Tentamen läsåret 23/24

Elektriska Kretsar och System ESS117

Elektriska Nät och System ESS116

Examinator: Jan V. Grahn

Onsdag 3 januari 2024 kl 08:30-12:30

Salstentamen

Tentamen omfattar sex beräkningsuppgifter. Fullständiga beräkningar måste redovisas. Korrekt och välmotiverad lösning med svar ger maximalt 3 poäng (p).

Ange uppgiftsnummer och personlig kod överst på varje papper,

Skriv endast på ena sidan av papperet. Blanda aldrig olika uppgifter på samma ark.

Rättning sker med röd penna, mao rött är ej tillåten färg i lösningar.

Tillåtna hjälpmedel som får medtas till tentamen:

- Physics Handbook
- Extra formelsamling Elektriska kretsar och system ESS117 ht23
  (alternativt Elektriska nät och system ESS116 ht22)
- Chalmersgodkänd räknare
- Beta Mathematics Handbook

För godkänt krävs 8 p.
Betygsgränser: Minst 8 p ger betyg 3, minst 12 p betyg 4 och minst 15 p betyg 5. Poäng inkluderar eventuell bonus från duggan innevarande läsår.

Förfrågningar: Examinator Jan Grahn, Mikroteknologi och Nanovetenskap, Chalmers tekniska högskola. Mobil 0730-34 62 99/e-post jan.grahn@chalmers.se

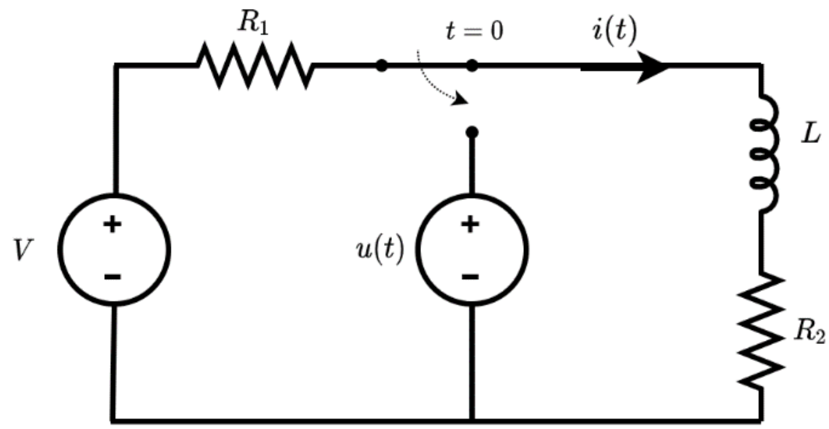
Tentamen och lösningsförslag anslås dagen efter tentamenstillfälle på Canvas tentamensmodul. Resultat meddelas i Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfälle. Vill du se din rättade tenta, kontakta gruadmin.mc2@chalmers.se från din chalmersstudent epost-adress.

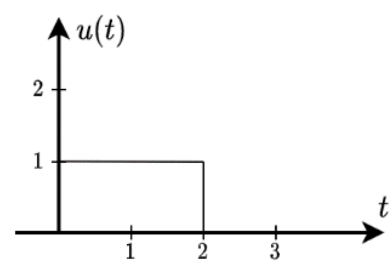
Lycka till!

Uppgift 1.

Ställ upp ett uttryck för strömmen $i(t)$ för t > 0 när strömbrytaren bytt läge. Antag att strömbrytaren varit i första läget en lång tid innan t = 0.

V är konstant och $u(t)$ enligt graf.





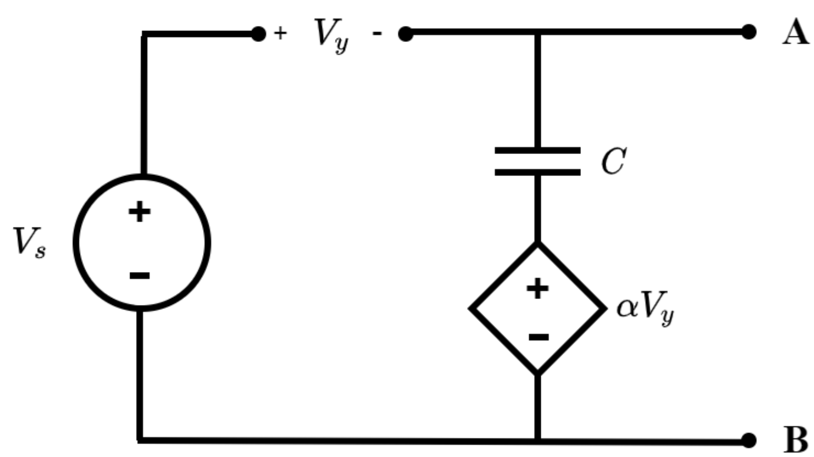
Uppgift 2.

