

Tentamen ESS116

Elektriska Nät och System F2

Examinator: Jan V. Grahm

Måndag 10 januari 2022 kl. 14.00-18.00

Salstentamen enligt Chalmers beslut ht 2021

Tentamen omfattar sex beräkningsuppgifter. Fullständiga beräkningar måste redovisas. Korrekt och välmotiverad lösning med svar ger maximalt 3 poäng (p).

Ange uppgiftsnummer och personlig kod överst på varje papper, Skriv endast på ena sidan av papperet. Blanda aldrig olika uppgifter på samma sida.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmersgodkänd räknare
- Physics Handbook
- Beta Mathematics Handbook
- Kompletterande formelsamling Kretselektronik ESS116 ht 2021

För godkänt krävs 8 p.

Betygsgränser: Minst 8 p ger betyg 3, minst 12 p betyg 4 och minst 15 p betyg 5. Poäng inkluderar eventuell bonus från duggan ht 2021.

Resultat meddelas via kursens hemsida i Canvas.

Förfrågningar: Examinator Jan Grahm, Mikroteknologi o Nanovetenskap.
Mobil 0730-34 62 99/e-post jan.grahm@chalmers.se.

Lycka till!

Uppgift 1.

För nätet nedan, ta fram Thevénins ekvivalenta tvåpol med avseende på noderna A och B.

Beräkna även lasten $Z_{LOAD} = R + jX$ för tvåpolen (dvs mellan A och B) så att den aktiva effekten i Z_{LOAD} maximeras.

Data för nätet:

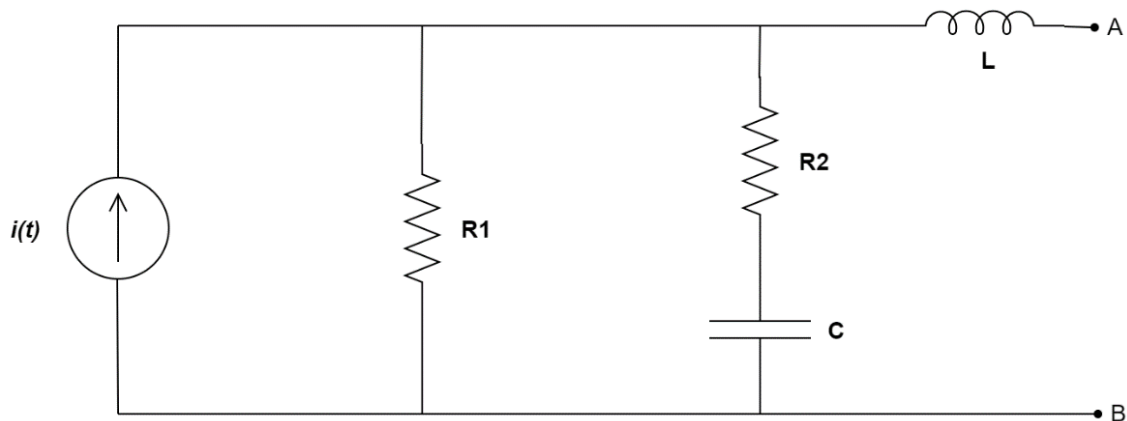
$$R_1 = 2 \, \Omega$$

$$R_2 = 100 \, \Omega$$

$$C = 0.1 \, nF$$

$$L = 1 \, nH$$

$$i(t) = 5 \cdot \cos(200 \cdot 10^6 t + 30^\circ) \, A$$



Uppgift 2.

Vid tidpunkten $t = 0$ öppnas brytaren i vänstra maskan samtidigt som brytaren i högra maskan stängs. Spänningskällorna har varit på lång tid före $t = 0$.

Vad är spänningen över R_2 vid $t = 1 \text{ ms}$?

