

Tentamen ESS116
Elektriska Nät och System F2

Examinator: Jan V. Grahm

Onsdag 26 oktober 2022 kl. 08:30-12:30

Salstentamen

Tentamen omfattar sex beräkningsuppgifter. Fullständiga beräkningar måste redovisas. Korrekt och välmotiverad lösning med svar ger maximalt 3 poäng (p).

Ange uppgiftsnummer och personlig kod överst på varje papper, Skriv endast på ena sidan av papperet. Blanda aldrig olika uppgifter på samma sida.

Tillåtna hjälpmedel:

- Physics Handbook
- Extra formelsamling Elektriska nät och system ESS116 ht 22
- Chalmersgodkänd räknare
- Beta Mathematics Handbook

För godkänt krävs 8 p.

Betygsgränser: Minst 8 p ger betyg 3, minst 12 p betyg 4 och minst 15 p betyg 5. Poäng inkluderar eventuell bonus från duggan ht 2022.

Resultat meddelas via kursens hemsida i Canvas.

Förfrågningar: Examinator Jan Grahm, Mikroteknologi och Nanovetenskap.
Mobil 0730-34 62 99/e-post jan.grahm@chalmers.se.

Lycka till!

Uppgift 1.

Beräkna spänningen över resistansen R_2 som funktion av tiden.

Räkna även ut den komplexa effekt vilken R_2 mottar.

$$R_1 = 2 \, \Omega$$

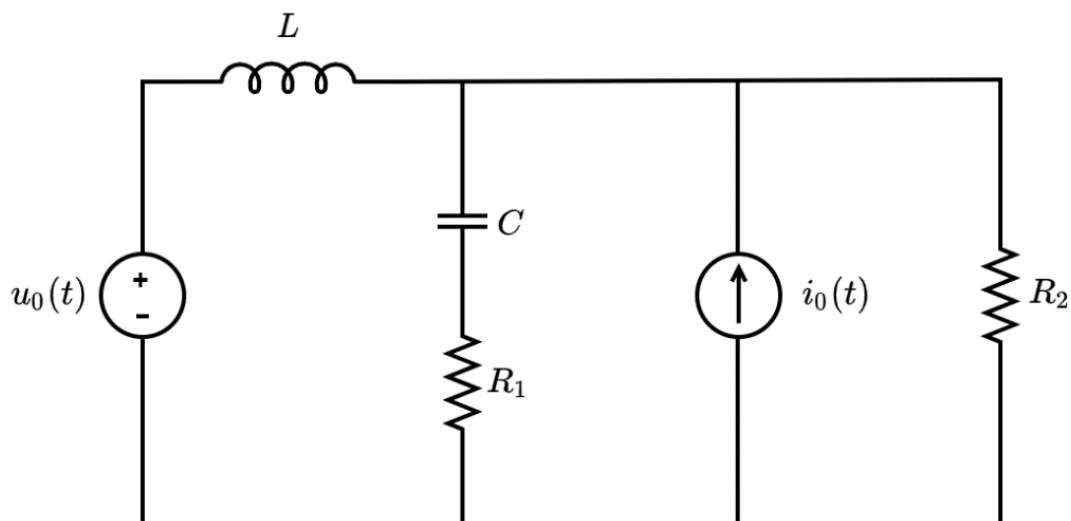
$$R_2 = 10 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \text{mF}$$

$$L = 500 \, \mu\text{H}$$

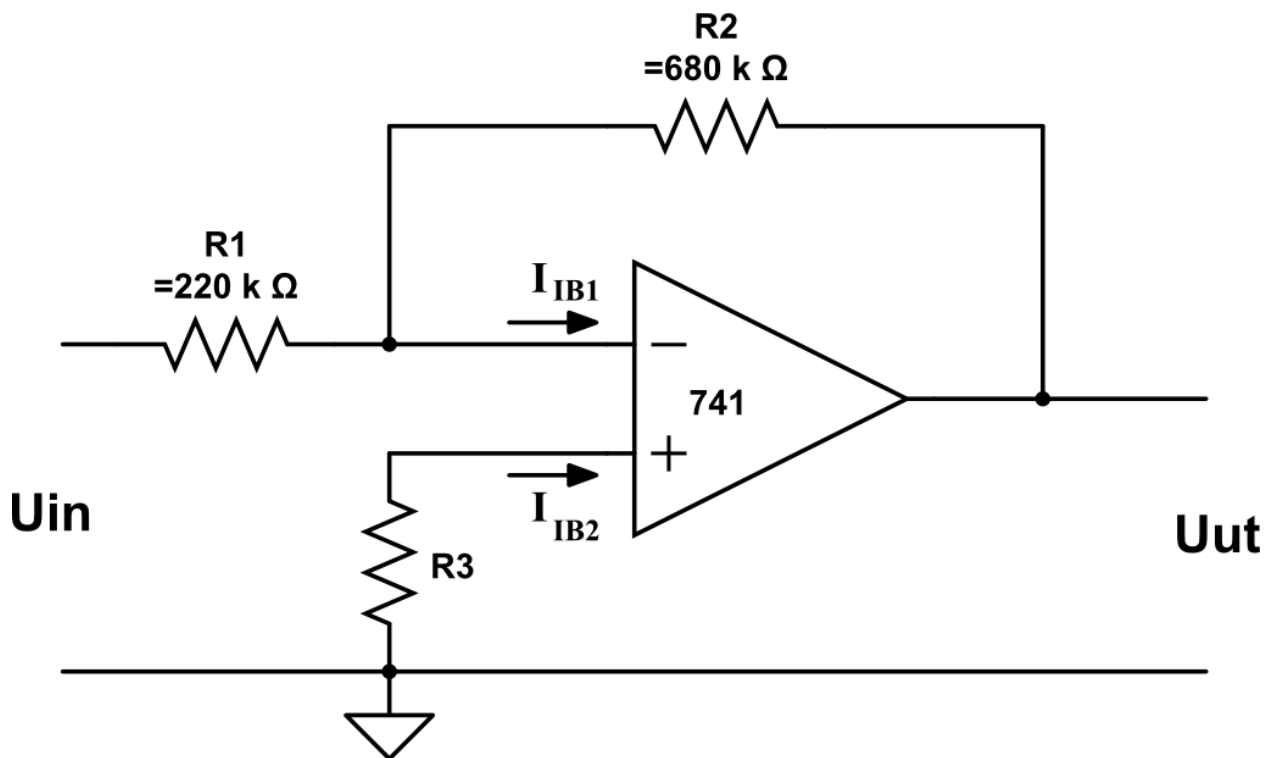
$$i_0(t) = 2\cos(4000t + 105^\circ) \, \text{A}$$