Ta fram Nortons ekvivalenta två pol med avseende på noderna A och B.

$V_s = 3\cos(\,50 \cdot 10^6 t + 45°)$ V

$C =\ 2$ nF

$\alpha = 3$



Uppgift 3.

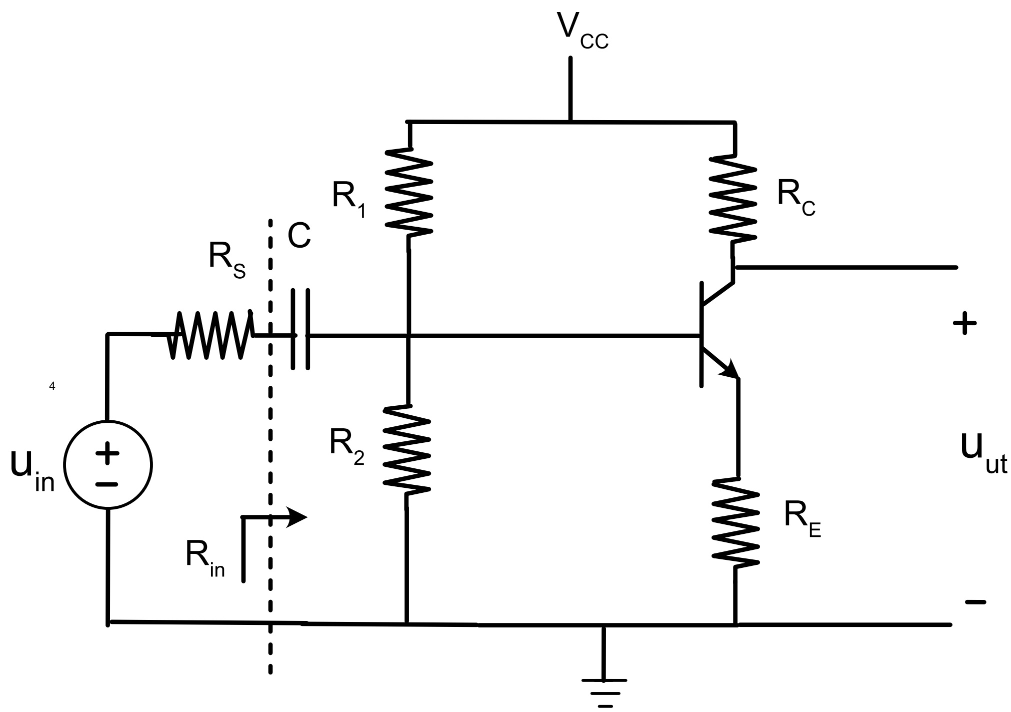
En förstärkare med förstärkning A återkopplas med ett resistivt nät. Bestäm återkopplingsfaktorn β så att en fasmarginal på 45° uppnås. Beräkna även den resulterande amplitudmarginalen.

$$A = \frac{1 \cdot 10^5}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_3}\right)}$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \frac{rad}{s}, \omega_2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{rad}{s}, \omega_3 = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^7 \frac{rad}{s}$$

Uppgift 4.

Beräkna inresistansen R_{in} (småsignal) och spänningsförstärkningen u_{ut}/u_{in} för transistorförstärkaren nedan. h_{ie} = 800 Ω och h_{fe} = 250.
För aktuella signalfrekvenser kan kapacitansen anses vara stor samt övriga transistorparametrar försumbara.



R_1=20 kΩ, R_2=4 kΩ, R_C=3 kΩ, R_E=200 Ω, R_S=50 Ω

Uppgift 5.

Småsignalförstärkaren nedan är konstruerad med en NMOS transistor av anrikningstyp. Beräkna arbetspunkten för transistorn.