Data för nätet:

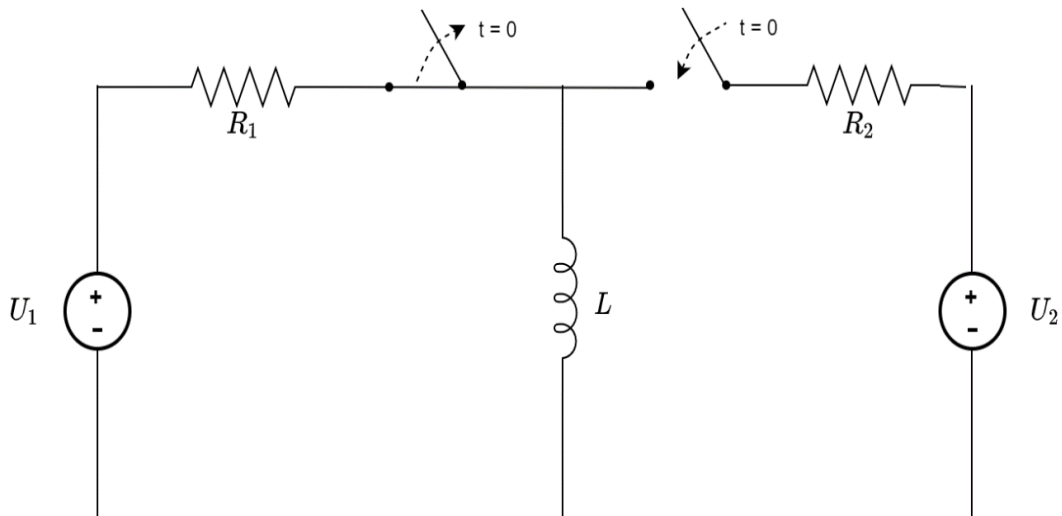
$$U_1 = 1 \text{ V}$$

$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ } \Omega$$

$$L = 2 \text{ mH}$$



Uppgift 3.

Beräkna överföringsfunktionen till förstärkarkretsen nedan.

Vilket typ av filter har realiserats?

Vad är gränsfrekvensen samt maximala förstärkningen?

Antag ideal operationsförstärkare.

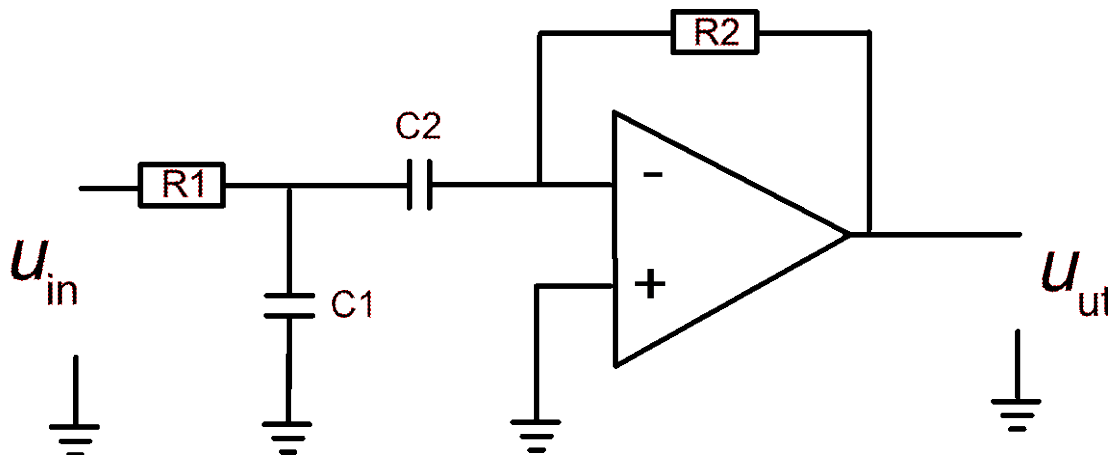
Data för nätet:

