .

**Distributioner.** Vi konstruerar denna "funktion" som en gräns  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  för distributionen

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} & |x| < \frac{1}{2\varepsilon} \end{cases} \quad (9)$$



**Kontrollera.**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = 0,$$

för  $x \neq 0$ . Dessutom har vi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a < 0}^{b > 0} h_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [x]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = 1.$$

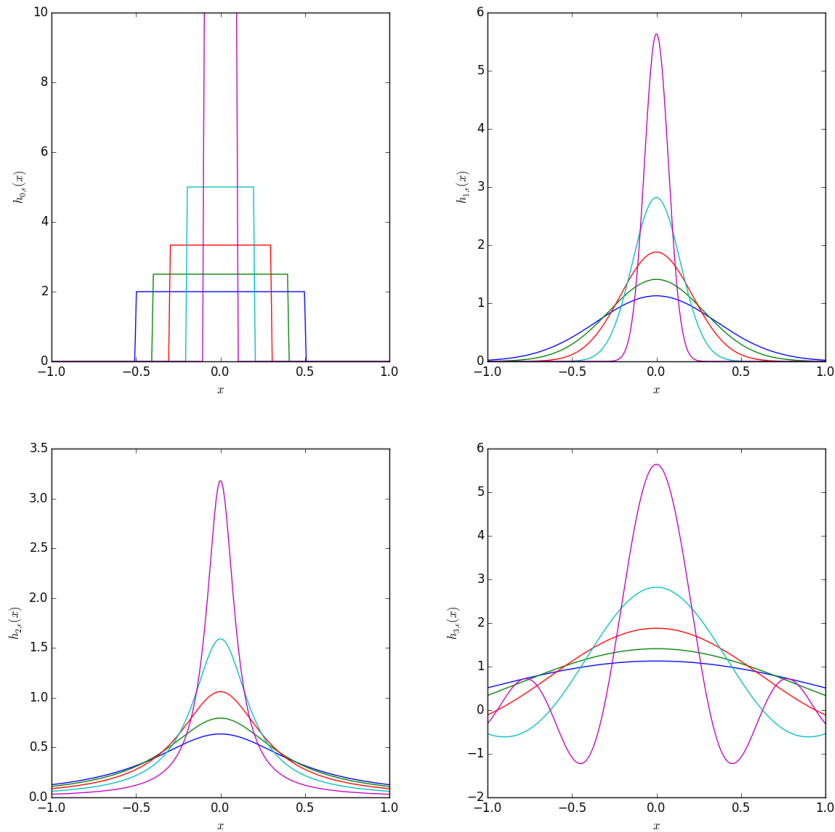
---

Men det finns också andra möjligheter:

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}}, \quad (10)$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad (11)$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}. \quad (12)$$



Samtliga dessa utgör en *sekvens av funktioner* (en *distribution*) från vilka vi kan definiera *Diracs deltafunktion*

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(x) \quad (13)$$

med de definierande egenskaperna

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (14)$$

$$f(0) = \int_a^b f(x)\delta(x)dx, \quad (15)$$

där  $f(x)$  är en välbeteende funktion och  $[a, b]$  inkluderar 0.

Ett specialfall ( $f(x) = 1$ ) av ovanstående är

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (16)$$

### Exempel: endimensionella deltafunktioner

Kontrollera att vi erhåller Diracs deltafunktion från sekvensen  $h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}}$ .

*Lösning:* För  $x \neq 0$  gäller

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon} \exp(x^2/\varepsilon^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon} \left[ 1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right)^2 + \dots \right]} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \left( x^2 + \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2\varepsilon^2} + \dots \right)} \rightarrow 0 \quad \text{då } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (17)$$

Vidare har vi integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2} dx = \sqrt{\pi\varepsilon^2}$  (se tabell över definitiva integraler, eventuellt Beta 7.5-41). Detta ger

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = 1, \quad \text{för } \varepsilon > 0. \quad (18)$$

För att vara helt korrekta skall vi egentligen visa den mer allmänna egenskapen  $\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)$  för en väl beteende funktion  $f(x)$ . Eftersom ekv. (17) gäller, och  $f(x)$  inte utgör något problem, kan vi utöka integrationsintervallet och istället studera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0). \quad (19)$$

Vi Taylorutvecklar,  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \dots$ , och konstaterar att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)h_\varepsilon(x)dx = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx = f(0), \quad (20)$$

enligt vad vi visat ovan (18). Det återstår att visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n h_\varepsilon(x)dx = 0, \quad (21)$$

för alla heltal  $n > 0$ . I vårt fall har vi en jämn funktion  $h_\varepsilon(x)$  vilket gör att ekv. (21) är trivialt uppfyllt för udda  $n$  då integranden blir udda. För

jämna  $n = 2k$  finner vi (se t.ex. Beta 7.5-42)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi\varepsilon} \varepsilon^{2k} = 0. \quad (22)$$

Alltså har vi visat att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a < 0}^{b > 0} f(x) \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = f(0), \quad \text{för } \varepsilon > 0. \quad (23)$$

## Egenskaper hos Diracs deltafunktion

- Jämn:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

- Skalning:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

### Kommentar

Visas enklast genom att göra substitutionen  $y = xa$  i uttrycket

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(ax) dx.$$

Var noga med tecknet på integrationsgränserna.

- Translation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

### Kommentar

visas genom substitutionen  $y = x - x_0$ .

- Derivata

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \delta(x - x_0) dx = -f'(x_0),$$

vilket kan betraktas som definitionen av derivatan  $\delta'(x)$ .

### Kommentar

Visas genom partiell integration med någon av funktionssekvenserna som definierar deltafunktionen.

- Kan generaliseras till fler dimensioner. Vi skriver generellt  $\delta^{(D)}(\vec{r})$ , där vi skall tolka superskriptet som antalet dimensioner. T.ex. har vi för  $D = 3$

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

I sfäriska koordinater blir detta

$$\iiint f(\vec{r})\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = f(\vec{r}_0).$$

Med vissa förbehåll (se t.ex. upp för punkten  $\vec{r}_0 = 0$  i sfäriska koordinater) kan deltafunktionen i kroklinjiga koordinater skrivas

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1(\vec{r}_0)h_2(\vec{r}_0)h_3(\vec{r}_0)}\delta(u_1 - u_{1,0})\delta(u_2 - u_{2,0})\delta(u_3 - u_{3,0}).$$

### Rita

Skissa gärna den "primitiva funktionen" till en deltafunktion i en dimension.

## Deltafunktioner i högre dimensioner

Vi startar med punktkällan i origo:  $\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r$ , och den problematiska volymintegralen

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV,$$

som borde bli lika med  $q$  om  $V$  omfattar origo. Detta kan vi åstadkomma genom att införa  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = q\delta^3(x) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$  eftersom

$$\int_V \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1.$$

Låt oss använda sfäriska koordinater. Hur kan vi uttrycka  $\delta^{(3)}(\vec{r})$  så att följande integralegenskap uppfylls?

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r})r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 1,$$

om volymen  $V$  innesluter origo. Vi vill finna  $\delta^{(3)}(\vec{r})$  som ett gränsvärde av en distribution  $h_\varepsilon(\vec{r})$ .

Starta från ett *regulariserat* fält

$$\vec{F}_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi(r^2 + \varepsilon^2)} \hat{e}_r \quad (24)$$

som uppenbarligen går mot  $\vec{F}$  då  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Divergensen för  $r \neq 0$  blir  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \dots)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\varepsilon(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi r^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{r^2 + \varepsilon^2} \right)}_{= \frac{2r}{r^2 + \varepsilon^2} - \frac{2rr^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^2} = \frac{2r\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^2}} = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi r(r^2 + \varepsilon^2)^2} \rightarrow 0 \quad \text{då } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Utan styrkan  $q$  kallar vi denna sekvens av funktioner för  $h_\varepsilon(\vec{r})$  och påstår att  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r})$ . Utför integralen

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\varepsilon dV = \int_V q h_\varepsilon(\vec{r}) dV = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi} 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r(r^2 + \varepsilon^2)^2} \quad (26)$$

$$= 2q\varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 + \varepsilon^2} \right]_0^\infty = 2q\varepsilon^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} = q \quad (27)$$

Alltså har vi visat att

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\vec{r}) = 0$  för  $r \neq 0$ .
- $\int_{\mathbf{R}^3} h_\varepsilon(\vec{r}) dV = 1$

Alltså skriver vi källtätheten

$$\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\Delta\phi = q\delta^3(\vec{r}).$$

Ett differentIELLT uttryck för deltafunktionen

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2},$$

eller mer allmänt

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{(\vec{r} - \vec{r}')^3},$$

där vi noterar att  $\vec{\nabla}$  opererar på koordinaten  $\vec{r}$ .

**Linjekälla.** Linjekällan  $\vec{F} = \frac{k}{2\pi\rho} \hat{e}_\rho$  (motsvarar en punktkälla i  $D = 2$ ). Källtätheten kan skrivas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = k\delta^2(\vec{\rho}) (= k\delta(x)\delta(y)).$$

Studera t.ex. normalytintegralen genom en cylinder med höjden  $L$  runt linjekällan

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S+S_0+S_L} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_0^L dz \int dx dy k\delta(x)\delta(y) = \int_0^L dz k = kL.$$

där vi först har slutit ytan genom att införa ytorna  $S_0$  och  $S_L$  som är cirkelskivor vid botten och toppen och som har normalytintegralen noll eftersom fältet är vinkelrät mot normalen.

**Virveltråd.** Vi kan resonera på liknande sätt för en virveltråd  $\vec{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi$ . Stokes sats säger att

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

där vi kan räkna ut  $\text{VL} = J$  (t.ex. för en cirkel runt virveltråden). För detta fält är det rotationen som är problematisk. Notera att detta är en vektor.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = J\delta^2(\vec{\rho})\hat{z} = \vec{J}\delta(x)\delta(y).$$

**Avancerat exempel: tillämpning av deltafunktionen; Fouriertransform och ortogonalitet.**

Givet en funktion  $f(x)$  definieras dess Fouriertransform som

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

Den inversa transformen ger frekvensönderläggningen av  $f(x)$ , i detta fall motsvaras "frekvensen" av vågtalet  $k$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

(normeringen har valts för att åstadkomma symmetri mellan de två uttrycken).

Genom att sätta in det första uttrycket i det andra får man, under förutgåttning att man kan byta integrationsordning,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \right) f(x') \end{aligned}$$

Uttrycket inom parenteser i det sista ledet beror bara på  $x - x'$ , och om resultatet skall bli  $f(x)$  måste det vara en deltafunktion lika med  $2\pi\delta(x - x')$ . Dvs

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}. \quad (28)$$

Genom att byta vågtalet  $k$  och koordinaten  $x$  får man också  $2\pi\delta(k - k') = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x}$ . Detta sätt att skriva deltafunktionen kunde vi också ha



anat från ekv. (12) genom att byta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x}.$$

Här kan man nämligen göra omskrivningen

$$\int_{-n}^n e^{ixk} dk = \left[ \frac{e^{ixk}}{ix} \right]_{-n}^n = \left[ \frac{\cos(xk) + i \sin(xk)}{ix} \right]_{-n}^n = 2 \frac{\sin(nx)}{x}, \quad (29)$$

så att vi får

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixk} dk, \quad (30)$$

vilket är analogt med ekv. (28)

Funktionerna  $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$  kan alltså ses som ortogonala och "deltafunktionsnormerade" med ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e_k(x) e_{k'}^*(x) = \delta(k - k')$$

Man kan bekräfta resultatet genom att göra beräkningen explicit för de regulariserade funktionerna  $e_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - \varepsilon^2 x^2}$  och låta  $\varepsilon \rightarrow 0$  (se uppgift 7.15).