$$u_0(t) = 5\cos(4000t + 70^\circ) \, \text{V}$$



Uppgift 2.

Operationsförstärkaren 741 har förströmmar I_{IB1} och I_{IB2} på ingångarna enligt schemat. Detta ger upphov till oönskad offsetspänning på utgången. Härled och räkna ut värdet på R_3 så att offsetspänningen blir noll. Operationsförstärkaren kan antas vara balanserad på ingången, dvs $I_{IB1} \approx I_{IB2}$. För övrigt är operationsförstärkaren ideal .

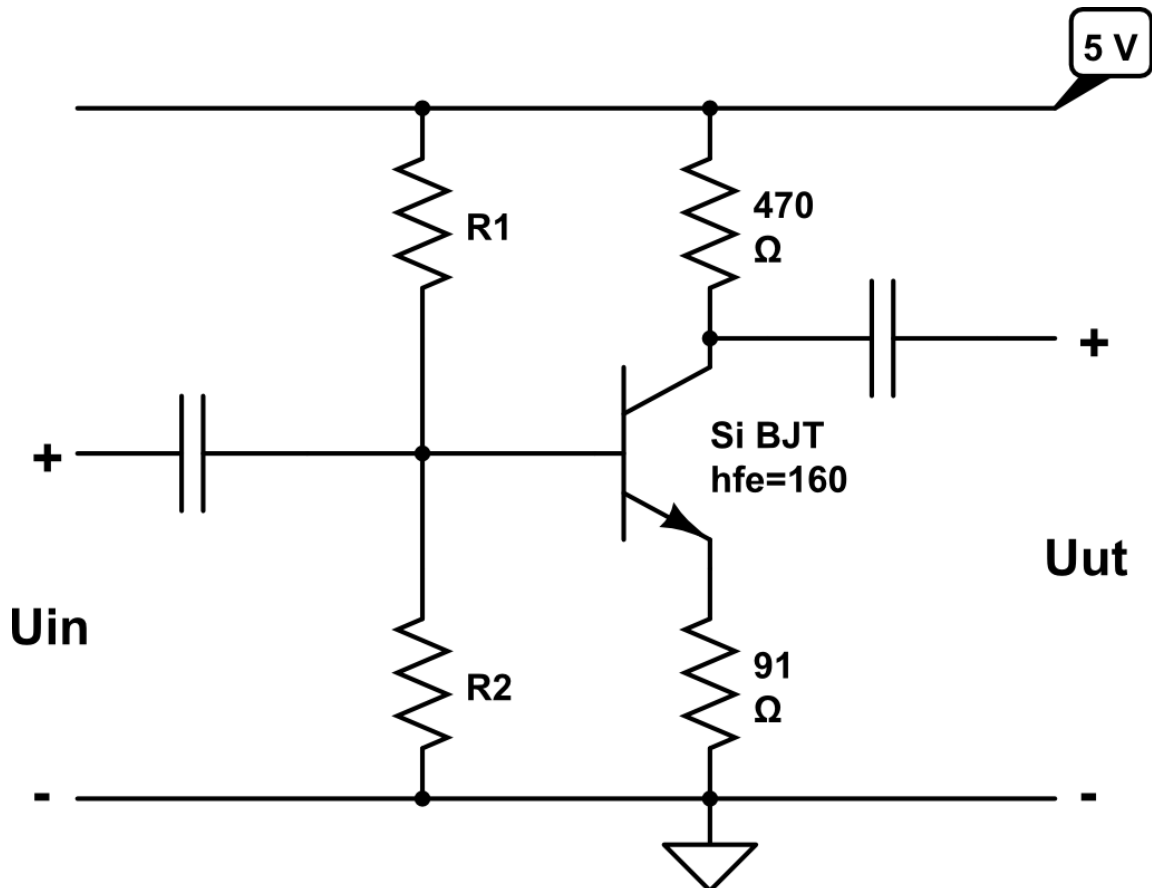


Uppgift 3.

Sök småsignalförstärkningen U_{ut}/U_{in} samt utresistans för det icke-avkopplade förstärkarsteget nedan. Givet att transistorns vilospänning $U_{CEQ} = 4.53\text{ V}$.