$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$C_1 = 4 \text{ nF}$$

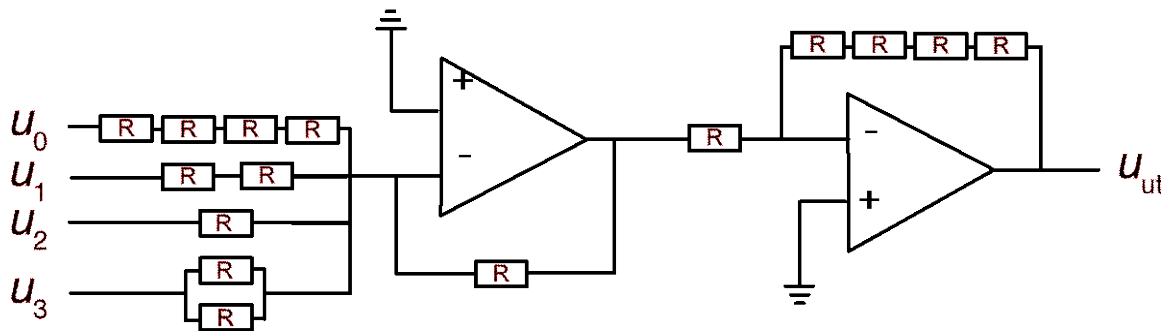
$$C_2 = 1 \text{ nF}$$



Uppgift 4.

Kretsen nedan är en förenklad D/A omvandlare som översätter den binära sekvens $u_3u_2u_1u_0$ till motsvarande analoga värde på utgången U_{ut} . Bevisa att detta stämmer.

Op-amparna kan antas vara ideala. En spänning 1 V för ingång u_n motsvarar binär etta.



Uppgift 5.

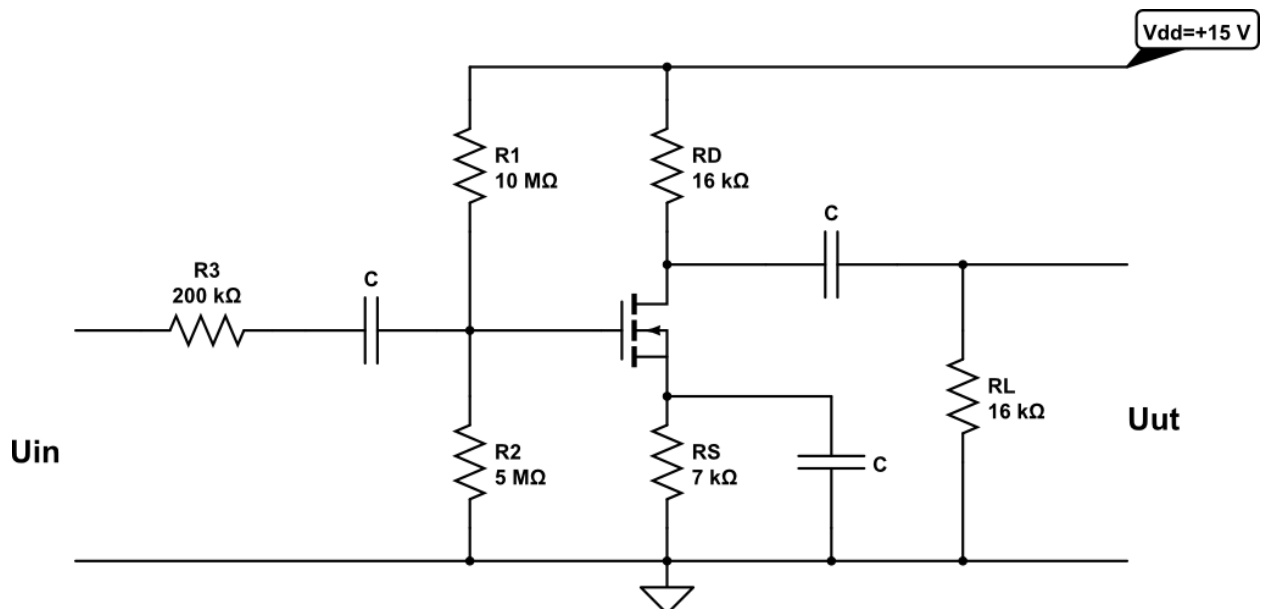
Betrakta den diskreta MOSFET förstärkarkopplingen nedan. På ingången har vi signalgeneratoren U_{in} med resistansen $R3$ och på utgången lastresistansen R_L . Alla kapacitanser i nätet kan betraktas som stora.