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 4, 2019

## 8. Potentialteori

### Konservativa fält och potentialer

Vi har definierat ett konservativt fält som ett fält  $\vec{F}$  sådant att

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1)$$

för varje sluten kurva  $C$ . Enligt Stokes sats följer det nu att ett fält som har  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  överallt i ett enkelt sammanhängande område är konservativt. Vi har sedan antagit att vi kan skriva

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (2)$$

där  $\phi$  kallas för det konservativa fältets potential. Gäller då

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi??$$

Nej, det har vi ännu inte visat! Vi har att  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  eftersom  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$  (se nedan), men det omvända gäller inte per automatik. Vi har ännu inte visat att konservativa fält alltid kan skrivas som  $-\vec{\nabla}\phi$ .

#### Bevis av $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$ mha indexnotation

Vi kan visa att  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$  mha indexnotation: Vektorn  $[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$  eftersom den resulterande summan med nio termer  $\sum_{j,k=1}^3$  har två nollskilda som tar ut varandra. T.ex. för  $i = 1$  fås  $\partial_2 \partial_3 \phi - \partial_3 \partial_2 \phi = 0$ .

Definitionen av ett konservativt fält gör dock att vi kan hitta en potential från

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\phi. \quad (3)$$

Notera tecknet på potentialskillnaden i HL. Det hade gått lika bra med det omvända, men just denna konvention stämmer överens med energitolkningen i klassisk mekanik.

Vi ser nu att förändringen av potentialen mellan punkterna  $\vec{r}$  och  $\vec{r} + d\vec{r}$  är

$$d\phi = -\vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4)$$

men denna förändring kan också skrivas som

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}. \quad (5)$$

Det följer därmed att det finns en potential  $\phi$  så att det konservativa fältet  $\vec{F}$  kan skrivas

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (6)$$

Faktum är att  $\phi$  inte är entydigt bestämd. Man kan skapa en ny potential genom att addera en konstant till en potential:  $\phi \mapsto \phi + \phi_0$ .

### Exempel: Arbete i klassisk mekanik

För ett konservativt kraftfält  $\vec{F}$  gäller att det uträttade arbetet längs en rörelsebana motsvarar en *ökning* av den kinetiska energin åtföljt av en motsvarande *minskning* av en potentiell energi så att den totala mekaniska energin  $E = T + V$  är *konserverad*.

**Kommentar 1:** Notera att uträttat arbete kan vara negativt vilket isf innebär en minskning av den kinetiska energin och en ökning av den potentiella.

Arbetet som uträttas längs en kurva  $C$  motsvaras av kurvintegralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ d\vec{r} = \vec{v} dt \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \delta T. \quad (8)$$

Här har vi använt NII. Tidpunkterna  $t_A$  och  $t_B$  motsvarar start- respektive sluttiden för rörelsen.

Ett exempel på ett sådant konservativt kraftfält är gravitationskraften nära jordytan:  $\vec{F} = -mg\hat{z}$ . Med vår nuvarande kunskap skulle vi uttrycka detta som  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ , där vi alltså använder beteckningen  $\phi$  istället för  $V$ . För vårt exempel finner vi att potentialen  $\phi(\vec{r}) = mgz$  uppfyller denna likhet.

Vidare uppfyller kraftfältet  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ . Vi kontrollerar detta för vårt exempel:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = 0$$

Kurvintegralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B),$$

där  $A$  och  $B$  är kurvans start- respektive slutpunkt. Här finner vi att potentialskillnaden  $-\delta\phi = \phi(z_A) - \phi(z_B) = mg(z_A - z_B)$ . Detta är alltså den negativa skillnaden i potentiell energi och vi får

$$\delta T = -\delta\phi \quad \Rightarrow \quad \delta(T + V) = 0.$$

## Poissons och Laplaces ekvationer

Konservativa vektorfält är alltså rotationsfria, men de kan fortfarande ha nollskild divergens. Denna kallas ofta för *källtätethet*

$$\rho(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \quad (9)$$

### Kommentar

Låt oss använda superposition och deltafunktioner för att visa att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho(\vec{r})$ . Superposition ger oss potentialen från en laddningsfördelning på integralform

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') dV'$$

eller det motsvarande fältet (notera att  $\vec{\nabla}$  opererar på  $\vec{r}$ )

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

Beräkna nu divergensen av ovanstående (notera att den opererar på  $\vec{r}$ ), och identifiera deltafunktionen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi} \int 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \rho(\vec{r}).$$

Med  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$  får vi *Poissons ekvation*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}), \quad (10)$$

vilket alltså ger potentialen på differentialform.

Specialfallet av denna ekvation utan källa, dvs divergensfritt, ger *Laplaces ekvation*

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0. \quad (11)$$

Kom ihåg att  $\Delta$  är Laplacianen vilken kan skrivas

$$\Delta\phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi, \quad (12)$$

i Cartesiska koordinater. Den ser annorlunda ut i kroklinjiga koordinatsystem.

#### Kommentar

Notera att  $\vec{F} = -mg\hat{z}$  är divergensfritt och att potentialen  $\phi = mgz$  uppfyller Laplaces ekvation  $\Delta\phi = 0$ .

Notera att Poissons och Laplaces ekvationer är exempel på *differentialekvationer*. För att lösa dessa i ett område behöver man också veta randvillkor för fältet  $\phi$ .

Vi kommer t.ex. se att (ett stationärt) temperaturfält uppfyller någon av dessa ekvationer (Laplaces ekvation om det inte finns en värmekälla). För att t.ex. räkna ut temperaturfältet inuti ett värmeisolerande fönster behöver vi veta randvillkor för fältet på glasets in- och utsida.

Olika tekniker för lösning av dessa ekvationer presenteras i kapitel 9.

#### Integral- och differentialform för potentialen

Sammanfattningsvis kan vi uttrycka potentialen  $\phi(\vec{r})$  för ett konservativt fält på två olika sätt utgående från dess källtäthet  $\rho(\vec{r}')$ .

- Dels på integralform enligt superpositionsprincipen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') dV'.$$

- Dels på differentialform enligt Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

Vi kommer dock att behöva prata mer om *randvillkor*.

## Divergensfria fält

Kan man erhålla *divergensfria* fält från någon potential på liknande sätt som vi just gjorde för rotationsfria fält?

Vi betraktar ett divergensfritt fält  $\vec{G}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0,$$

och nöjer oss med att konstatera att divergensfriheten uppenbarligen uppfylls om fältet kan skrivas

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (13)$$

**Kommentar 2:** Visa detta om ni är osäkra. Gärna med indexnotation.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k,$$

Vilket är en summa med 27 termer, vara sex är nollskilda och dessa tar ut varandra parvis. Alternativt med Stokes och Gauss satser: Betrakta volymsintegralen av  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ , och beräkna normalytintegralen av  $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  över randytan genom att dela upp den i två delar och applicera Stokes sats på varje del. Notera att dessa två ytor kommer att ha samma rand, men motsatt riktning. Slutsatsen blir att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$ .

Vektorfältet  $\vec{A}$  kallas då för en *vektorpotential*.

### Standardexempel: Statiskt magnetfält

Ett statiskt magnetfält  $\vec{B}(\vec{r})$  är divergensfritt och uppfyller  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$  där  $\vec{A}$  kallas för den elektromagnetiska vektorpotentialen.

Vi fann tidigare att skalära potentialer hade en invarians genom att vi kunde addera en konstant term  $\phi \mapsto \phi + \phi_0$  utan att ändra fältstyrkan.

På samma sätt har vektorpotentialen en invarians

$$\vec{A}(\vec{r}) \mapsto \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}), \quad (14)$$

där  $\Lambda$  kallas för en Gaugeparameter och invariansen kallas för *Gaugeinvarians*.

### Kommentar

Detta må verka som en kuriositet, men just Gaugeinvarians är av fundamental betydelse för vår teoretiska förståelse av elektromagnetiska, svaga och starka krafter.

### Kommentar

Ofta använder man Gaugeinvariansen till att skapa en vektorpotential som är divergensfri. Dvs man väljer  $\Lambda$  så att  $\Delta\Lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

Rotationen kallas ofta för virveltäthet

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j}.$$

Vi använder sambandet  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$  vilket alltså ger

$$\Delta\vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\vec{j}.$$

Genom att välja Gaugeparametern så att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  får vi Poissons ekvation för vektorpotentialen

$$\Delta\vec{A} = -\vec{j}. \quad (15)$$

### Potentialer för godtyckliga vektorfält

- Betrakta ett fält med både källor och virvlar, dvs  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho \neq 0$  och  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \neq 0$ .
- Detta allmänna vektorfält kan vi dela upp i två delar  $\vec{H} = \vec{F} + \vec{G}$  där

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j} \quad (17)$$

- Dvs, fältet  $\vec{H}$  kan skrivas som summan av ett rotationsfritt fält  $\vec{F}$  och ett divergensfritt fält  $\vec{G}$  som representeras av potentialerna  $\phi$  och  $\vec{A}$ .

$$\vec{H} = \vec{F} + \vec{G} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

### Exempel: Stagnationsström konservativt hastighetsfält

Betrakta (det rotationsfria) hastighetsfältet som ges av potentialen

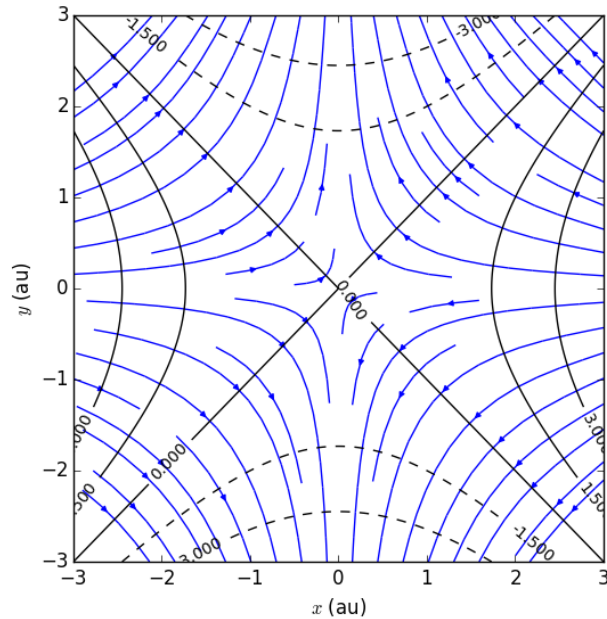
$$\phi(x, y) = \frac{A}{2}(x^2 - y^2),$$

där  $A$  är en positiv konstant. Hastighetsfältet blir

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = -Ax \\ v_y = Ay \end{cases}$$

Vi noterar att detta fält också är divergensfritt.