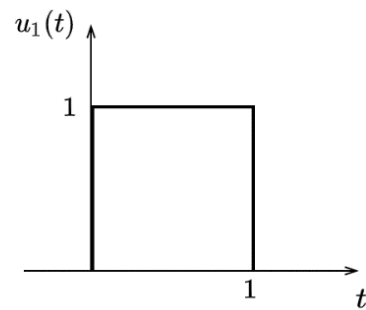
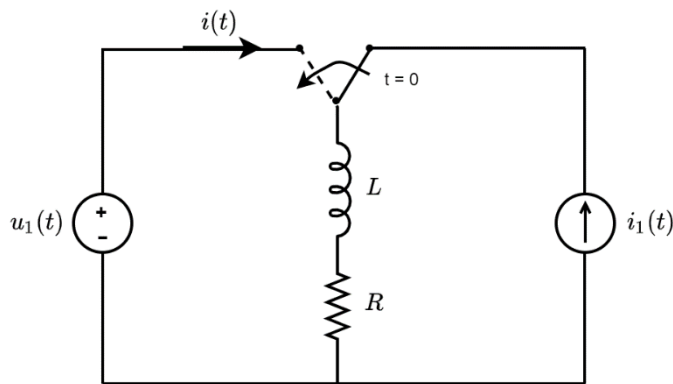
Antag transistorns basresistans är försumbar och att Earlyspänningen är hög.

Förstärkaren befinner sig vid rumstemperatur och kapacitanser i schemat kan anses stora.



Uppgift 4.

Vid tidpunkten $t = 0$ öppnas slår brytaren i kretsen om enligt pilen. Brytaren antas ha varit lång tid i det högra läget innan den slår om. Strömmen $i_1(t)$ kan antas vara konstant $i_1(t) = I_1$. Spänningen $u_1(t)$ är en enhetspuls enligt grafen. Härled ett uttryck för $i(t)$ som funktion av L , R , I_1 för $t > 0$.



Uppgift 5.

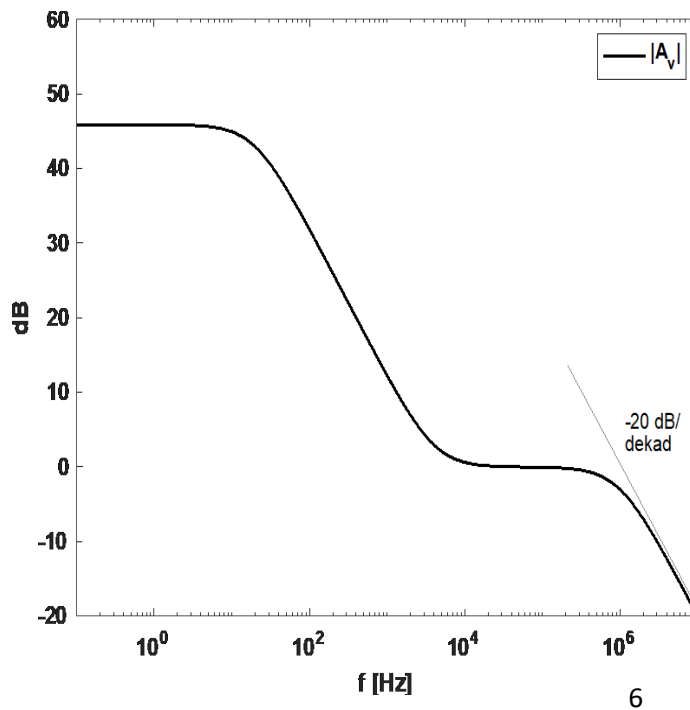
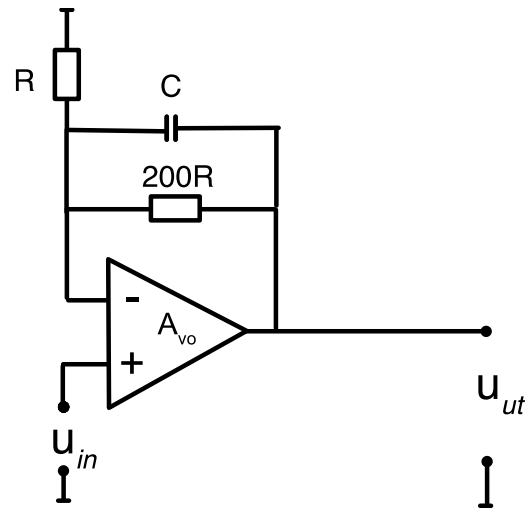
Råförstärkningen A_{v0} hos en förstärkare kan antas ha frekvensberoendet som för ett lågpassfilter dvs $A_{v0} = \frac{A_{max}}{1+j\frac{f}{f_0}}$ med brytfrekvens $f_0=100$ Hz.

Förstärkaren återkopplas sedan enligt schemat nedan och får då en resulterande förstärkning A_v enligt graf nedan.

Visa att förstärkaren är stabil oavsett värde på råförstärkningens maxamplitud A_{max} .

Vad blir fasmarginalen för förstärkarkopplingen?