Transistordata:

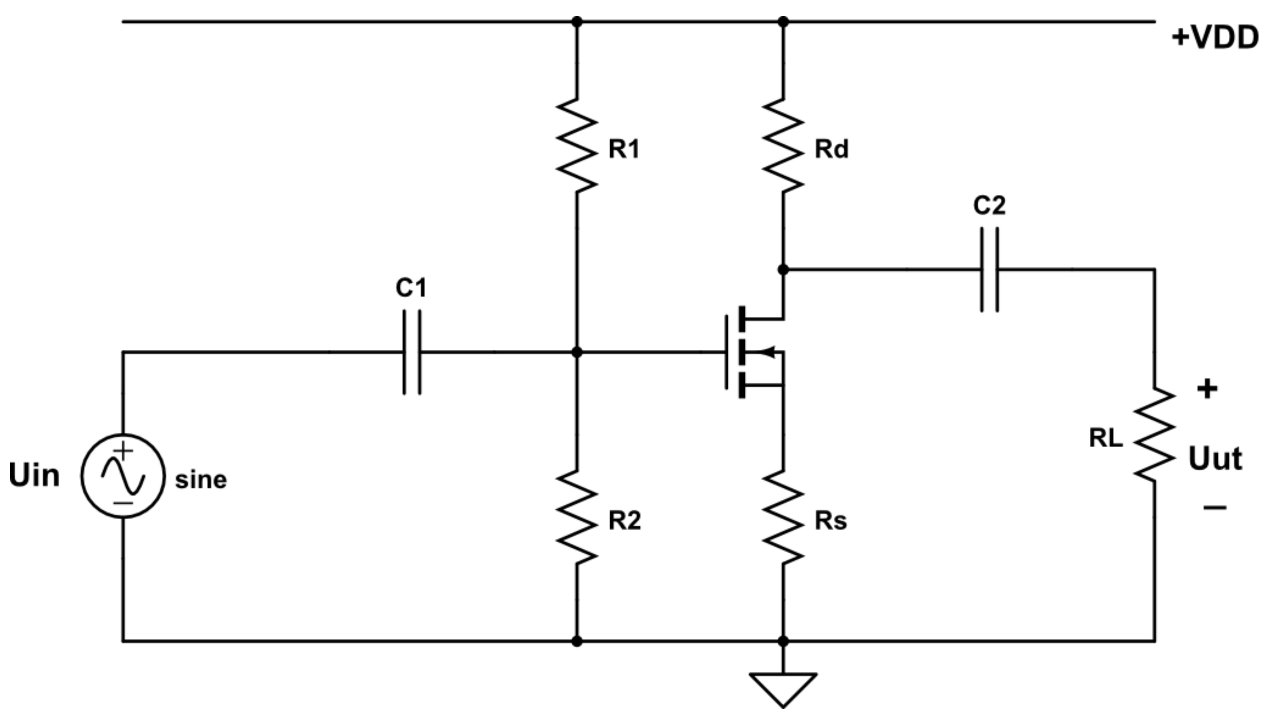
μ_n= 900 cm^2/Vs, C_{ox}= 1.24 µF/cm^2

W= 5 µm , L= 0.65 µm, Tröskelspänning = 0.50 V, Earlyspänning mycket hög

Nätet:

R_1 = 5.6 kΩ, R_2 = 1.8 kΩ, R_d = 1.2 kΩ , R_s = 1.5 kΩ , R_L = 1 kΩ,

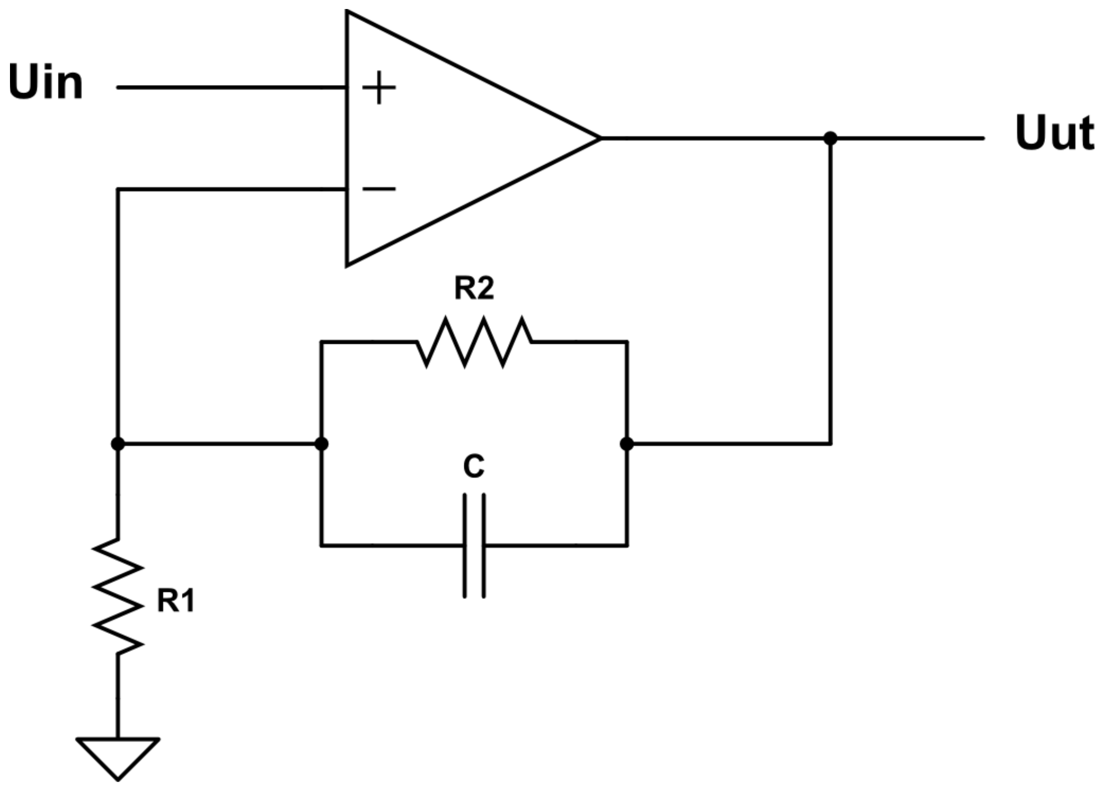
C_1 = 5 nF, C_2 = 5 nF, V_{dd} = 4.0 V



Uppgift 6.

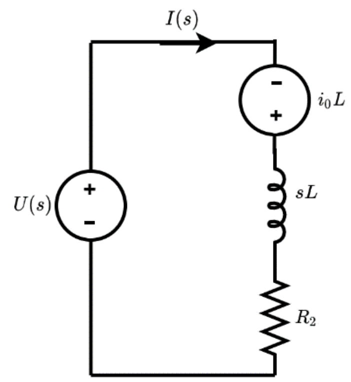
Härled och skissa överföringsfunktionens belopp för nedanstående aktiva lågpassfilter i en förenklad Bodeplott.
Opförstärkaren är ideal med gränsfrekvens > 10^6 rad/s.

$R_1 =$ 0.11 kΩ, $R_2 =$ 1.0 kΩ, $C =$ 1 μF



1.

Vi vill lösa med Laplace, och laplacetransformerar kretsen för t > 0.



För att hitta laplace transformen av $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ behöver vi uttrycka tidsfunktionen *u(t)* i kända funktioner som vi kan transformera. Vi ser att *u(t)* är en enhetspuls $\Theta(t)$ som dör ut, och vi kan uttrycka den som summan av två enhetspulser enligt:

$u(t) = \Theta(t) - \Theta(t-2)$ V

Laplacetransformen av en enhetspuls känner vi till, och en tidsförskjutning blir bara en exponentialfunktion i laplacedomän.

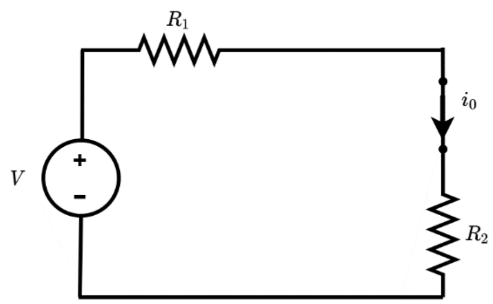
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

Spänningsfallet över övriga komponenter transformeras enligt

$$\mathcal{L}\{U_{R_2}\} = I(s)R_2$$

$$\mathcal{L}\{U_L(s)\} = I(s)sL - i_0L$$

Där i_0 är strömmen genom induktorn för t = 0.