En fältbild (potential och fältlinjer) visas nedan. Notera att det finns områden där hastigheten är noll. Dessa kallas stagnationspunkter. Vi noterar också att fältlinjerna blir parallella med  $x$ - och  $y$ -axlarna när vi kommer tillräckligt nära. Vi kan därför tänka oss dessa som fasta väggar och att vårt hastighetsfält beskriver strömmen vid ett hörn.



I verkligheten kommer dock friktionen nära väggen att skapa virvlar, och vår rotationsfria approximation ger en sämre beskrivning.

## Standardexempel på käll- och virvelfördelningar

**Punktkälla med styrkan  $q$  i origo.**

- vektorfält

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

- rotationsfritt, men med en källa  $\rho = q\delta^3(\vec{r})$ . Fältet har en potential

$$\phi = \frac{q}{4\pi r},$$

som uppfyller Poissons ekvation med källan  $\rho = q\delta^3(\vec{r})$ ,

$$\Delta\phi = -q\delta^3(\vec{r}).$$



### Linjekälla på $z$ -axeln med konstant styrka $k$ .

- vektorfält

$$\vec{F} = \frac{k}{2\pi\varrho} \hat{\varrho}$$

- Motsvarande potential är

$$\phi = -\frac{k}{2\pi} \log \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

- Potentialen uppfyller Poissons ekvation:

$$\Delta\phi = -k\delta^2(\vec{\varrho}).$$

### Virveltråd på $z$ -axeln med styrka $J$ .

- fältet

$$\vec{G} = \frac{J}{2\pi\varrho} \hat{\varphi}.$$

- Vektorpotentialen är (t.ex., med tanke på gaugeinvarians)

$$\vec{A} = -\frac{J\hat{z}}{2\pi} \log \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

(kontrollera;  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  i cylindriska koordinater)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{2\pi} \log \varrho \end{vmatrix} = \frac{J}{2\pi\varrho} \hat{\varphi}.$$

- Notera att denna vektorpotential uppfyller  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , och därför ges virvelfördelningen av

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j} = -\Delta\vec{A}.$$

- Poissons ekvation,

$$\Delta\vec{A} = -J\hat{z}\delta^2(\vec{\varrho}).$$

### Randvärdesproblem

En lösning av t.ex. Laplaces ekvation  $\Delta\phi = 0$  ger upphov till integrationskonstanter. För att entydigt bestämma lösningen behövs därför *randvillkor* för fältet.

## Rita

Skissa gärna hur ett fält som uppfyller Laplaces ekvation beter sig.

Lösningarna är så kallade harmoniska funktioner. Villkoret  $\Delta\phi = 0$  ger att det inte finns några extrempunkter inuti området, dvs maximum och minimum måste ligga på randen.

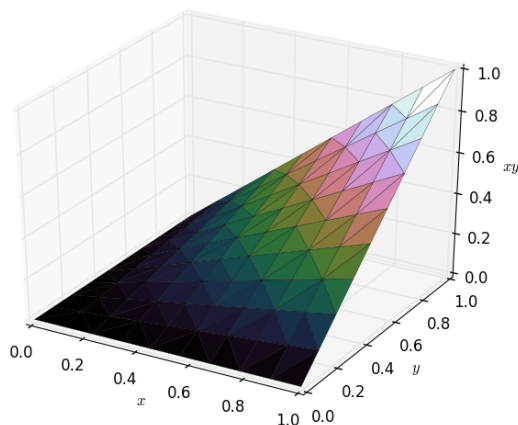
Titta på ett fält  $\phi(x, y)$  och använd Taylorexansion för att teckna beteendet *nära* en punkt  $\vec{r}_0$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) = & c_0 + c_x(x - x_0) + c_y(y - y_0) \\ & + c_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{c_{xx}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{c_{yy}}{2}(y - y_0)^2 + \dots,\end{aligned}$$

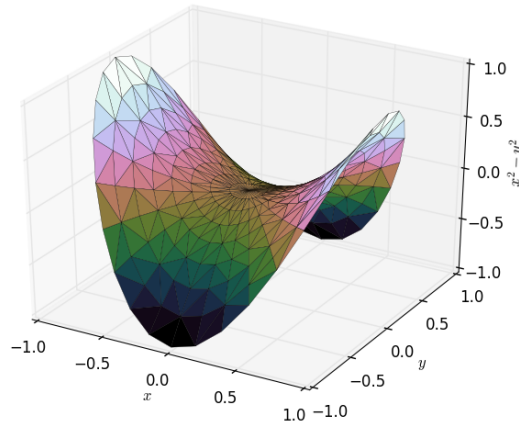
där t.ex.  $c_0 = \phi(\vec{r}_0)$ ,  $c_x = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$ , etc.

Villkoret  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$  (överallt) betyder att  $c_{xx} = -c_{yy} \equiv c_{ii}$  samt att alla högre ordningens termer måste vara noll.

Det viktiga är alltså att expansionen slutar med den kvadratiske termen och att dessa är lika, men motriktade, i  $x$ - och  $y$ -led. De specifika värdena på konstanterna ( $c_0, c_x, c_y, c_{xy}, c_{ii}$ ) kommer förstås att bero på vilken punkt  $\vec{r}_0$  som vi använder för Taylorexansionen.



Figur 1: Lösningen ( $\phi = xy$ ) till Laplaces ekvation i två dimensioner på ett kvadratisk område med randvillkor enligt figuren.



Figur 2: Lösningen ( $\phi = x^2 - y^2$ ) till Laplaces ekvation i två dimensioner på ett cirkulärt område med vinkelberoende randvillkor enligt figuren.

**Exempel: Lösningar till Laplaces ekvation.** Två exempel på lösningar till Laplaces ekvation i ett område med givna randvillkor visas i figurerna 1 och 2.

#### Kommentar

Att ta reda på precis “hur mycket” villkor, och av vilket slag, man bör lägga på fältet på randen  $\partial V$  är ju ett matematiskt problem, men det matematiska svaret på frågan bör också vara ett svar inom fysik, så att en given fysikalisk förutsättning ger en unik lösning (fältkonfiguration).

- Vårt randvärdesproblem består av den partiella differentialekvationen  $\Delta\phi = -\rho$  samt några randvillkor.
- Vilka randvillkor ger en *unik* lösning? Eller hur skall “bra” randvillkor formuleras?
- Antag att  $\phi_1$  och  $\phi_2$  båda är lösningar.
- $\psi = \phi_1 - \phi_2$ , uppfyller Laplaces ekvation,  $\Delta\psi = 0$ .
- En trivial lösning,  $\psi = \text{konstant}$ , innebär att lösningen till Poissons ekvation är unik.

**Kommentar 3:** Eftersom  $\phi_1$  och  $\phi_2$  ger samma vektorfält om de enbart skiljer på en konstant.

Betrakta nu identiteten

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \Delta \psi = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi = |\vec{\nabla} \psi|^2,$$

som gäller när  $\Delta \psi = 0$ . Tillämpa nu Gauss sats på vektorfältet  $\psi \vec{\nabla} \psi$ .

$$\int_{\partial V} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi) dV = \int_V |\vec{\nabla} \psi|^2 dV.$$

- HL är positivt semidefinit, och noll endast om  $\psi = \text{konstant}$ .
- Randvillkor som gör VL till noll innebär därför det vi vill.

Ytintegralen i VL är

$$\int_{\partial V} \psi (\vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n}) dS.$$

Två faktorer i integranden:  $\psi$  och  $\vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n}$ .

**Kommentar 4:** Den andra faktorn är "normalderivatan" vid randen, alltså riktningsderivatan i normalens riktning.

**Kommentar 5:** Lösningen till Laplaces ekvation är trivial (konstant) om den ena eller den andra är noll på randen.

**Dirichlets randvillkor:**

$$\psi = 0 \text{ på } \partial V \quad \Rightarrow \quad \psi = 0 \text{ i } V$$

Detta ger att lösningen  $\phi_1 = \phi_2$  på randen, dvs

$$\phi|_{\partial V} = f,$$

där  $f$  är en funktion på randen

**Neumanns randvillkor:**

$$(\vec{\nabla} \psi) \cdot \hat{n} = 0 \text{ på } \partial V \quad \Rightarrow \quad \psi = \text{konstant i } V$$

Detta ger att  $(\vec{\nabla} \phi_1) \cdot \hat{n} = (\vec{\nabla} \phi_2) \cdot \hat{n}$  på randen, dvs

$$(\vec{\nabla} \phi)|_{\partial V} \cdot \hat{n} = g,$$

där  $g$  är en funktion på randen.

**Sammanfattning:** Poissons ekvation i volymen  $V$  med någon källfördelning  $\rho$  har en unik lösning (sånär som på en ointressant konstant) för dessa två typer av randvillkor.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 8, 2019

## 9. Lösningar av Poissons ekvation

Vi vet att Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}),$$

har entydiga lösningar om

$$\begin{array}{ll} \phi|_{\partial V} = f(\vec{r}) & \text{Dirichlets randvillkor} \\ (\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = g(\vec{r}) & \text{Neumans randvillkor} \end{array}$$

där  $f$  och  $g$  är funktioner på randen  $\partial V$ .

### Lösning av Poissons ekvation

Vi kommer att betrakta fyra olika lösningsmetoder:

- 1. Greensfunktionsmetoden.** Generell metod, men det är ofta svårt att finna analytiska uttryck för Greensfunktionen.
- 2. Spegling.** Ger uttryck för Greensfunktionen i vissa speciella geometrier och homogena randvillkor.
- 3. Variabelseparation.** Kraftfull analytisk metod. Riktigt användbar i kombination med Fourieranalys.
- 4. Numeriska metoder.**
  - De tre förstnämnda är analytiska metoder som vi introducerar för att ge en fysikalisk förståelse av lösningarna.

- De numeriska metoderna är förstås viktigast för praktiska tillämpningar. Se datoruppgift.

### 3. Variabelseparation

- Bygger på att man löser ekvationerna stegvis för en variabel i taget.
- Problemet skall *passa bra* ihop med ett visst koordinatsystem.

#### Exempel: Laplaces ekvation på en cirkelskiva

- $\Delta\phi = 0$ , på  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} < a$ .
- Betrakta fallet där randvillkoret enbart innehåller ett vinkelberoende  $\phi(\vec{r})|_{\partial V} = h(\varphi)$

Laplaceoperatoren är

$$\Delta = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Målet är att lösa ekvationen, samtidigt som vi uppfyller randvillkoret, genom att separera beroendet på variabeln  $\varphi$  och  $\varrho$  genom en ansats av formen

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$$

**Exempel.** Antag att randvillkoret är

$$\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi,$$

där  $m$  är ett heltal.

Vi ansätter att hela lösningen har just detta beroende av  $\varphi$ , så att

$$\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho) \cos m\varphi$$

Funktionen  $\cos m\varphi$  uppfyller

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos m\varphi = -m^2 \cos m\varphi,$$

dvs, den är en egenfunktion till  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  med egenvärdet  $-m^2$ .

Insättning:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) \cos m\varphi - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) \cos m\varphi = 0,$$

och om detta skall gälla överallt på cirkelskivan måste man ha

$$\varrho \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) - m^2 f(\varrho) = 0.$$

Den partiella differentialekvationen har nu reducerats till en ordinär differentialekvation för funktionen  $f(\varrho)$

- Ansatz:  $f(\varrho) = A\varrho^p$
- Löser ekvationen med  $p^2 - m^2 = 0$ , dvs.  $p = \pm m$ , där minustecknet väljs bort på grund av singulariteten i origo.
- Slutsats:

$$\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \left( \frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

är en lösning till Laplaces ekvation på cirkelskivan med randvillkoret  $\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$ .