Visa med storsignalanalys att transistorns arbetspunkt blir $U_{GSQ} = 1.50$ V, $U_{DSQ} = 3.50$ V och $I_{DQ} = 0.50$ mA. Verifiera även att transistoren arbetar som förstärkare!

MOSFET data:

Tröskelspänning = 1.00 V

Transkonduktansparameter $k = \mu_n C_{ox} W/L = 4.00$ mA/V²



Uppgift 6.

Betrakta nätet och data i uppgift 5 ovan.

Beräkna MOSFETens transkonduktans och utresistans om dess Earlyspänning $U_A=100$ V.

Beräkna förstärkningen U_{ut}/U_{in} med småsignalanalys.

Uppgift 1

1. jw-transformera kretsen

Strömmen på rektangulär form blir $I = 5 \left(\cos(30^\circ) + j \cdot \sin(30^\circ) \right) = 4.33 + j2.5 \text{ A}$

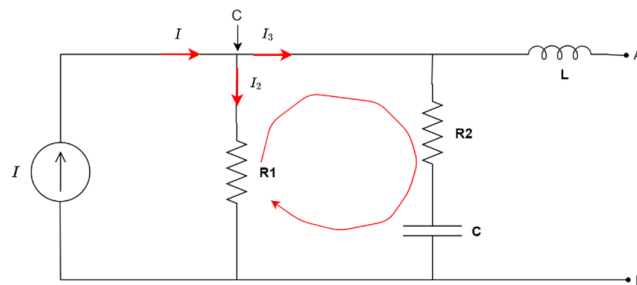
Impedanserna fås som $Z_1 = R_1 = 2 \Omega$, $Z_2 = R_2 = 100 \Omega$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j200 \cdot 10^6 \cdot 0.1 \cdot 10^{-9}} = -j50 \Omega, \quad Z_L = j\omega L = j200 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-9} = j0.2 \Omega$$

2. Hitta R_0 genom att nollställa alla källor och hitta ingångsimpedansen

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_L + Z_1 || (Z_2 + Z_C) \\ &= Z_L + \frac{Z_1(Z_2 + Z_C)}{Z_1 + Z_2 + Z_C} \\ &= \frac{Z_L(Z_1 + Z_2 + Z_C) + Z_1(Z_2 + Z_C)}{Z_1 + Z_2 + Z_C} \\ &= \frac{j0.2(2+100+(-j50)) + 2(100+(-j50))}{2+100+(-j50)} = 1.97 + j0.18 \Omega \end{aligned}$$

3. Vi hittar tomgångsspänningen $U_{AB} = U_t$ genom KCL i nod C och KVL i mellersta maskan



$$\text{KCL: } I_3 = I - I_2$$

$$\text{KVL: } I_3(Z_2 + Z_C) - I_2 Z_1 = 0$$

Två ekvationer och två obekanta $\rightarrow$ kan lösa för I_3 och I_2

$$I_2 = I - I_3$$

$$I_2 = I_3 \frac{Z_2 + Z_C}{Z_1}$$

$$I - I_3 = I_3 \frac{Z_2 + Z_C}{Z_1}$$

$$I_3 = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_C} = 0.08 + j0.98$$

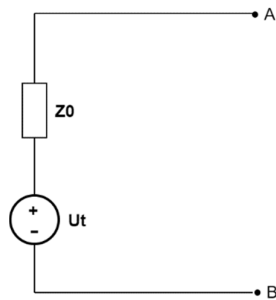
Sen kan vi uttrycka tomgångsspänningen som

$$U_t = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) I_3 = 8.56 + j4.85 \text{ V}$$