Vi kan sen göra KVL på kretsen för att få ett uttryck för $I(s)$.

$$-U(s) - i_0L + I(s)(sL + R_2) \Rightarrow I(s) = \frac{U(s) + i_0L}{sL + R_2}$$

Innan vi kan transformera tillbaka behöver vi hitta i_0, det gör vi genom att kolla på kretsen för t<0. Då har vi en DC-källa med värdet V, som kommer få induktorn att bete sig som en kortslutning. Även här kan vi göra KVL och får då:

$$i_0 = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Nu kan vi skriva upp hela uttrycket för strömmen, och sen modifiera det så att vi hittar kända laplacetransformera som vi kan inverstransformera tillbaka till tidsdomän.

$$I(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + i_0 L}{sL + R_2} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{R_2}{L}\right)} - \frac{1}{L} \cdot \frac{e^{-2s}}{s\left(s + \frac{R_2}{L}\right)} + \frac{i_0}{s + \frac{R_2}{L}}$$

Och vi kan använda två kända laplacetransformer

$$\mathcal{L}\{1/a\,(1 - e^{-at})\} = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

Vilket ger

$$i(t) = \frac{1}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right) - \frac{1}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}(t-2)}\right)\Theta(t-2) + i_0 e^{-\frac{R_2}{L}t}\ \mathrm{A}$$

Vi kan kolla rimlighet genom att kolla gränsvärdena $t = 0$ och $t \to \infty$

$i(t = 0) = i_0$, rimligt, strömmen då vi slår om brytaren vet vi är i_0.

$i(t \to \infty) = 0$, rimligt då enhetspulsen samt begynnelseenergin dör ut med tiden och ingen ny energi tillförs kretsen.

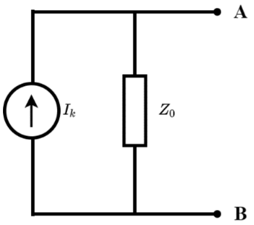
2.

Stationärtillstånd, sinusoidal inspänning → använd jω-metoden. $\omega = 50 \cdot 10^6$ rad/s.

$V_s = 3\angle 45°\text{V}$

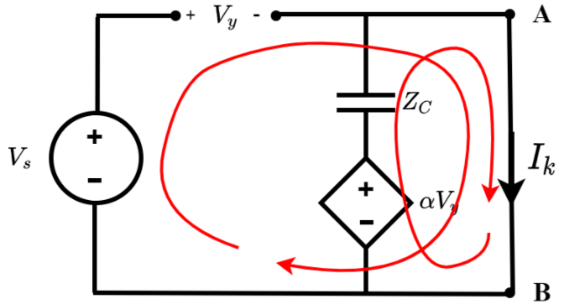
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j10\ \Omega$$

Vi behöver hitta kortslutningsströmmen, i_k samt den ekvivalenta resistansen Z_0 för att ta fram Northons tvåpol enligt



Men med beroende källor samt avbrott i kretsen är det enklare att hitta kortslutningsströmmen och tomgångsspänningen och sen uttrycka $Z_0 = \frac{U_t}{I_k}$.

Här är det viktigt att notera att värdet på V_y inte är konstant utan kommer vara olika beroende på om vi har öppen krets eller kortslutning.

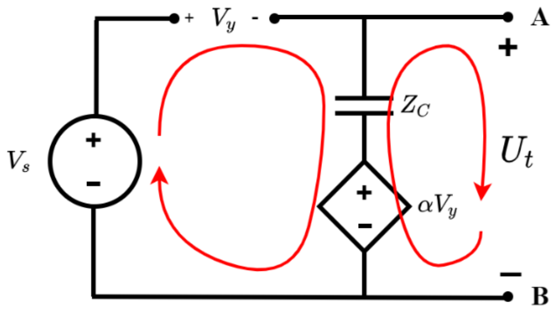


Kortslutningsströmmen fås genom att göra KVL två gånger

$$-\alpha V_y + i_k Z_C = 0 \Rightarrow I_k = \frac{\alpha V_y}{Z_C}$$
$$-V_s + V_y = 0 \Rightarrow V_s = V_y$$
$$I_k = \frac{\alpha V_s}{Z_C}$$

Tomgångsspänningen fås genom KVL, när kretsen är öppen går ingen ström genom Z_C, så

$$-U_t + \alpha V_y = 0 \Rightarrow U_t = \alpha V_y$$
$$-V_s + V_y + \alpha V_y = 0 \Rightarrow V_y = \frac{V_s}{1+\alpha}$$
$$U_t = \frac{\alpha V_s}{1+\alpha}$$



Och den ekvivalenta resistansen fås som

$$Z_0 = \frac{U_t}{I_k} = \frac{\frac{\alpha V_s}{1+\alpha}}{\frac{\alpha V_s}{Z_C}} = \frac{Z_C}{1+\alpha}$$

Stoppar vi in givna värden får vi

$I_k = 0.9\angle 135°$ A

$Z_0 = -j2.5\ \Omega$

3.