### Exempel 2: Laplaces ekvation på en cirkelskiva med allmänt Dirichlet randvillkor

#### OBS!

Detta exempel inkluderar Fourieranalys som ej ingår i kursen. Anteckningarna är endast med för bättre koppling till motsvarande material i andra kurser och för att antyda den mer generella användningen av variabelseparationsmetoden.

Med randvillkoret

$$\phi(a, \varphi) = h(\varphi),$$

ansätter vi lösningen  $\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$ .

Laplacianen blir

$$\Delta\phi = \Delta(f(\varrho)g(\varphi)) = g(\varphi) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial\varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho} \right) + \frac{f(\varrho)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Detta ger den *separerade* ekvationen

$$\frac{f(\varrho)g(\varphi)}{\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2}{f(\varrho)} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{g(\varphi)} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

där den första termen i hakparentesen enbart beror på  $\varrho$  och den andra bara på  $\varphi$ . Därmed måste bägge vara konstanta (för att gälla för alla  $\varrho, \varphi$ ). Vi sätter den första till  $-\lambda$  och den andra till  $+\lambda$ .

Studera vinkelekvationen först

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = \lambda g(\varphi),$$

dvs vi kan tolka  $g$  som en egenfunktion till  $\partial^2/\partial\varphi^2$ . Lösningen är

$$g(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi),$$

med *egenvärdet*  $\lambda = -m^2$ . Funktionen måste uppfylla randvillkoret  $g(0) = g(2\pi)$  vilket ger att  $m = 0, 1, 2, \dots$  (notera att  $m = 0$  är meningslös för sinus-termen).

Den kvarvarande, radiella ekvationen blir nu

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) = 0.$$

- $m = 0$ , vilket innebär att  $g(\varphi) = A$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} \right) = 0 \Rightarrow \varrho \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B \Rightarrow \frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho} = B \varrho.$$

Med lösningen  $f(\varrho) = A + B \ln(\varrho)$ , där den andra termen motsvarar en punktkälla i två dimensioner (vi skippar denna).

Alltså är  $\phi(\vec{r}) = A$  (konstant) en lösning om randvillkoret är  $h(\varphi) = A$  (konstant).

- $m > 0$ , ansätt lösning  $f(\varrho) = C\varrho^p$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho^p \right) - \frac{m^2}{\varrho^2} \varrho^p = 0 \Rightarrow p^2 \varrho^{p-2} - m^2 \varrho^{p-2} = 0 \Rightarrow p = \pm m$$

Med lösningen  $f(\varrho) = A\varrho^m + \frac{B}{\varrho^m}$ , där den andra termen är singular i origo (vi skippar denna).

Med randvillkoret från ovan  $h(\varphi) = \cos m\varphi$ ,  $f(a) = \phi_0$  får vi lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left( \frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi,$$

som ovan.



För ett mer allmänt randvillkor kan man (Fourier)-utveckla

$$h(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi),$$

vilket ger lösningen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + b_m \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \sin(m\varphi).$$

OBS: ingår ej i denna kurs att kunna göra en sådan Fourierutveckling.

### Kommentar

Separationsmetoden kan förstås användas med fler än två variabler. Vill man t.ex. använda den i sfäriska koordinater, hittar man egenfunktioner i tur och ordning i  $\varphi$ ,  $\theta$  och  $r$ . Se veckans tal. Eller så hittar man direkt egenfunktioner på  $S^2$ , s.k. klotytefunktioner (se kvantmekanik).

## 1. Greensfunktionsmetoden

Vi tecknar Poissons ekvation i hela  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

En lösningsstrategi som vi har betraktat tidigare är att:

- Beräkna bidraget till potentialen i punkten  $\vec{r}$  givet en punktladdningen med styrkan  $q = 1$  belägen i punkten  $\vec{r}'$ .
- Superpositionsprincipen ger potentialen som en summa/integral över källtäteten gånger ovanstående "Greensfunktion".

Vi har redan visat att

$$G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

där vi förtydligar att detta gäller på  $\mathbb{R}^3$ . Eftersom en punktkälla i punkten  $\vec{r} = \vec{r}'$  med styrkan  $q = 1$  beskrivs av källtäteten  $\rho(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ , inser vi att Greensfunktionen löser följande differentialekvation

$$\Delta G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

på hela  $\mathbb{R}^3$ .

**Kommentar 1:** Notera att Laplaceoperatoren verkar på variabeln  $\vec{r}$  (inte  $\vec{r}'$ ). Dvs.,  $\Delta = \Delta_{\vec{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ .

Lösningen till Poissons ekvation i  $\mathbb{R}^3$  med en allmän källa  $\rho$  blir en superposition

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

### Exempel: linjekälla

Betrakta en linjekälla,  $\rho(\vec{r}) = k\delta^2(\vec{\rho})$ , i  $\mathbb{R}^3$ .

Vi skall integrera över linjekällan och introducerar koordinaten

$$\vec{r}' = \vec{\rho}' + z'\hat{z} = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z},$$

där vi noterar att det inte behövs något "prim" på  $z$ -riktningen.

Vi sätter in i

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') G_{\mathbb{R}^3}(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\vec{\rho}')}{4\pi|\vec{r} - (\rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z})|}.$$

Integralen  $\int dS'$  över  $x'$  och  $y'$  kan enkelt utföras tack vare deltafunktionen. Resultatet:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\vec{r} - z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen från kap. 6.

**Greensfunktioner för en begränsad volym med randvillkor.** Låt oss göra denna metod mer generell. Studera Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}).$$

- ... inuti en (begränsad) volym  $V$ .
- ... med homogena randvillkor, dvs.  $f = 0$  eller  $g = 0$  på randen  $\partial V$ .
- ... för en allmän källtäthet  $\rho(\vec{r})$ .

Lösningen kan skrivas

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'),$$

där Greensfunktionen löser Ekv. (1) *inuti volymen  $V$*  och med det *givna randvillkoret*.

Att detta är en lösning visas genom insättning:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \int_{V'} dV' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= - \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

- Notera att  $\vec{r}$ -beroendet bara sitter i Greensfunktionen.
- Notera att Greensfunktionen  $G$  på ett område  $V$  bestäms av formen på området och av randvillkoren på  $\partial V$ .
- Genom att  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  uppfyller det homogena randvillkoret kommer ovanstående superposition också att uppfylla det.

## 2. Spegling

- Vi såg att lösningen  $\phi(\vec{r})$  erhålls enkelt om man har tillgång till Greensfunktionen. Men denna är ofta svår att finna.
- För vissa geometrier erbjuder *speglingsmetoden* ett väldigt elegant sätt att konstruera Greensfunktionen.

### Rita: Fältnbilder tre olika konfigurationer med punktladdningar

Skissa fältnbilder för tre olika fall:

- En punktladdning  $+q$  (belägen i det övre halvplanet,  $z > 0$ );
- Två punktladdningar  $+q$  och  $-q$  (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre);
- Två punktladdningar  $+q$  och  $+q$  (den första i det övre halvplanet och den andra i det undre).

Betrakta speciellt potentialen vid speglingsytan  $z = 0$ .

### Fundera: Poissons ekvation

Det första fallet ger en potential  $\phi$  som löser Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -q\delta^{(3)}(\vec{r}_0),$$

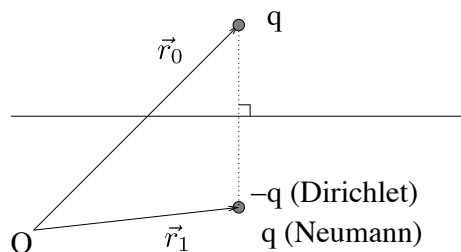
i hela  $\mathbb{R}^3$ . Vilken differentialekvation löser det andra respektive det tredje fallet om vi begränsar oss till övre halvplanet?

Betrakta halvrymden  $\{\vec{r}: z > 0\}$  med ett homogent randvillkor på planet  $z = 0$ :

- Dirichlets randvillkor:  $\phi = 0$ , eller
- Neumanns,  $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ .

**Kommentar 2:** Detta är ett bra tillfälle att repetera begreppen ekvipotentialytor och fältlinjer (till vektorfältet  $-\vec{\nabla}\phi$ ). Se till att förstå att ett randvillkor  $\phi = 0$  (Dirichlet) betyder att randen är en ekvipotentialyta, och att  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$  betyder att fältlinjerna är parallella med randen.

Betrakta nu en punktladdning belägen i det övre halvplanet. Vi kan införa en spegelladdning i det område som vi inte är intresserade av ( $z < 0$ ). Den påverkar alltså inte källtätheten i det fysikaliska området ( $z > 0$ ), men hjälper till att uppfylla randvillkoren.



Med  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  och  $\vec{r}_1 = (x_0, y_0, -z_0)$  och:

- $q_1 = q$  uppfylls Neumanns randvillor
- $q_1 = -q$  uppfylls Dirichlets randvillor

dvs potentialen från den två punktladdningarna

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \pm \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

I det förra fallet är fältlinjerna parallella med  $z = 0$  planet, i det senare fallet ligger ekvipotentialytan  $\phi = 0$  i  $z = 0$  planet.

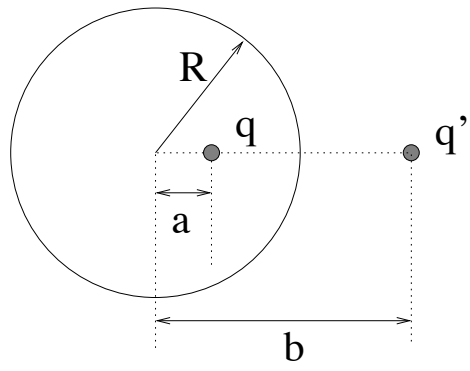
Vi kan alltså konstruera Greensfunktioner för övre halvplanet med dessa två randvillkor. Med Dirichlets homogena randvillkor blir alltså Greensfunktionen

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|},$$

där  $\vec{r}' = (x', y', z')$  och  $\vec{r}'' = (x', y', -z')$ , med  $z' > 0$ .

Notera att  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  uppfyller  $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  i det övre halvrummet.

Intressant nog fungerar speglingsmetoden även för cirklar i två dimensioner och sfärer i tre dimensioner (i det senare fallet dock endast för Dirichlets randvillkor). Se demonstrationsuppgift.



# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 14, 2019

## 10. Värmeledning, diffusionsekvation

Betrakta ett temperaturfält  $T(\vec{r}, t)$

- På ett område  $V$ .
- Med randvillkor längs  $\partial V$ .
- I närvaro av eventuella värmekällor.
- Med ett explicit tidsberoende.

Vi söker nu en differentialekvation för detta fält.

### Värmeledning (diffusion)

Vi vet att värme strömmar från varmare till kallare. Det innebär att vi har ett flöde av värmeenergi i en riktning som är motsatt  $\vec{\nabla}T$ .

#### Antagande 1

Värmeströmmen kan skrivas

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla}T, \quad (1)$$

där  $\lambda$  är värmekonduktiviteten (värmeledningsförmågan), och  $\vec{q}$  är själva värmeflödet med enheten  $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$ .