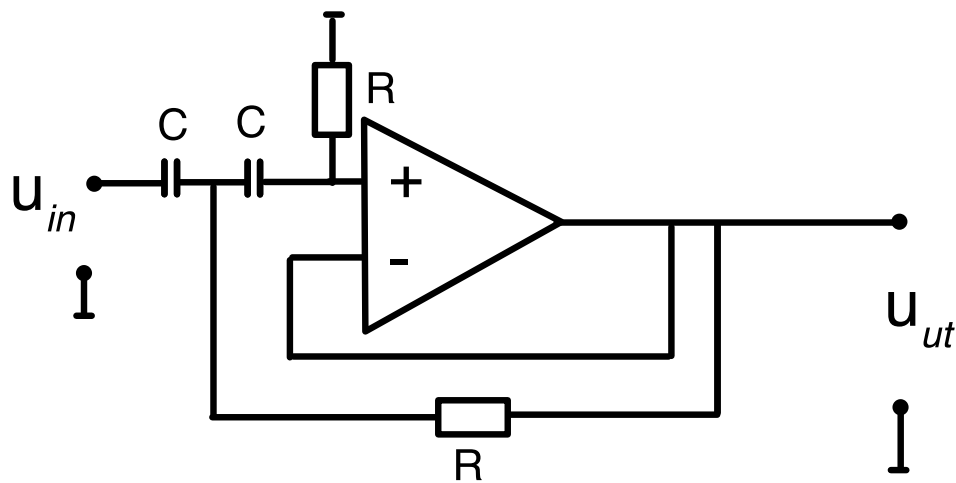
$R=500$ Ohm, $C=80$ nF



Uppgift 6.

Ett aktivt filter är uppbyggt enligt schemat nedan. Beräkna överföringsfunktionen u_{ut}/u_{in} samt bestäm vilken typ av filter det är. Beräkna gränsfrekvensen. Antag ideal operationsförstärkare.

$R=100\ \Omega$, $C=100\ \text{nF}$



Uppgift 1

Tidsvarierande ström och spänning $\rightarrow$ vi använder $j\omega$ -metoden och omvandlar strömmar, spänningar och impedanser till komplexa tal/visare.

$$U_0 = 5\angle 70^\circ \text{ V} \quad I_0 = 2\angle 105^\circ \text{ A}$$

$$Z_{R_1} = R_1 = 2 \Omega \quad Z_{R_2} = R_2 = 10 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j4000 \cdot 500 \cdot 10^{-6} = j2 \Omega \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4000 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = -j0.25 \Omega$$

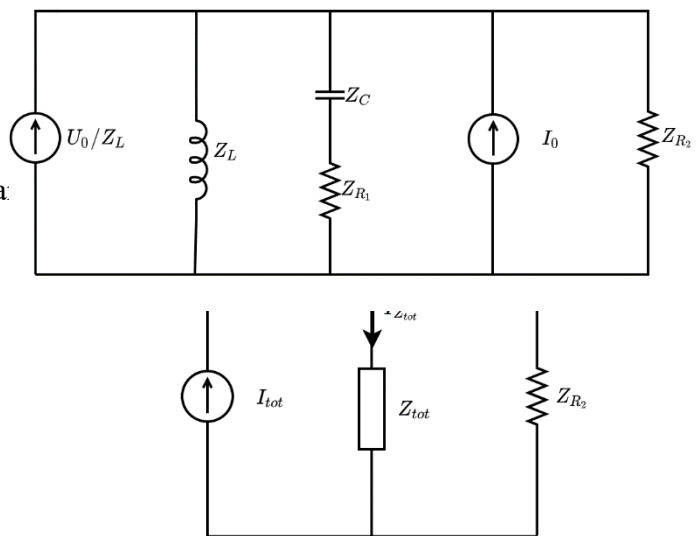
Vi vill förenkla kretsen och applicerar Thevenin $\rightarrow$ Norton omvandling på vänstra delen av kretsen. För att omvandla mellan Thevenin och Norton gäller att kortslutningströmmen kan uttryckas enligt

$$I_k = \frac{U_t}{R_0} = \frac{U_0}{Z_L} \approx 2.35 - j0.86 \text{ A}$$

Vi kan sedan slå samman impedanserna så:

$$I_{tot} = \frac{U_0}{Z_L} + I_0 \approx 1.83 + j1.08 \text{ A}$$

$$Z_{tot} = Z_L || (Z_C + Z_{R_1}) \approx 1.13 + j1.01 \Omega$$



Nu har vi en enklare krets och kan använda KVL i högra maskan samt KCL i övre noden.

$$I_{R_2} Z_{R_2} = I_{Z_{tot}} Z_{tot}$$

$$I_{R_2} + I_{Z_{tot}} = I_{tot}$$

Vi löser för I_{R_2}

$$I_{R_2} = \frac{I_{tot}}{1 + \frac{Z_{R_2}}{Z_{tot}}} \text{ A} \approx 0.29\angle 1.17^\circ \text{ A}$$

och kan uttrycka spänningen över R_2 som

$$U_{R_2} = I_{R_2} Z_{R_2} \approx 0.29\angle 1.17^\circ \cdot 10 = 2.90\angle 1.17^\circ \text{ V}$$

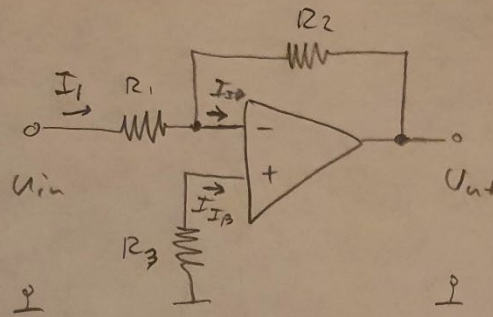
Vilket vi transformerar tillbaka till tidsdomän $u_{R_2}(t) = 2.90 \cos(4000t + 1.17^\circ) \text{ V}$