Som vi kan transformera tillbaka till tidsdomän som

$$u_t(t) = 9.84 \cos(200 \cdot 10^6 t + 29.55^\circ) \text{ V}$$

Vilket ger tvåpolen



Maximal aktiv effekt i lasten fås då $Z_{LOAD} = Z_0^*$

$$Z_0^* = (1.96 + j0.18)^* = R + jX = 1.96 - j0.18$$

$$X = -0.18$$

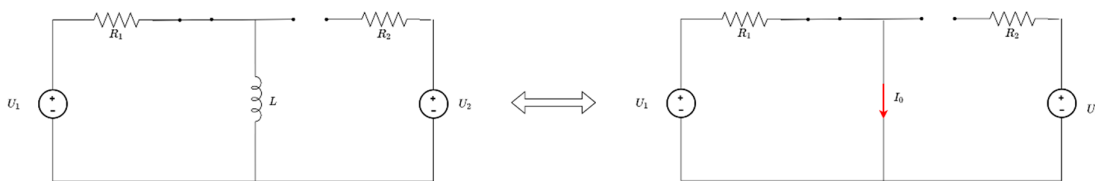
$$R = 1.96$$

Uppgift 2

Vi vill Laplacetransformera kretsen för $t \geq 0$, men vi kommer ha en begynnelseenergi i induktansen, då den laddats upp av strömmen som går ut ur U_1 för $t < 0$. Laplacetransformen av spänningen över en induktans med begynnelseenergi ges av

$$U_L(s) = sLI(s) - I_0L$$

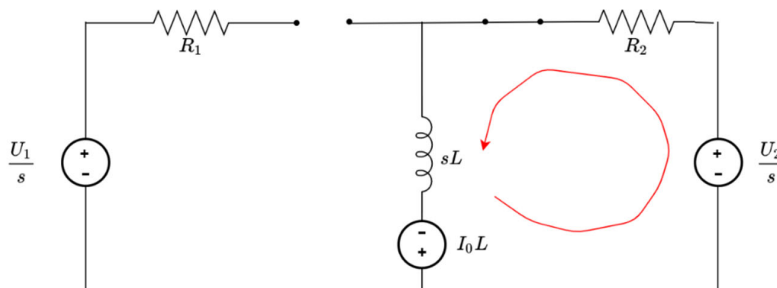
Där I_0 är strömmen genom induktansen precis innan brytarna ändras vid $t = 0$. Begynnelseenergin kan vi modellera som en spänningskälla med spänningen I_0L , och vi behöver således räkna ut strömmen som går genom induktansen innan brytarna ändrar läge. Vi har då en likström genom vänstra maskan och ingen ström genom högra maskan, och för likström kommer induktansen agera som en kortslutning. Vi kan räkna ut I_0 med KVL.



$$\text{KVL: } -U_1 + R_1I_0 = 0$$

$$\rightarrow I_0 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ A}$$

Sen kan vi Laplacetransformera kretsen för $t \geq 0$



Eftersom brytaren i vänstra maskan nu kommer vara öppen kommer det inte gå någon ström i den, och vi kan göra KVL i högra slingan för att hitta $I(s)$

$$\text{KVL: } \frac{-U_2}{s} + R_2I(s) + sLI(s) - I_0L = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I(s) &= \frac{\frac{U_2}{s} + I_0L}{sL + R_2} \\ &= \frac{U_2}{s(sL + R_2)} + \frac{I_0L}{sL + R_2} \\ &= \frac{1}{L} \cdot \frac{U_2}{s\left(s + \frac{R_2}{L}\right)} + \frac{I_0}{s + \frac{R_2}{L}} \end{aligned}$$