## Antagande 2

Värmetätheten  $\varepsilon$  är proportionell mot temperaturen

$$\varepsilon = c\rho T,$$

där  $c$  är värmekapacitiviteten och  $\rho$  är densiteten.

- $[\varepsilon] = \text{J/m}^3$
- $[c] = \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
- $[\rho] = \text{kgm}^{-3}$

Betrakta nu en volym  $V$ , vilken begränsas av en sluten yta  $S = \partial V$ .

- Värmeenergin i denna volym är

$$H = \int_V Tc\rho dV \quad (2)$$

- Utflödet av värme från denna volym är

$$\oint_{\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S}. \quad (3)$$

Förutsatt att det inte finns några värmekällor i  $V$  måste utflödet motsvara förändringen per tidsenhet av värmen i  $V$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \oint_{\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S}. \quad (4)$$

Med insättning av ekv. (2) i VL och användande av Gauss sats i HL fås

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (Tc\rho) dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV. \quad (5)$$

Volymen  $V$  är helt godtyckligt vald, så likheten måste gälla för alla volymer  $V$ . I så fall kan vi sätta integranderna lika med varandra

$$\frac{\partial}{\partial t} (Tc\rho) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \vec{\nabla} \cdot \lambda \vec{\nabla} T = \lambda \Delta T. \quad (6)$$

Om vi nu antar att  $c$ ,  $\rho$  och  $\lambda$  är konstanter, så kan vi skriva ekvationen som

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T, \quad (7)$$

där

$$k \equiv \frac{\lambda}{c\rho}. \quad (8)$$

Den här ekvationen kallas för värmeledningsekvationen.

### Kommentar

Värmeledningsekvationen är en kontinuitetsekvation för värmeenergin. Ni känner antagligen igen härledningen från det liknande bevis som gjordes i kap. 4 i kurskompendiet.

**Stationär lösning.** För en tidsberoende värmefördelning gäller  $\partial T/\partial t = 0$  och därmed

$$\Delta T = 0 \quad (9)$$

som vi kallar för Laplace-ekvation.

**Värmekälla.** Vad händer nu om vi har en värmekälla i volymen  $V$ ? Antag att värme produceras av en källa med tätheten  $s = s(\vec{r}, t)$  med enheten  $\text{W m}^{-3}$ . Då måste vi komplettera ekv. (5) med en term för denna uppvärmning

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (Tc\rho) dV = \int_V \lambda \Delta T dV + \int_V s dV. \quad (10)$$

Värmeledningsekvationen (med konstant  $c, \rho$ ) blir då

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + \frac{s}{c\rho}. \quad (11)$$

**Kommentar 1:** Vi använder ibland beteckningen  $u = s/(c\rho)$ , som också kallas för *värmekälltäthet*.

Om temperaturfördelningen är tidsberoende kan vi skriva ekvationen som

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda} \quad (12)$$

som är ett exempel på Poissons ekvation. Högerledet kallar vi då för en källterm.

### Exempel: En-dimensionell värmeledning

Betrakta ett område  $x \in [0, L]$  i en dimension med följande villkor på temperaturfördelningen  $T = T(x, t)$

- Begynnelsevillkor:  $T(x, 0) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ .
- Randvillkor:  $T(0, t) = T(L, t) = 0$  (dvs Dirichlets homogena RV).

**Kommentar 2:** Teckna  $T(x, 0)$  och jämför gärna med Neumanns homogena randvillkor som hade stoppat värmetransport genom ändarna eftersom  $\partial T/\partial x = 0$  (vid  $x = 0$  och  $x = L$ ).

Finn temperaturfördelningen för  $t > 0$  i avsaknad av någon värmekälla.



**Lösning:** Värmeledningsekvationen är

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Notera att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{\pi x}{L} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L},$$

vilket gör det naturligt att ansätta lösningen  $T(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{L}$ .

Denna ansats uppfyller randvillkoren och begynnelsevillkoret om  $f(0) = T_0$ . Insättning i värmeledningsekvationen ger

$$f'(t) \sin \frac{\pi x}{L} + k f(t) \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} = 0,$$

vilket har lösningen

$$f(t) = A e^{-\pi^2 k t / L^2},$$

där  $A = T_0$  bestäms av begynnelsevillkoret. Lösningen

$$T(x, t) = T_0 e^{-\pi^2 k t / L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

innebär att temperaturen minskar kontinuerligt (flödar ut genom ändarna) och att en stationär lösning,  $T = 0$ , erhålls för stora  $t$ .

### Exempel: Värmeledning med källterm

Granitberggrunden i Sverige innehåller en viss mängd radium, vars radioaktiva sönderfall ger en uppvärmning som av en rymdkälla för värme med konstant källtäthet  $\rho_T$ . Granitens värmeledningsförmåga är  $\lambda$  (i  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). Låt oss göra det orealistiska antagandet att Jorden alltigenom bestod av granit med dessa egenskaper. Hur skulle i så fall den stationära temperaturfördelningen i Jordens inre se ut? Vad blir temperaturen i centrum?

**Lösning:** Vi kan ställa upp differentialekvationen

$$\Delta T = -\frac{\rho_T}{\lambda} \quad (13)$$

I sfäriska koordinater under antagande om sfärisk symmetri blir ekvationen

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -Q, \quad (14)$$

där  $Q = \rho_T/\lambda$ . Vi kan skriva detta som

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -Qr^2, \quad (15)$$

och sedan integrera en gång.

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr^3 + A, \quad (16)$$

där  $A$  är en integrationsvariabel. Om vi dividerar med  $r^2$  får vi

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr + \frac{A}{r^2}. \quad (17)$$

Integrerar vi än en gång får vi

$$T(r) = -\frac{1}{6}Qr^2 - \frac{A}{r} + B, \quad (18)$$

där  $B$  är ännu en integrationsvariabel. Vi måste nu bestämma värden på de båda integrationsvariablerna. Först kan vi notera att det inte finns någon värmepunktkälla, så temperaturen inte bör bli oändlig i Jordens inre, dvs  $A = 0$ .

För det andra noterar vi att temperaturen vid jordytan,  $r = R$ , är praktiskt taget 0 jämfört med temperaturen i Jordens centrum, så vi får ekvationen

$$0 = -\frac{1}{6}QR^2 + B. \quad (19)$$

vilket ger  $B = QR^2/6$ . Fysikaliskt så är  $B$  temperaturen i Jordens centrum. Om vi sätter in realistiska värden på  $\rho_T = 5 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-3}$ ,  $\lambda = 3,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  och  $R = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ , så får vi  $B = 6 \times 10^5 \text{ K}$ , vilket är en grov överskattning av den verkliga temperaturen.

## Greensfunktioner för värmeledningsekvationen

- Kan vi använda Greensfunktioner för att teckna lösningar till allmänna källfördelningar?
- Notera att fälten (temperatur, värmekälla) är både rums- och tidsberoende.
- Ja, det kan man - Greensfunktionen är då lösningen (med givna randvillkor) till värmeledningsekvationen för en punktkälla i både tid och rum.

**Kommentar 3:** En punktlig energikälla som bara existerar under ett ögonblick, men är precis så stark att den tillförda energimängden är ändlig. Fundera på hur temperaturfältet borde se ut.

Vi söker alltså lösningen till Greensfunktionsekvationen svarande mot värmeledningsekvationen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta^D(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$$

på hela  $D$ -dimensionella rummet  $\mathbb{R}^D$ . Finner vi lösningen till denna ekvation, kan lösningen till värmeledningsekvationen för godtycklig källfördelning  $u$  skrivas

$$T(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t')$$

vilket ses genom direkt insättning

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) T(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' \delta^D(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') u(\vec{r}', t') = u(\vec{r}, t). \end{aligned} \tag{20}$$

som alltså visar att värmeledningsekvationen uppfylls för detta  $T$ .

- Vi studerar lösningen på ett oändligt,  $D$ -dimensionellt rum.
- För det första kan vi använda translationsinvarians i rum och tid för att skriva  $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \tilde{G}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ .
- Följande lösning uppfyller ekvationen

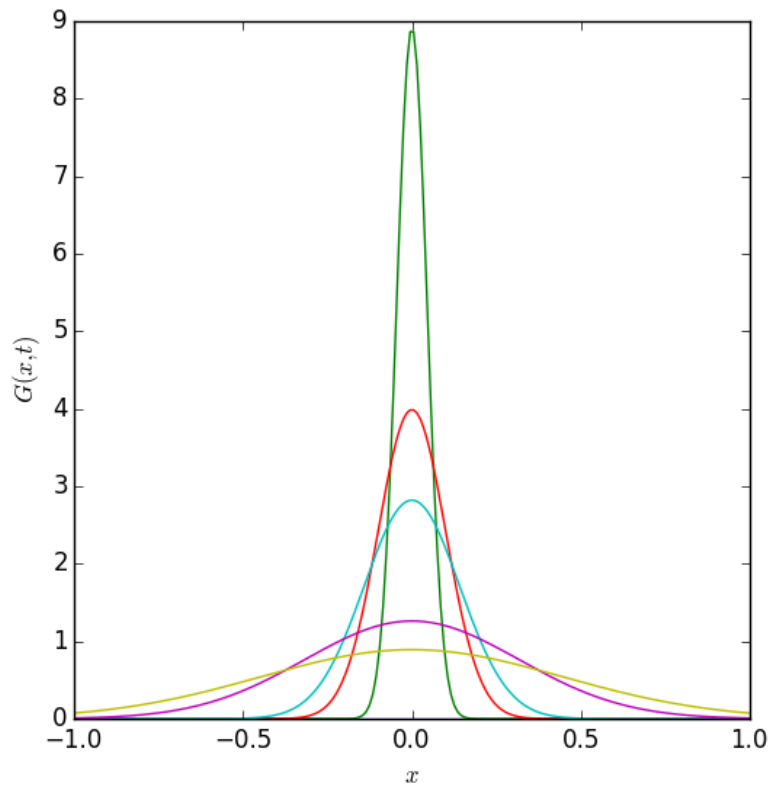
$$\tilde{G}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\sigma(t - t')}{(4\pi k(t - t'))^{D/2}} e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4k(t - t')}},$$

där  $\sigma(t)$  är stegfunktionen som tar värdet 0 för  $t < 0$  och 1 för  $t > 0$ .

Faktorn  $\sigma(t - t')$  gör att en källa vid tidpunkten  $t'$  bara kan påverka vad som händer vid senare tidpunkter  $t \geq t'$ , så vi har kausalitet.

Skissa Greensfunktionens utseende för olika  $t$ :

- den börjar som en deltafunktion vid  $t - t' = 0^+$
- för att när tiden går bli bredare och lägre, hela tiden med Gaussisk form.



#### Kommentar

Det faktum att rumsintegralen av  $G$  är konstant i tiden för  $t - t' > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^D} d^D x G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = 1,$$

är ett uttryck för energins bevarande, och naturlig om vi minns att vi kan se värmeledningsekvationen som en kontinuitetsekvation.

Värmeledningsekvationen heter på engelska “the heat equation”. Dess Greensfunktion kallas “heat kernel”, på svenska ibland “värmekärna”.