Den komplexa effekten kan vi sedan beräkna som

$$P_{R_2} = \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} Z |I|^2 \approx \frac{1}{2} 10 \cdot 0.29^2 = 0.83 \text{ W}$$

Uppgift 2

2



$$R_1 = 220 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 680 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = ?$$

Enl. problemtext $I_{IB} = I_{IB1} \approx I_{IB2}$

Sök R_3 s.t. $V_{out} = 0$ d.v. $V_{in} = 0$

Def. I_1 enl. schemat. $\Rightarrow$ spänning på ingångar:

$$\left. \begin{array}{l} V_- = -I_1 R_1 \quad , \quad V_+ = -I_{IB} R_3 \\ \text{Ideal op. amp.} \Rightarrow V_+ - V_- = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \frac{R_3}{R_1} I_{IB}$$

$V_{in} = 0$ ger:

$V_{out} = R_2 (I_{IB} - I_1) + V_+$. Insätt V_+ och $I_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{out} = I_{IB} \left(R_2 - \frac{R_2 R_3}{R_1} - R_3 \right)$$

$= 0 \text{ om}$

$$R_3 = R_2 - \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$\Downarrow$

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Svar: $R_3 = R_1 \parallel R_2 \approx 166 \text{ k}\Omega$

3.

Småsignalanalys för U_{ut}/U_{in} . $+E = 5V$
 med kapaciteter $\frac{1}{j\omega C} \approx 0$ (kortslutn.)
 Basresistans $r_b \approx 0$
 Earlyspänning V_A stor $\Rightarrow r_o \approx \infty$
 SSM blir: ($h_{fe} = 160$)

KVL $\Rightarrow$

$$\begin{cases} U_{in} = r_{\pi} I_b + R_E I_b (1 + h_{fe}) \\ U_{ut} = -h_{fe} I_b R_c \end{cases}$$

Sökta $A_v = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = - \frac{h_{fe} R_c}{r_{\pi} + R_E (1 + h_{fe})}$

$g_m = \frac{h_{fe}}{r_{\pi}}$ samt $h_{fe} \gg 1 \Rightarrow A_v \approx - \frac{R_c}{R_E + \frac{1}{g_m}}$

g_m för utsving vid spänningen $U_{CEQ} = 4,53V$.
 Sök I_{CQ} ur statisskema för vilopunkten Q:

$$\begin{cases} -E + R_C I_{CQ} + U_{CEQ} - R_E I_{EQ} = 0 \\ I_{BQ} + I_{CQ} + I_{EQ} = 0 \\ I_{CQ} = \beta_{DC} I_{BQ} \\ U_{CEQ} = E - R_C I_{CQ} - R_E I_{EQ} \left(1 + \frac{1}{\beta_{DC}}\right) \\ \quad \quad \quad = 1 + \beta_{DC} \approx h_{fe} \end{cases}$$

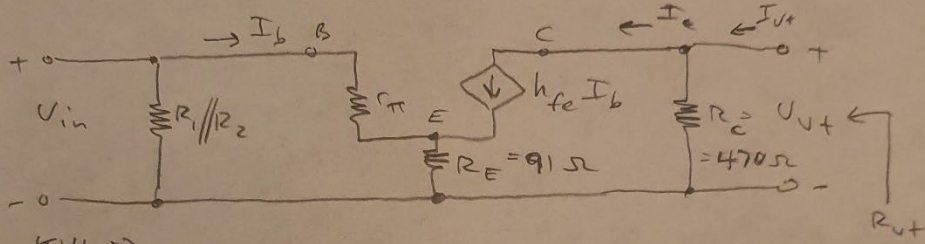
$I_{CQ} = \frac{E - U_{CEQ}}{R_C + R_E} = 0,84 \text{ mA}$

Småsignalanalys för U_{ut}/U_{in} . $+E = 5V$

Basresistenz $r_b \approx 0$

Early spinning v_A star $\Rightarrow r_0 \approx \infty$

SSM blir : ($h_{fe} = 160$)



KVL $\Rightarrow$

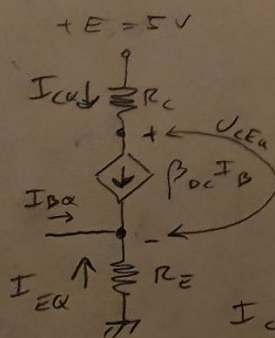
$$\begin{cases} V_{in} = r_{\pi} I_b + R_E I_b (1 + h_{fe}) \\ V_{out} = -h_{fe} I_b R_c \end{cases}$$

$$\text{Sollte } A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} = - \frac{h_{fe} R_c}{r_{\pi} + R_E (1 + h_{fe})}$$

$$g_m = \frac{h_{fe}}{r_{\pi}} \quad \text{schnt } h_{fe} \gg 1 \Rightarrow A_v \approx - \frac{R_c}{R_E + \frac{1}{g_m}}$$

g_m für die sich die Umlaufspannungen $U_{CEA} = 4,53 \text{ V}$

Sei I_{ca} ein stochastischer Prozess für Aktienkurs A :



$$\begin{aligned} -E + R_c I_{CQ} + U_{CEQ} - R_E I_{EQ} &= 0 \\ I_{BQ} + I_{CQ} + I_{EQ} &= 0 \\ I &= \beta I_{BQ} \end{aligned}$$