Spänningen över R_2 ges som

$$U_{R2}(s) = R_2 I(s) = \frac{R_2}{L} \cdot \frac{U_2}{s \left(s + \frac{R_2}{L} \right)} + R_2 \cdot \frac{I_0}{s + \frac{R_2}{L}}$$

Vi söker spänningen över R_2 vid $t = 1$ ms så vi vill inverstransformera tillbaka till tidsdomän

$$u_{R2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_{R2}(s)\}$$

Nu kan vi kolla våra tabeller över Laplacetransformera och känna igen

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}(1 - e^{-at})\right\} = \frac{1}{s(s+a)}$$

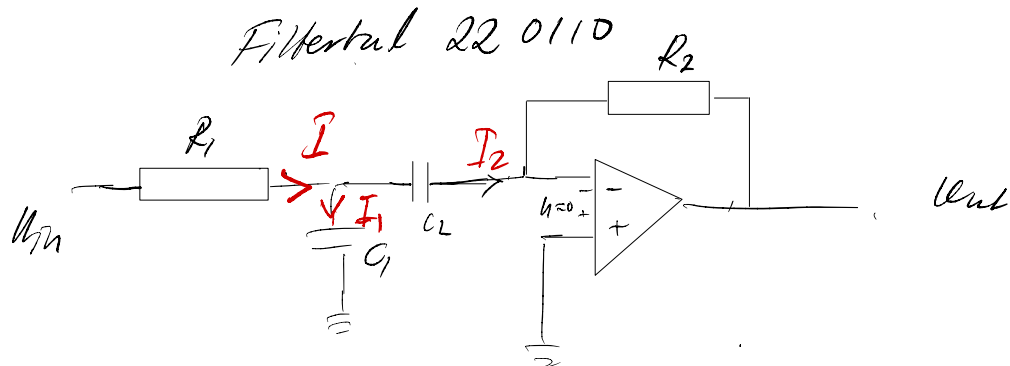
Eftersom Laplacetransformen är linjär kan vi ta den för varje term separat

$$u_{R2}(t) = U_2(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}) + R_2 I_0 e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

Sätter vi in $I_0 = 0.1$ A, $R_2 = 2$ Ω , $U_2 = 3$ V, $L = 2$ mH, $t = 1$ ms får vi

$$u_{R2}(t = 1 \text{ ms}) = 3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} 1 \cdot 10^{-3}}\right) + 2 \cdot 0.1 e^{-\frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} 1 \cdot 10^{-3}} = 1.97 \text{ V}$$

Uppgift 3



$$I = \frac{u_{in}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \parallel \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{u_{in}}{R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}} =$$

$$= \frac{u_{in}}{R_1 + \frac{1}{j\omega(C_1+C_2)}}$$

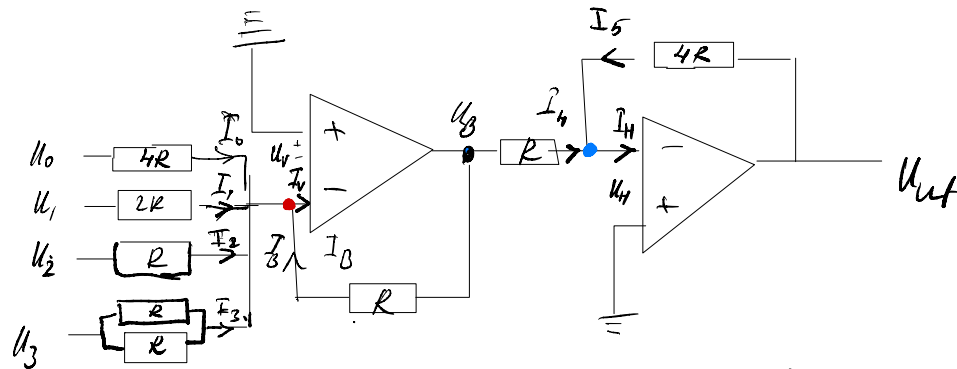
$$I_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot I = \frac{j\omega C_2}{j\omega(C_1+C_2)} \cdot \frac{u_{in}}{R_1 + \frac{1}{j\omega(C_1+C_2)}}$$

$$\frac{j\omega C_2 u_{in}}{j\omega R_1(C_1+C_2) + 1}$$

$$I_2 = - \frac{u_{out}}{R_2} \Rightarrow \frac{u_{out}}{u_{in}} = - \frac{R_2 j\omega C_2}{j\omega R_1(C_1+C_2) + 1}$$