## Värmeledning (konvektion)

- Ovan har vi enbart behandlat värmeledning via diffusion.
- Konvektion erbjuder betydligt effektivare värmetransport för fluider (vätskor och gaser) genom att varm materia strömmar.
- Vi beskriver detta med en värmeström

$$\vec{q}_{\text{konv}} = \rho c T \vec{v}$$

som skall adderas till diffusionsströmmen från tidigare

$$\vec{q}_{\text{diff}} = -\lambda \vec{\nabla} T.$$

Kontinuitetsekvationen för värmeenergin säger att

$$\frac{\partial T}{\partial t} (T c \rho) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{q}_{\text{diff}} + \vec{q}_{\text{konv}}).$$

Antar vi återigen att  $c$ ,  $\rho$  och  $\lambda$  är konstanter (notera att detta innebär att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \propto \partial \rho / \partial t = 0$ ) får vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = k \Delta T + \frac{u}{c\rho}, \quad (21)$$

där vi också inkluderat möjligheten att det finns värmekällor.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 15, 2019

## 11. Elektromagnetiska fält och Maxwells ekvationer

Vi startar med att betrakta *statiska* elektriska och magnetiska (elektrostatik och magnetostatik) för att sedan ta med *tidsberoendet* och se hur det innebär en koppling mellan de två fälten.

### Maxwells ekvationer (tidsberoende fält)

**Elektrostatik.** Statiska elektriska fält  $\vec{E}(\vec{r})$  uppfyller

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2)$$

- $\rho(\vec{r})$  = elektrisk laddningstäthet.
- $\epsilon_0$  = dielektricitetskonstant i vakuum

Den andra ekvationen säger att elektrostatiska fält är rotationsfria ( $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ) och därmed konservativa.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi,$$

där  $\phi$  är den elektrostatiska potentialen.

Den första är Gauss lag och säger att elektriska fält kan ha elektriska laddningar som källor. Den elektrostatiska potentialen uppfyller därmed Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Magnetostatik.** Statiska magnetiska fält  $\vec{B}(\vec{r})$  uppfyller

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (4)$$

där den första säger att det inte finns några magnetiska laddningar och den andra är Amperes lag.

- $\vec{j}(\vec{r})$  = elektrisk strömtäthet.
- $\mu_0$  = magnetisk permeabilitet i vakuum

Den första ekvationen säger att magnetostatiska fält är divergensfria ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ) (eller källfritt) och kan uttryckas med en vektorpotential

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

där Gaugeinvarians innebär att vektorpotentialen inte är fullständigt bestämd

$$\vec{A}(\vec{r}) \mapsto \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}).$$

Detta gör det möjligt att välja Gaugeparameter så att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  och vektorpotentialen uppfyller Poissons ekvation

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

#### SI enheter

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TA}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ \mu_0 \epsilon_0 &= \frac{1}{c^2} \\ c &= 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

#### Exempel: Bestämning av elektriskt fält

En elektrisk laddning  $Q$  är jämnt fördelad i en sfär med radien  $a$ . Den omges av ett tunt sfäriskt skal med radien  $2a$  och laddningen  $-Q$ . Bestäm det elektriska fältet  $\vec{E}(\vec{r})$  och potentialen  $\phi(\vec{r})$  överallt.

**Lösning:** På grund av att laddningsfördelningen har sfärisk symmetri, så blir  $E_\varphi = E_\theta = 0$ , och  $E_r$  beror inte på  $\theta$  och  $\varphi$ . Vi kan då beräkna  $E_r$  med hjälp av Gauss lag genom att införa en sfärisk volym med radie  $r$  och begränsningsyta  $S_r$ . Ytelementet blir  $d\vec{S} = \hat{r}r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ . Gauss lag

för det elektriska fältet blir

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r) dV = \frac{Q_r}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

där  $\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  är laddningstätheten och  $Q_r$  alltså är den inneslutna laddningen.

Om vi börjar med fallet att sfären har en radie  $r > 2a$ , så ser vi att den totala inneslutna laddningen är  $Q - Q = 0$ . Alltså har vi att

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad (6)$$

och av detta följer att  $E_r = 0$ .

Om sfären har en radie  $r$  så att  $a < r < 2a$ , så är den laddningen, som  $S$  innesluter,  $Q$ . Då ger oss Gauss lag att

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

Integralen i vänsterledet har värdet

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E_r, \quad (8)$$

och vi kan lösa ut

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (9)$$

Slutligen har vi fallet att sfärens radie  $r < a$ . Eftersom laddningen  $Q$  är jämt fördelad över volymen, så innebär det att sfären innesluter laddningen

$$Q \left(\frac{r}{a}\right)^3. \quad (10)$$

Gauss lag ger oss alltså

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3, \quad (11)$$

vilket blir

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3. \quad (12)$$

Vi kan nu lösa ut

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3}. \quad (13)$$



Om vi nu sammanfattar våra resultat, så har vi för det elektriska fältet

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & a < r < 2a \\ 0 & r > 2a \end{cases} \quad (14)$$

Vi skall nu utnyttja detta för att bestämma potentialen, för vilken det gäller att  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ . Eftersom enbart den radiella komponenten av E-fältet är nollskild har vi att  $E_r = -\partial_r\phi$ . I vårt fall kan vi uttrycka potentialen som integralen

$$\int_r^\infty E_r dr = -\int_r^\infty \partial_r\phi dr = \phi(r) - \phi(\infty). \quad (15)$$

Vi sätter potentialen till 0 i oändligheten och börjar med att bestämma potentialen för intervallet  $r > 2a$ . Eftersom  $E_r = 0$  här så följer det att också potentialen blir 0.

Potentialen skall överallt vara kontinuerlig, vilket inte behöver vara sant för  $E$ -fältet. När vi går till intervallet  $a \leq r \leq 2a$  så kan den övre integrationsgränsen sättas till  $2a$ , eftersom potentialen är 0 utanför.

$$\phi(r) = \int_r^{2a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^{2a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right). \quad (16)$$

Speciellt så lägger vi märke till att potentialen i punkten  $r = a$  blir

$$\phi(a) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (17)$$

Det enklaste sättet att garantera att  $\phi$  blir kontinuerlig vid  $r = a$  är nu att skriva potentialen för  $r \leq a$  som

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_r^\infty E_r dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + \int_r^a \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + \left[ \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} \right]_r^a = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 - r^2}{a^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Vi kan till slut sammanfatta potentialen som

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 - r^2}{a^3} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) & a \leq r \leq 2a \\ 0 & r \geq 2a \end{cases} \quad (19)$$

### Exempel: Bestämning av ett magnetfält

En oändligt lång rak ledare har ett cirkulärt tvärsnitt med radien  $a$  och leder en likström med strömstyrkan  $I$ . Använd Amperes lag för att härleda magnetfältet i och kring ledaren om materialet i den antas homogent och isotropt.

*Lösning:* Det elektriska fältet är stationärt i detta fall och vi kan då använda Amperes lag utan någon förskjutningsström

$$\int_{S_\rho} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_\rho} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_\rho, \quad (20)$$

där  $I_\rho$  är strömmen som passerar genom en tvärsnittsytta  $S_\rho$  som är en cirkelskiva med  $z$ -axeln som centrum och radien  $\rho$ . Använder vi Stokes sats får vi

$$\oint_{\partial S_\rho} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_\rho, \quad (21)$$

där vi låter  $\partial S_\rho$  vara randen till  $S_\rho$ , dvs en cirkel som genomlöps moturs. Först tittar vi på fallet att cirkelns radie  $\rho > a$ . Strömmen är då  $I$ , och Amperes lag ger oss

$$\oint_{\partial S_\rho} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I. \quad (22)$$

Vi vet att om den elektriska ledaren sammanfaller med  $z$ -axeln så är magnetfältet riktat i  $\varphi$ -riktningen. Integralen blir då

$$\oint_{\partial S_\rho} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho B_\varphi. \quad (23)$$

Vi kan nu lösa ut

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}. \quad (24)$$

I fallet att cirkelns radie  $\rho < a$  så antar vi att strömmen är jämnt fördelad i tråden, vilket ger oss att den inneslutna strömmen blir

$$I_\rho = I \left(\frac{\rho}{a}\right)^2. \quad (25)$$

Integralen blir nu

$$\oint_{\partial S_\rho} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 I \left(\frac{\rho}{a}\right)^2. \quad (26)$$

Vi kan då lösa

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{a^2}. \quad (27)$$

Sammanfattningsvis har vi alltså att  $\vec{B} = B_\varphi \hat{e}_\varphi$  med

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho > a \\ \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \end{cases} \quad (28)$$

### Exempel: Bestämning av vektorpotentialen

Betrakta en elektrisk ledare parallell med  $z$ -axeln. Genom ledaren flyter en ström  $I$ . Då omges ledaren av ett magnetfält

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}.$$

Bestäm vektorpotentialen  $\vec{A}$  och finn den differentialekvation som beskriver detta fält.

**Kommentar 1:** Notera att magnetfältet uppvisar en singularitet. Känns den igen? Det är fältet från en virveltråd.

Notera att

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

Vi kan därför bestämma vektorpotentialen ur ekvationerna

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (30)$$

och

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (31)$$

Vi skall finna en vektorpotential så att dessa ekvationer uppfylles. Vi provar med  $A_\rho = A_\varphi = 0$  och  $A_z \neq 0$ . Denna ansatz ger

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \log \frac{\rho}{\rho_0} \hat{z}, \quad (32)$$

där  $\rho_0$  är en godtycklig konstant.

Låt oss nu betrakta Amperes lag i det tidsberoende fallet

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (33)$$

Om vi nu ersätter  $\vec{B}$  med  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  så har vi

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (34)$$

För vänsterledet har vi räknereglen

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (35)$$

Den frihet, gauge, som vi har i att bestämma  $\vec{A}$  gör det alltid möjligt att garantera att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , så vi kan reducera ekvationen till

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (36)$$

och vi har på så sätt kommit fram till en Poisson-ekvation för vektorpotentialen. Notera att gauge-valet  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  faktiskt är uppfyllt för den vektorpotential som vi konstruerade ovan.

## Maxwells ekvationer

**Kommentar 2:** Maxwell satte 1864 upp fyra stycken ekvationer som gav en fullständig beskrivning av ett elektromagnetiskt fält. Dock, som vi skall se, inskränkte sig hans eget bidrag till en term i en av ekvationerna.

För *tidsberoende* fält finns det en koppling mellan elektriska och magnetiska fält.

**EM koppling 1: Kontinuitetsekvationen (konservering av elektrisk laddning).** Låt oss betrakta sambandet mellan elektrisk strömtäthet och (rotationen av) ett magnetfält. Detta samband har konsekvenser för kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

från Amperes lag får vi nämligen att HL i kontinuitetsekvationen blir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt! För det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Maxwells lösning var att lägga till en term (förskjutningsströmmen)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (37)$$

Notera att den extra termen betyder att kontinuitetsekvationen uppfylls eftersom

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

där vi har utnyttjat Gauss lag.

**EM koppling 2: Induktion (Faradays lag).** Vi har sedan tidigare funnit att elektriska laddningar kan skapa elektriska fält och att elektriska strömmar kan skapa magnetfält.

Vi vet dock att elektriska fält också kan skapas genom induktion. En förändring av det magnetiska flödet,  $\Phi$ , genom en elektrisk ledare inducerar en spänning,  $U$ , i ledaren då det magnetiska flödet förändras.