I	CQ	DC	PQ
-----	------	------	------

$$V_{CEQ} = E - R_c I_{CQ} - R_E I_{EQ} \left(1 + \frac{1}{\beta_{DC}} \right)$$

$$I_{CQ} = \frac{E - V_{CEQ}}{R_C + R_E} = 0.84 \text{ mA}$$

② förb.

$$\text{För } g_m = \frac{I_{CQ}}{V_T} \approx 32.4 \text{ mA/V}$$

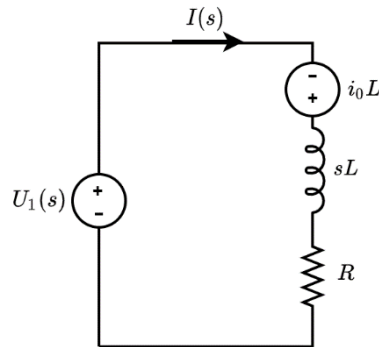
($V_T = 25.9 \text{ mV}$ vid rumtemp. $T = 300 \text{ K}$)

$$\text{Sökte } A_v = - \frac{470}{91 + \frac{1}{32.4 \cdot 10^{-3}}} \approx \underline{\underline{-3.86}}$$

$$\underline{\underline{Utresistans}} = \left. \frac{V_{vt}}{I_{vt}} \right|_{v_{in} \text{ hålls tilld}} = R_c = \underline{\underline{470 \Omega}}$$

Uppgift 4

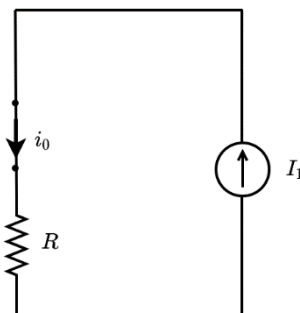
Då $t < 0$ kommer det gå en ström i den högre slingan men inte i den vänstra. Strömmen i högra slingan kommer att ladda upp energi i spolen. För $t > 0$ kommer det inte längre gå någon ström i högra delen av kretsen men i vänstra p.g.a. enhetspulsen samt den uppladdade spolen. Vi kan laplacetransformera kretsen för $t > 0$.



Vi uttrycker strömmen $I(s)$ genom att göra en KVL i maskan

$$\begin{aligned} -U_1(s) - i_0L + I(s)sL + I(s)R &= 0 \\ \rightarrow I(s) &= \frac{U_1(s) + i_0L}{sL + R} \end{aligned}$$

Vi ser att vi behöver $U_1(s)$ och i_0 . Strömmen i_0 får vi genom att kolla på högra delen av kretsen för $t = 0$, precis innan brytaren slår över. För likström agerar induktorn som en kortslutning men laddas ändå upp av den strömmen som går genom den, vilket vi direkt ur kretsen nedan kan se fås som $i_0 = I_1$.



För att hitta $U_1(s)$ behöver vi uttrycka $u_1(t)$ från grafen och sen laplacetransformera. Detta kan vi göra med hjälp av två stegfunktioner enligt

$$u_1(t) = \Theta(t) - \Theta(t - 1)$$

Vilket har laplacetransformen

$$U_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

Detta stoppar vi nu in i uttrycket för $I(s)$ och försöker skriva om det tills vi hittar kända uttryck som vi kan invers laplacetransformera tillbaka till tidsdomän.

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + I_1 L}{sL + R} \\
&= \frac{1}{s(sL + R)} - \frac{e^{-s}}{s(sL + R)} + \frac{I_1 L}{sL + R} \\
&= \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} - \frac{1}{L} \cdot \frac{e^{-s}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} + \frac{I_1}{s + \frac{R}{L}}
\end{aligned}$$

Använd kända laplacetransformer

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}, a = \frac{R}{L}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}(1 - e^{-at})\right\} = \frac{1}{s(s+a)}, a = \frac{R}{L}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = e^{-bs}F(s), b = 1$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(e^{-\frac{(t-1)R}{L}} - e^{-\frac{tR}{L}} \right) + I_1 e^{-\frac{tR}{L}} \text{ A}$$

Vi kollar så att svaret är rimligt

1. Enheter: tredje termen har enhet ampere, vilket är rimligt. Första termen ser ut att ha enhet resistans, men vi får påminna oss om att vi räknat med en enhetspuls med värdet 1, hade vi istället satt amplituden av enhetspulsen till någon konstant, säg U_0 , hade den termen följt med hela vägen och multiplicerat med de två första termerna och vi hade fått enheten ampere även där.
2. Strömmen i extremvärdena på t :

$$t = 0: i(t) = I_1 + R e^{\frac{L}{R}} \text{ A}$$

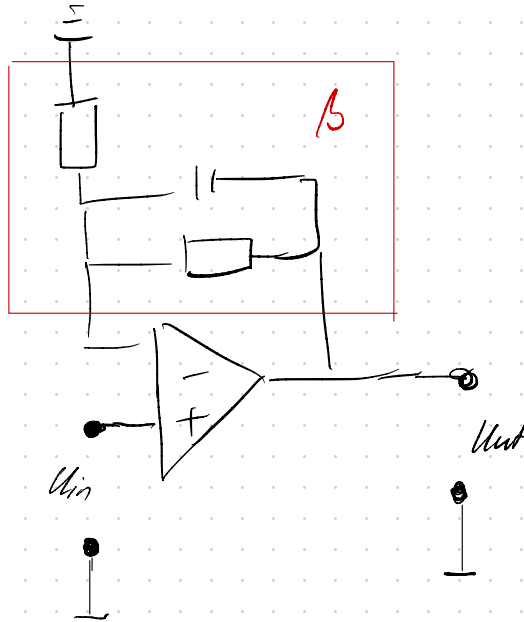
Rimligt! Vi har effekten av den uppladdade spolen samt börjar precis få effekt av enhetspulsen.