Eftersom vi efterfrågar ett resistivt nät så är återkopplingsfaktorn β ett reellt tal.

Slingförstärkningen är då

$$\beta A = \frac{\beta \cdot 1 \cdot 10^5}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_3}\right)}$$

Slingförstärkningens fas har 45° fasmarginal när $\omega = \omega_2$ eftersom då är

$$arg\{\beta A(j\omega_2)\} = arg\left\{\frac{\beta\cdot 1\cdot 10^5}{\left(1+\frac{j\omega_2}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{j\omega_2}{\omega_2}\right)\left(1+\frac{j\omega_2}{\omega_3}\right)}\right\} \approx arg\left\{\frac{\beta\cdot 1\cdot 10^5}{\left(\frac{j\omega_2}{\omega_1}\right)(1+j)(1)}\right\} = -135^\circ$$

Då kan beloppet av slingförstärkningen uttryckas som

$$|\beta A(\omega_2)| = \left|\frac{\beta \cdot 1 \cdot 10^5}{\left(\frac{j\omega_2}{\omega_1}\right)(1+j)(1)}\right| = \beta \cdot 2.83 \cdot 10^3$$

Där villkoret är att beloppet på slingförstärkningen är 1, dvs β fås ur

$$|\beta A(\omega_2)| = \beta \cdot 2.83 \cdot 10^3 = 1 \;\rightarrow\; \beta = 3.54 \cdot 10^{-4}, \text{ (-69 dB)}$$

Amplitudmarginalen då fasen når -180°, dvs βA reellt, blir då

$$\beta A(\omega) = \frac{\beta \cdot 1 \cdot 10^5}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_3}\right)} = \frac{\beta \cdot 1 \cdot 10^5 \omega_1\omega_2\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)(\omega_3 + j\omega)}$$

Multiplicerar man in termerna i nämnaren får man vidare

$$\frac{\beta \cdot 1 \cdot 10^5 \omega_1\omega_2\omega_2}{\omega_1\omega_2\omega_3 - \omega^2(\omega_1+\omega_2+\omega_3) + j\omega(\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 - \omega^2)}$$

men eftersom svaret ska vara reellt så ska den tredje termen i nämnaren vara noll, där de icketriviala lösningarna ges av

$$(\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 - \omega^2) = 0 \quad dvs \quad \omega_{180} = \sqrt{\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2} = 9.1 \cdot 10^6\ rad/s$$

därför blir amplitudmarginalen

$$-20 \cdot log(|\beta A(\omega_{180})|) = 31\ dB$$

4.

Inresistansen för en icke- avkopplad emitter ges av

$$R_{in} = R_1//R_2//(h_{ie} + R_E(1+h_{fe})) = 3.1\ \text{k}\Omega$$

Spänningsförstärkningen för en, som i detta fall, icke avkopplad emitter ges av (BM s 322)

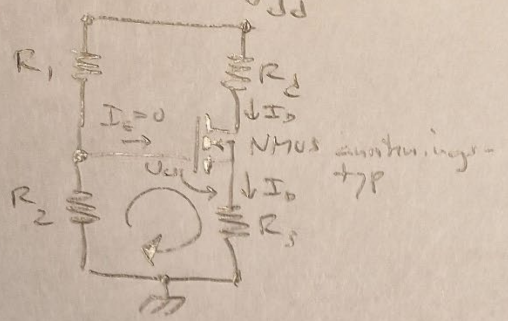
$$A_v = -\frac{h_{fe}R_C}{(h_{ie} + \mathrm{R}_E(1 + h_{fe}))}$$

Och för att slutligen uttrycka u_{ut}/u_{in} så måste man spänningsdela med resistanserna R_{in} och R_s, dvs småsignalförstärkningen blir

$$\frac{u_{ut}}{u_{in}} = -\frac{R_{in}}{(R_{in} + R_s)}\frac{h_{fe}R_C}{\left(h_{ie} + \mathrm{R}_E(1 + hfe)\right)} = -14.5$$

5.