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (38)$$

där  $\Phi$  är ett magnetiskt flöde genom ytan  $S$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (39)$$

och  $U$  är den inducerade spänningen längs randen  $\partial S$

$$U = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (40)$$

Vi sätter nu Ekv (40) och (38) lika med varandra och får Faradays lag på integralform

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Använder vi Stokes sats på VL får vi Faradays lag på differentialform (notera att ytan  $S$  är helt godtycklig)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (41)$$

**Kommentar 3:** Det elektriska fältet är inte längre konservativt vilket ju modifierar en av våra ekvationer.

Vi får nu alltså att Maxwells ekvationer blir

**Maxwells ekvationer**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (45)$$

- Ett allmänt fält  $\vec{E}$  kan vi alltid dela upp i en del som är virvelfri, och en del som är källfri.
- För ett elektrisk fält gäller alltså att den virvelfria delen kan skrivas som  $-\vec{\nabla}\phi$ . Enligt induktionsekvationen är

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Alltså kan vi skriva den källfria delen av  $\vec{E}$  som  $-\partial\vec{A}/\partial t$ , så att vi totalt har

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (46)$$

## Maxwells ekvationer i vakuum och den elektromagnetiska vågekvationen

### OBS!

Resten av dessa anteckningar behandlar kap 11.3-11.7 som ej ingår i kursen. Anteckningarna är endast med för bättre koppling till motsvarande material i andra kurser.

- En mycket viktig konsekvens av Maxwells ekvationer är att det existerar våglösningar.

I vakuum ( $\rho = 0$  och  $\vec{j} = 0$ ) blir Maxwells ekvationer

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (47)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (50)$$

Vi kan nu till exempel beräkna rotationen av induktionsekvationen Ekv. (48)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (51)$$

Vi kan nu utnyttja att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  och Ekv. (50)

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (52)$$

Eftersom  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  kan vi skriva detta

$$\left( \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0, \quad (53)$$

vilket är en *vågekvation*.

#### Exempel: Vågekvationen i $D = 1$

Betrakta fältet  $\vec{E} = E(x, t)$  i en dimension och motsvarande vågekvation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x, t) = 0. \quad (54)$$

Ekvationen har då lösningar på formerna  $E_+ = E_0 \sin(kx - \omega t)$  och  $E_- = E_0 \sin(kx + \omega t)$ , vilka beskriver vågor och motiverar varför Ekv. (53) kallas för vågekvationen.

Med denna ansatz ( $E_+$ ) ger vågekvationen

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c|k|,$$

vilket kallas för en dispersionsrelation.

**Rita 4:** funktionen  $E(x, t)$  med en  $x$ -axel och en  $t$ -axel. Illustrera våglängd och periodtid.

- Vid given tid  $t$ : samma fas då  $x \mapsto x + \frac{2\pi}{k}$ .
- Dvs *våglängden*  $\lambda$  relaterar till *vågtalet*  $k$  enligt  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .
- Vid givet  $x$ : samma fas då  $t \mapsto t + \frac{2\pi}{\omega}$ .
- Våghastigheten finner vi genom att notera att  $x - \frac{\omega}{k}t = \text{konstant}$  beskriver punkter med samma fas. Detta ger

$$dx - \frac{\omega}{k} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Hastigheten är alltså  $v = \omega/k = c$ . Ljushastigheten!

I rummet kan vi skriva lösningarna

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = \left\{ \text{välj } \vec{k} = k\hat{x} \right\} = \vec{E}_0 \exp(i(kx - \omega t)).$$

Den fysikaliska lösningen är (antingen) real- eller imaginärdelen av ovanstående. Det betyder alltså att lösningen och tolkningen är analog med  $D = 1$ -exemplet ovan.

**Elektriska och magnetiska vågor.** En motsvarande vågekvation för magnetfältet kan också härledas. Man finner därför

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

Hur förhåller sig *polarisationsvektorn*  $\vec{E}_0$  till  $\vec{B}_0$  och till riktningen på  $\vec{k}$ ?

- Sätt  $\vec{k} = \hat{n}k = \hat{n}\frac{\omega}{c}$ .
- Exponenten blir då  $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \frac{\omega}{c}(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)$ .
- ME1:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , vilket ger  $\hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$ .

Visa gärna detta med indexnotation

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \partial_j E_{0,j} \exp\left(i\frac{\omega}{c}(n_l r_l - ct)\right) = E_{0,j} \left(\partial_j \left[i\frac{\omega}{c} n_l r_l\right]\right) \exp\left(i\frac{\omega}{c}(n_m r_m - ct)\right) \\ &= \{\partial_j r_l = \delta_{jl}\} = i\frac{\omega}{c} E_{0,j} n_j \exp\left(i\frac{\omega}{c}(n_m r_m - ct)\right) \\ &= i\frac{\omega}{c} \hat{n} \cdot \vec{E}_0 \exp\left(i\frac{\omega}{c}(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)\right) \end{aligned}$$

- Pss ME3 ger  $\hat{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$
- Fälten är alltså vinkelräta mot vågens rörelseriktning.
- ME2 säger att  $i\frac{\omega}{c}(\hat{n} \times \vec{E}_0 - c\vec{B}_0) = 0$ , dvs  $\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{n} \times \vec{E}_0$ .
- E- och B-fälten är alltså vinkelräta mot varandra.
- De två möjliga riktningarna på polarisationsvektorn  $\vec{E}_0$  motsvarar de två möjliga polarisationerna hos elektromagnetisk strålning.

Den elektromagnetiska vågen består därför av svängande elektriska och magnetiska fält, vilka genererar varandra

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left(i\frac{\omega}{c}(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)\right), \quad \hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (55)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{n} \times \vec{E}_0 \exp\left(i\frac{\omega}{c}(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)\right) \quad (56)$$



## Vågekvationer för potentialerna

- Hur blir Maxwells ekvationer när fälten uttrycks i potentialerna  $\phi$  och  $\vec{A}$ .
- De två homogena ekvationerna ( $\dots = 0$ ) är de som gör att fälten kan uttryckas i termer av potentialer.

Sätt in uttrycken

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}$$

i de inhomogena ekvationerna:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} =) \quad \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} =) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) &= \mu_0\vec{j}.\end{aligned}$$

- Ett gaugeval för vektorpotentialen förenklar ekvationerna avsevärt
- Välj gaugeparameter så att  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}$ .

Den första ekvationen blir

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \{\text{Gaugeval}\} = \left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi \equiv -\square\phi,$$

där d'Alembert-operatoren  $\square \equiv \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ .

För den andra ekvationen utnyttjar vi att

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} = \{\text{Gaugeval}\} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \Delta\vec{A}.$$

VL i den andra inhomogena ekvationen blir därför

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial(\vec{\nabla}\phi)}{\partial t} - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{\nabla}\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\square\vec{A}.$$

- Vi får alltså inhomogena vågekvationer för potentialerna

$$\begin{aligned}\square\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \square\vec{A} &= -\mu_0\vec{j},\end{aligned}$$

- Man kan använda Greensfunktionen för vågekvationen för att skriva ned generella lösningar när laddningar och strömmar är givna.

- Greensfunktionen är lösningen till följande vågekvation

$$\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \equiv \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t').$$

För enkelhets skull kan vi ta  $\vec{r}' = 0, t' = 0$ .

Greensfunktionen är

$$G_+(\vec{r}, t; 0, 0) = \frac{1}{4\pi t} \delta(r - ct).$$

- Detta är vad som brukar kallas en *retarderad* Greensfunktion.
- Termen kommer sig av att en källa bara påverkar fält vid efterföljande tider (ljuskonen  $r = ct$ ).

**Kommentar 5:** Ekvationen är symmetrisk under  $t \rightarrow -t$ , vilket innebär att det också finns en *avancerad* Greensfunktion  $G_- \propto \delta(r + ct)$ .

### Huygens princip

Det är värt att notera att det intuitivt "sunda" antagandet att Greensfunktionen endast har stöd på ljuskonen faktiskt är mer subtilt än det verkar. Det går under namnet Huygens princip. Det visar sig vara sant i ett udda antal rumsdimensioner, men falskt i ett jämnt antal. I ett jämnt antal rumsdimensioner har Greensfunktionen stöd *inom* ljuskonen, inte endast *på* den. I två dimensioner har man t.ex.

$$G_+^{(2)}(\vec{r}, t; 0, 0) = \begin{cases} \frac{\sigma(t)}{2\pi\sqrt{(ct)^2 - r^2}}, & r < ct, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Tänk på en sten som släpps i en vattenyta. En punkt på ytan påverkas inte bara just då vågfronten passerar, utan även vid alla senare tidpunkter. Tvådimensionell musik är kanske problematisk...

Man måste förstås kunna bekräfta att man får rätt uttryck för en statisk laddningsfördelning. Om  $\rho$  är oberoende av tiden ger Greensfunktionsmetoden

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0(t-t')} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t-t')) \\ &= \{c(t-t') \equiv (x-x') \Rightarrow c \text{ försvinner}\} = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned}$$

vilket är identiskt med vad man får med hjälp av Greensfunktionen för Poissons ekvation.

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Sep 16, 2019

## 12. Tensorer

### Introduktion till tensorbegreppet

- Fysikaliska lagar skall inte bero på i vilket koordinatsystem de beskrivs.
- Detta kan vi åstadkomma genom att skriva dessa lagar som en likhet mellan två objekt vilka vi vet transformeras likadant under en koordinattransformation.
- Vi kommer att kalla sådana objekt för *tensorer*.
- T.ex. är en skalär en tensor av rank-0, en vektor är en tensor av rank-1.
- En invarians hos sådana fysikaliska lagar kan kopplas till en symmetri (t.ex. rotationssymmetri). Invariansen kan kodas in genom att använda "tensorspråket".
- Vi kommer att betrakta transformationer i rummet mellan Cartesiska system. Formalismen kan dock generaliseras till större symmetrier. T.ex. Lorentzinvarians i speciell relativitetsteori vilken involverar rum-tiden (fyra dimensioner); och mer allmänna koordinattransformationer i rum-tiden i allmän relativitetsteori.

Plan:

- Hur beskriva transformation mellan Cartesiska koordinatsystem

- Transformationsegenskaper hos: Skalär, vektor, ... generell tensor
- Visa att diverse objekt verkligen är tensorer
- Fysikaliskt exempel: Tröghetstensorn

## Koordinattransformationer

När vi byter koordinater från ett Cartesiskt högersystem, med koordinater  $x_i$ , till ett annat (med origo i samma punkt), med koordinater  $x'_i$ , relateras

$$x'_i = L_{ij}x_j, \quad (1)$$

där  $\mathbf{L}$  är en ortogonal matris som uppfyller  $\mathbf{L}\mathbf{L}^t = \mathbf{I} = \mathbf{L}^t\mathbf{L}$ . Från detta följer direkt att  $\det(\mathbf{L}^t\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})^2 = \det \mathbf{I} = 1$  vilket ger  $\det \mathbf{L} = \pm 1$ .

Ett allmänt uttryck för determinanten av en  $(3 \times 3)$ -matris är

$$\det \mathbf{M} = \varepsilon^{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \quad (2)$$

### Kommentar

Kontrollera gärna. Detta uttryck ger en summa med sex nollskilda termer (3 positiva och 3 negativa) vilket alltså motsvarar determinanten.