$$t \rightarrow \infty: i(t) \rightarrow 0 \text{ A}$$

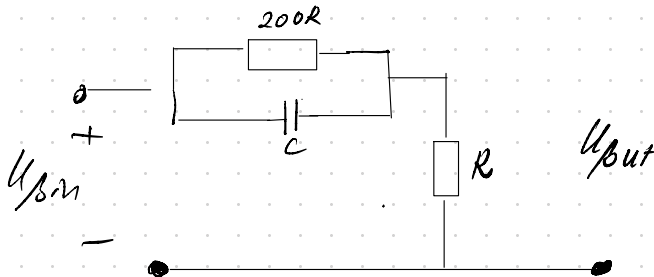
Rimligt! Då lång(oändlig) tid har gått bör strömmen ha dött ut då ingen av källorna längre bidrar.

Prob 3

β ges an den Startkopplade kreuen



$$\beta = \frac{U_{out}}{U_{in}}$$



$$\Rightarrow \beta = \frac{R}{R + 200R // \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R + \frac{200R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{200R + \frac{1}{j\omega C}}} = \left[\begin{array}{l} \text{multiplizieren} \\ \text{\& f\ddot{u}hren} \\ \text{mit} \\ j\omega C (200R + \frac{1}{j\omega C}) \end{array} \right]$$

$$= \frac{R j\omega C (200R + \frac{1}{j\omega C})}{j\omega C R (200R + \frac{1}{j\omega C}) + 200R} = \frac{R (1 + j\omega C 200R)}{j\omega C R^2 200 + 200R}$$

$$\frac{R(1+j\omega C \cdot 200R)}{j\omega C R^2 \cdot 200 + 200R} = \frac{R(1+j\omega \cdot 200RC)}{200R \left(j + \frac{\omega C 200R^2}{1/20R} \right)}$$

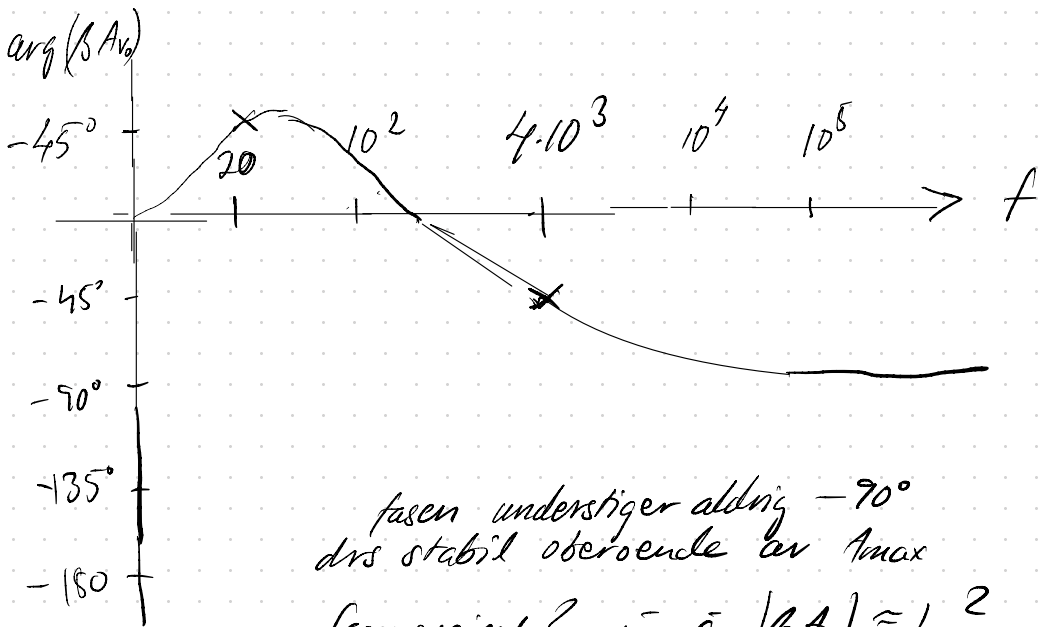
det försvanccrande filter där $\beta \rightarrow 1$ då $f \rightarrow f_2$

med $f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 200RC} = 20 \text{ Hz}$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi RC} = 4 \text{ kHz}$$

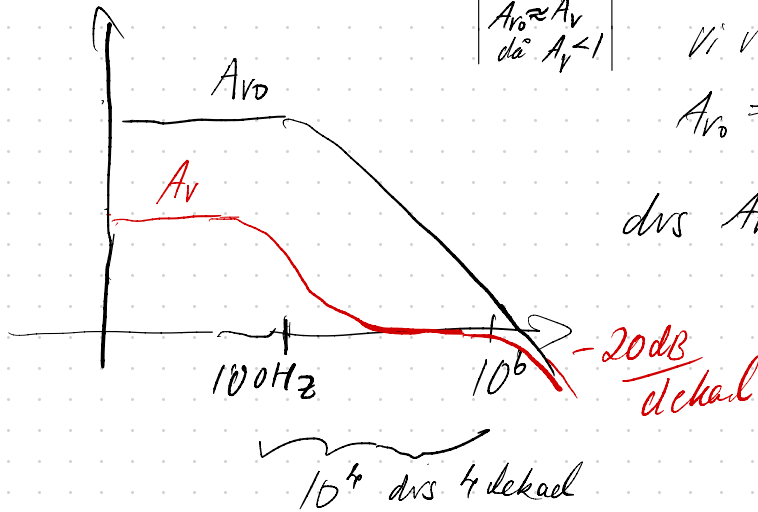
$$\beta A_{v_o} = \underbrace{\frac{A_{max}}{1+j\frac{f}{f_1}}}_{-90} \cdot \frac{1}{201} \cdot \underbrace{\frac{1+j\frac{f}{f_1}}{1+j\frac{f}{f_2}}}_{-90}$$