(5) Storsignalproblem för nätet:



Sök (U_{GSQ}, I_{DQ}) för NMOS!

KVL för ⟲:

$$-V_{dd}\frac{R_2}{R_1+R_2} + U_{GS} + R_s I_D = 0$$

I förstärkning arbetar NMOS i mättnad.

Earlyspänning hög $\Rightarrow \lambda \approx 0$

FS $\Rightarrow I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2$

där $U_T = 0{,}50$ V.

Fås:

$$k = \mu_n C_{ox}\frac{W}{L} = 8{,}58 \text{ mA/V}^2$$

$$-V_{dd}\frac{R_2}{R_1+R_2} + U_{GS} + R_s\frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2 = 0$$

Lös map U_{GS}:

$$\frac{k}{2}R_s U_{GS}^2 - (kR_s U_T - 1)U_{GS} + \left(\frac{k}{2}R_s U_T^2 - \frac{R_2}{R_1+R_2}V_{dd}\right) = 0$$

Numeriskt: $6{,}44 U_{GS}^2 - 5{,}44 U_{GS} + 0{,}64 = 0$

$$\Rightarrow \quad U_{GS} = \begin{cases} 0{,}70 \text{ V} \\ 0{,}14 \text{ V} \end{cases}$$

Välj $U_{GSQ} > U_T$ dvs

$U_{GSQ} = 0.70$ V $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{DQ} = \frac{k}{2}(U_{GSQ} - U_T)^2 = 0.18 \text{ mA}$$

(Kontroll att Q är i mättnad: $U_{DSQ} = V_{dd} - I_D(R_s + R_d) =$
$= 3{,}52$ V $> U_{GSQ} - U_T = 0{,}20$ V. ok!)

Svar: Q: $I_{DQ} = 0.18$ mA, $U_{GSQ} = 0.70$ V □

6.

(6.) Icke-inverterad opamp med överföringsfkn:

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = 1 + \frac{R_2 /\!/ \frac{1}{j\omega C}}{R_1}$$

Skriv om på Bodes normalform

↑ Ph.H. 4.6

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{R_1} = \frac{(R_1+R_2) + j\omega R_1 R_2 C}{R_1(1+j\omega R_2 C)} =$$

$$= \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega R_2 C}\right)\left(1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} C\right) =$$

$$= K \underbrace{\left(\frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}\right)} \underbrace{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

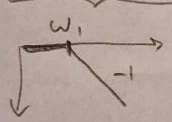
där

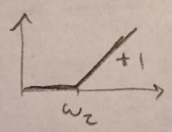
$$K = \frac{R_1+R_2}{R_1} = \frac{1.11}{0.11} = 10$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R_2 C} = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right)C} = 10^4 \text{ rad/s}$$

Bode: (förenklad)



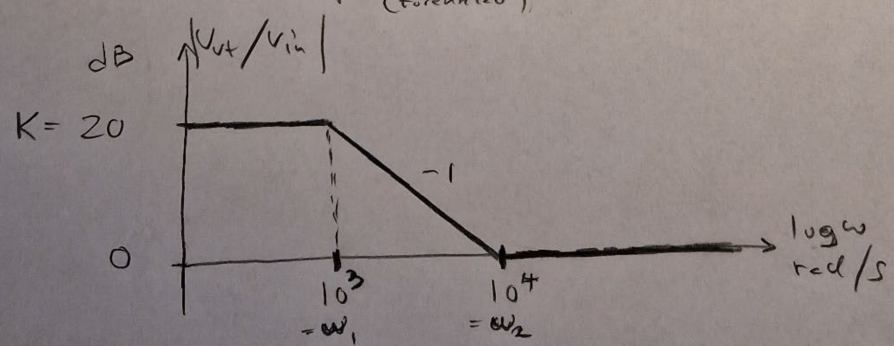


Inses att: $\omega_1 < \omega_2$

$U_{ut}/U_{in} \rightarrow K = 10 = 20$ dB då $\omega \rightarrow 0$

$U_{ut}/U_{in} \rightarrow 1 = 0$ dB då $\omega \rightarrow \infty$

Totala Bodeplotten (förenklad) för beloppet U_{ut}/U_{in}:



Op.förstärkarens gränsfrekvens $>> \omega_2$, dvs begränsar ej filtrets överföringsfkn.