### Rita

$x'y'z'$ -system som är roterat en vinkel  $\alpha$  i  $xy$ -planet relativt ett  $xyz$ -system.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

### Kommentar

Om  $\mathbf{L}$  transformerar ett högersystem till ett högersystem gäller plustecknet,  $\det \mathbf{L} = 1$ . Kolla exemplet ovan att  $\mathbf{L}^t\mathbf{L} = \mathbf{I}$ .

I indexnotation blir villkoret på transformationsmatrisen

$$\delta_{ij} = (L^t L)_{ij} = (L^t)_{ik} L_{kj} = L_{ki} L_{kj}. \quad (4)$$

Notera att vi genom att derivera Ekv. (1) kan skriva matrisen  $\mathbf{L}$  som  $L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ . Eftersom matrisen är ortogonal gäller den inversa relationen  $x_i = L_{ji}x'_j$ , och vi har därför också  $L_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ .

#### Bevis av invers relation

Starta från transformationen  $x'_i = L_{ij}x_j$  och multiplicera med inversa transformationen  $\mathbf{L}^t$

$$(L^t)_{ki}x'_i = (L^t)_{ki}L_{ij}x_j = \delta_{kj}x_j = x_k, \quad (5)$$

Vi noterar att  $(L^t)_{ki} = L_{ik}$  i vänsterledet så att vi får den inversa relationen  $L_{ik}x'_i = x_k$ . Från detta uttryck byter vi bara namn på indexen:  $i \mapsto j$ ,  $k \mapsto i$  så att

$$x_i = L_{ji}x'_j. \quad (6)$$

### Skalärer och vektorer

En skalär  $s$  (= enklaste exempel på en tensor) kännetecknas av att den tar samma värde i alla koordinatsystem, dvs.  $s' = s$ .

#### Kommentar

Det är viktigt att förstå att det är transformationsregeln som är det viktiga. Det räcker inte med att "s är ett tal".

#### Rita

En punkt P i ovanstående två koordinatsystem och illustrera dess  $x'$ - och  $x$ -koordinat.

Sålunda är  $x$ -koordinaten för en punkt i  $\mathbf{R}^3$  inte en skalär, medan t.ex. temperaturen i en punkt är en skalär.

En vektor  $\vec{v}$  är en uppsättning tal som beter sig likadant som ortvektorns komponenter när vi byter system, dvs.

$$v'_i = L_{ij}v_j \quad (7)$$

#### Kommentar

Det är denna transformationsregel som definierar vilka uppsättningar av tre (eller  $D$ ) tal som får privilegiet att kallas vektor.

## Tensorer

### Kommentar

Nu är det rättframt att gå vidare och definiera objekt, tensorer, som har fler än ett index. En matris kan, som vi redan sett, skrivas som en tensor med två index,  $T_{ij}$ . Men inget hindrar att man har ett godtyckligt antal, säg  $p$ .

Transformationsregeln för en tensor med två index (tänk matris) är

$$T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl} \left( = L_{ik}T_{kl} (L^t)_{lj} \right), \quad (8)$$

vilket ju motsvarar  $\mathbf{T}' = \mathbf{LTL}^t$ .

En tensor med  $p$  index (en tensor av rank  $p$ ) skrivs  $T_{i_1 i_2 \dots i_p}$ . och allmänt

$$T'_{i_1 \dots i_p} = L_{i_1 j_1} \dots L_{i_p j_p} T_{j_1 \dots j_p}. \quad (9)$$

Poängen med detta är att man kan multiplicera samman tensorer och vara säker på att resultatet blir en tensor.

### Skalärprodukt

Är  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en skalär? Hur beter den sig vid ett koordinatbyte?

$$u'_i v'_i = L_{ij} u_j L_{ik} v_k = \delta_{jk} u_j v_k = u_k v_k \quad (10)$$

Resultatet är alltså oberoende av koordinatsystem, dvs det är en skalär. Ovanstående visar att summan av produkterna av två vektorers komponenter blir densamma när vektorerna uttrycks i det primmade respektive det oprimmade koordinatsystemet.

**Produkt av tensorer.** Produkten av två tensorer är också en tensor.

- $c_{ij} = a_i b_j$  är också en tensor.
- $u_i = M_{ij} v_j$  är också en tensor.

### Kommentar

För det andra fallet har vi  $M'_{ij}v'_j = L_{ik}L_{jl}M_{kl}L_{jm}v_m = L_{ik}\delta_{lm}M_{kl}v_m = L_{ik}M_{kl}v_l = L_{ik}u_k$  (där vi i första steget har använt att  $\mathbf{L}$  är ortogonal). Om  $M_{ij}$  och  $v_i$  är tensorer är alltså även  $u_i$  det. Det allmänna beviset går likadant (och innefattar förstås det faktum att skalärprodukten av två vektorer är en skalär).

### Exempel: Kryssprodukt

Är  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$  en tensor? Dvs är resultatet en vektor?

#### Kommentar

I linjär algebrakurserna har ni säkert visat att detta är en vektor.

Räknereglerna ovan ger att vi bara måste visa att  $\varepsilon_{ijk}$  är en tensor. Transformationsreglerna säger:

$$\varepsilon'_{ijk} = L_{il}L_{jm}L_{kn}\varepsilon_{lmn} \quad (11)$$

Vi kommer att visa att  $\varepsilon$  är helt invariant under koordinattransformationer. Men låt oss först visa att  $\varepsilon'_{ijk}$  är antisymmetriskt. Byt plats på två index

$$\varepsilon'_{jik} = L_{jl}L_{im}L_{kn}\varepsilon_{lmn} = L_{jm}L_{il}L_{kn}\varepsilon_{mln} = -L_{il}L_{jm}L_{kn}\varepsilon_{lmn} = -\varepsilon'_{ijk}, \quad (12)$$

där vi först bytte namn på två summationsindex, och sedan bytte plats på dem i  $\varepsilon$ -tensor och utnyttjade att den är antisymmetrisk.

Den bevisade antisymmetrin betyder ju också att element med två lika index måste vara noll. T.ex.  $\varepsilon'_{iik} = -\varepsilon'_{iik}$ .

$\varepsilon'_{ijk}$  är alltså proportionell mot  $\varepsilon_{ijk}$ . Visa därför en permutation, t.ex.  $ijk = 123$ .

$$\varepsilon'_{123} = L_{1l}L_{2m}L_{3n}\varepsilon_{lmn} = \det \mathbf{L} = +1, \quad (13)$$

för en högertransformation.

Så  $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ , Levi-Civita-tensorn är en *invariant tensor*. Den enda andra invarianta tensorn är Kroneckers delta. Visa själv att  $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ .

**Vektoroperatorn.** Vi behöver också kunna derivera. Låt oss visa det litet triviala påståendet att gradienten av en skalär är en vektor. Vi utgår från skalärfältet  $\phi$  och har alltså att  $\phi' = \phi$ . Vi har  $(\vec{\nabla}\phi)'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i}\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = L_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = L_{ij}(\vec{\nabla}\phi)_j$ . Detta visar att  $\partial_i$  är en vektoroperator, och man kan sedan

använda den för att konstruera andra derivator (divergens, rotation osv.). Samma regler gäller för  $\partial_i$  som för andra tensorer.

### Tröghetstensor

Ett annat klassiskt exempel är tröghetstensor,

$$I_{ij} = \int_V dV \rho(r^2\delta_{ij} - x_i x_j), \quad (14)$$

som man räknade ut i stelkroppsdyamik. Den relaterar rörelsemängdsmomentet till rotationsvektorn enligt  $L_i = I_{ij}\omega_j$ . I och med att den innehåller upprepade kryssprodukter är det enklare att härleda den i tensorformalism.

Ett litet volymelement  $dV$  av en stel kropp har massan  $dm = \rho dV$ , och om kroppen roterar med en rotationsvektor  $\omega_i$  har det hastigheten  $v_i = (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$ . Dess rörelsemängd är  $dp_i = dm v_i = dm \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$ . Bidraget till rörelsemängdsmomentet från volymelementet är

$$\begin{aligned} dL_i &= \varepsilon_{ijk} x_j dp_k = dm \varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} \omega_l x_m = dm (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j x_m \omega_l \\ &= dm (r^2 \omega_i - x_i x_j \omega_j) = dV \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j \end{aligned} \quad (15)$$

och totalt blir detta

$$L_i = \int_V dV \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j \equiv I_{ij} \omega_j, \quad (16)$$

där vi alltså definierar tröghetstensor i det sista steget.



# FFM232, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Christian Forssén, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

Oct 21, 2016

## Repetition

**Kapitel 1 Fält och derivator:** Introducerande kapitel.

Nivåytor och fältlinjer för att visualisera fält.

**Kapitel 2,3,4 Koordinater, integraler, integralsatser:** Matematiska verktyg

*MEN* vi vill betona fysiken

- derivatan av ett fält har en fysikalisk betydelse
- integralen av ett fält har en fysikalisk betydelse

Kurv-, yt-, rymdintegraler: Kan vi använda oss av en integralsats (se lösningsstrategi från kap. 4).

**Kapitel 5, 12 Indexnotation, tensorer:** Fundament

Dessa kapitel ger fundamentet för vad som definierar en skalär, en vektor (tensorer). Viktigt för framtida kurser. Men indexnotation erbjuder också ett kraftfullt verktyg att härleda vektoridentiteter.

**Kapitel 6, 7 Singulära fält, deltafunktioner:**

Introducerar singulära fält (källor, virvlar) och ger verktyg för att hantera dessa matematiskt.

**Kapitel 8, 9 Potentialteori, Laplaces och Poissons ekvationer:** Kronjuvelerna

Vi kommer fram till de generella differentialekvationerna som styr fysikaliska fält och diskuterar hur vi skall lösa dem (se nedan). Dessa avsnitt är något av kronjuvelerna i denna kurs.

**Kapitel 10, 11 Värmeledning, elektromagnetism:** Tillämpningar

Ger en tydligare fysikalisk tolkning av det vi har lärt oss genom ganska konkreta exempel.

## Något mer om lösningar av differentialekvationer

Olika lösningsstrategier lämpar sig olika väl för olika problem. Här listas några problemtyper:

- Symmetrier: Kan man inse att fältet bara beror på en koordinat? Då blir differentialekvationen mycket enklare och den går oftast att integrera direkt. Notera att detta ger integrationskonstanter vilka måste bestämmas (från randvillkor, existens av singulära källor, etc). Ett alternativ kan vara att använda Gauss sats för att få ett uttryck för vektorfältet.
- Vinkelberoende randvillkor: Gör en lösningsansats som kan uppfylla randvillkoret och som samtidigt är en egenfunktion till Laplacianen ( $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ , konstant). Detta gör att differentialekvationen separeras i två delar som kan lösas var för sig. Metoden kallas för variabelseparation.
- Helt allmän metod: Greensfunktioner. Gör differentialekvationen till en integralekvation. Problemet blir att finna Greensfunktionen (och eventuellt att lösa integralen).
  - För vissa speciella geometrier (halvrymd, sfär, cirkel) och randvillkor kan man använda sig av spegelladdningar (utanför det fysikaliska området) för att konstruera en Greensfunktion.