$f_1 = 100 \text{ Hz}$
 $f_2 = 20 \text{ Hz}$
 $f_2 = 4 \cdot \text{kHz}$



fasen understiger aldrig -90°
 det stabil oberoende av A_{max}
 fasmargin? när är $|\beta A_{v_o}| \approx 1$?

grafen ger $A_v = \frac{A_{v0}}{1 + \beta A_{v0}} = \begin{cases} \text{för} \\ f \gg f_2 \\ \beta \approx 1 \\ \& \\ A_{v0} \approx A_v \\ \text{då } A_v < 1 \end{cases} = A_{v0} \text{ då } A_v < 1$



Vi vet också att

$$A_{v0} = \frac{A_{\max}}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

dvs A_{v0} avtar med -20dB/decade efter $f_0 = 10^6\text{Hz}$

analysen ovan ger oss att $\beta A_{v0} \approx A_{v0} \approx A_v$ då $A_v \ll 1$

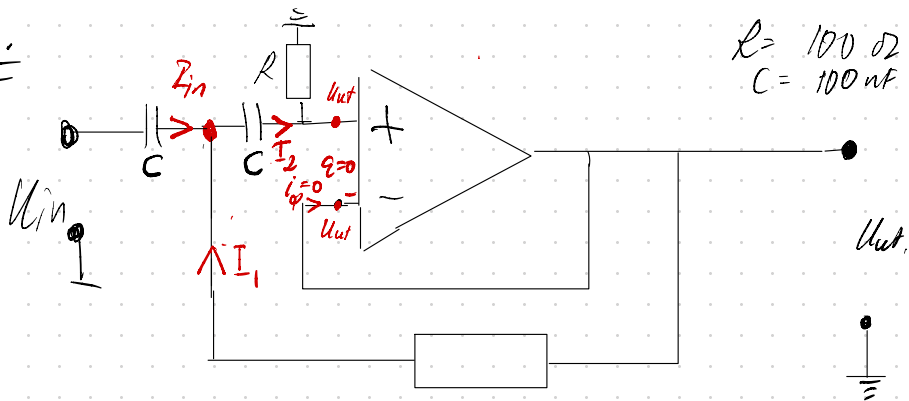
dvs $|\beta A_{v0}| = 1$ vid $f = 10^6$

vi kan räkna ut att $A_{\max} = 20\text{dB} \times 4 = 80\text{dB}$

Vid frekvensen $f = 10^6$ är fäsen $\approx -90^\circ$ från fasgrafen

dvs fasmarginalen $\phi_m = 180 - 90 = 90^\circ$

6.



$$I_{in} + I_1 = I_2 \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U_{out}}{R} \quad (2)$$

$$\frac{U_{in} - U_0}{1/sC} = I_{in} \quad (3)$$

$$\frac{U_0 - U_{out}}{1/sC} = I_2 \quad (4)$$

$$\frac{U_{out} - U_0}{R} = I_1 \quad (5)$$

(4) & (2) ger

$$\frac{U_{out}}{R} = (U_0 - U_{out}) \cdot sC$$

$$\Rightarrow U_{out} \left(\frac{1}{sCR} + 1 \right) = U_0 \quad (6)$$

(1) + (3) + (4) + (5) ger

$$sC(U_{in} - U_0) + \frac{(U_{out} - U_0)}{R} = (U_0 - U_{out})sC$$

$$sC U_{in} - sC U_0 + \frac{U_{out}}{R} - \frac{U_0}{R} = U_0 sC - U_{out} sC$$

$$sC U_{in} = 2sC U_0 + \frac{1}{R} U_0 - \frac{U_{out}}{R} - U_{out} sC$$

$$sC U_{in} = \left(2sC + \frac{1}{R} \right) U_0 - \frac{U_{out}}{R} - U_{out} sC \quad \text{f  tt m (6)}$$

$$sC U_{in} = \left(2sC + \frac{1}{R} \right) U_{out} \left(1 + \frac{1}{sCR} \right) - \frac{U_{out}}{R} - U_{out} sC$$

$$sC U_{in} = \left(2sC + \frac{2}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sCR^2} - \frac{1}{R} - sC \right) U_{out}$$

$$sC U_{in} = \left(sC + \frac{2}{R} + \frac{1}{sCR^2} \right) U_{out}$$

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{sC}{sC + \frac{2}{R} + \frac{1}{sCR^2}} \cdot \frac{sCR^2}{sCR^2} = \frac{(sCR)^2}{(sCR)^2 + 2sCR + 1} = \frac{(sCR)^2}{(sCR + 1)^2}$$

vilket ger ett hogpassfilter med brytfrekvens - $f = \frac{1}{2\pi RC} = 16 \text{ kHz}$