HP-filter gränsfrekvens $f = \frac{1}{2\pi R_1(C_1+C_2)} \approx 320 \text{ Hz}$, $\frac{u_{out}}{u_{in}} = 2$

Uppgift 4



ideala op-ampar $I_v, I_H = 0$ ty $R_{in} = \infty$
 samt eftersom neg. återkoppling $\Rightarrow u_v, u_H \approx 0$

KCL i • ger då

$$\frac{u_0}{4R} + \frac{u_1}{2R} + \frac{u_2}{R} + \frac{2u_3}{R} + \frac{u_3}{R} = 0 \quad (1)$$

KCL i • ger pss

$$\frac{u_3}{R} + \frac{u_{ut}}{4R} = 0 \Rightarrow 4u_3 = -u_{ut} \quad (2)$$

(1) & (2) ger förhållandet mellan $u_0, \dots, u_3$ samt u_{ut}

$$8u_3 + 4u_2 + 2u_1 + u_0 = u_{ut}$$

Ov f.ex. binära talet 1010 (11)

ger $8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 11$ stämmer?

Uppgift 5

5. Störspänning/nät med C som avbrytt:
NMOSFET i CS-koppling.
Definiera I_D , V_G , V_{GS} , V_{DS} ($I_G = 0$)
Sök arbetspunkter V_{GSQ} , V_{DSQ} , I_{DQ}

Given: $V_{DD} = +15V$
Circuit diagram: A common-source NMOSFET circuit. The gate is connected to a voltage divider consisting of resistors R_1 and R_2 connected to V_{DD} and ground respectively. The gate voltage is V_G . The source is connected to ground through a resistor R_S . The drain is connected to V_{DD} through a resistor R_D . The drain current is I_D . The gate-source voltage is V_{GS} and the drain-source voltage is V_{DS} .

Given: $V_T = 1.00V$
NMOSFET: $k = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} = 4.00 \frac{mA}{V^2}$

Visa att $V_{GSQ} = 1.50V$, $V_{DSQ} = 3.50V$
 $I_{DQ} = 0.50mA$

Sök först V_{GS} ! Nätet $\Rightarrow$
 $\Rightarrow V_{GS} = V_G - R_S I_D$ (*)

V_G för en spänningsdelning: $V_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD} = 5V$

I_D : Antag att MOSFET arbetar i mättnad $\Rightarrow$
 $\Rightarrow I_D = \mu_n C_{ox} \frac{W}{2L} (V_{GS} - V_T)^2 = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2$

Insätt i (*) $\Rightarrow V_{GS} = V_G - \frac{k}{2} R_S (V_{GS} - V_T)^2$

För $\frac{k}{2} R_S V_{GS}^2 + (1 - k R_S) V_{GS} + (\frac{k}{2} R_S V_T^2 - V_G) = 0$

Num. $\Rightarrow 14 V_{GS}^2 - 27 V_{GS} + 9 = 0$

Lösning $\Rightarrow V_{GS} = 0.9643 \pm 0.5357 = \begin{cases} 1.50V \\ 0.43V \end{cases}$

Veck: $V_{GS} > V_T \Rightarrow V_{GSQ} = 1.50V \Rightarrow$
 $\Rightarrow I_{DQ} = \frac{k}{2} (V_{GSQ} - V_T)^2 = 0.50mA$

Ur nätet: $V_{DSQ} = V_{DD} - I_{DQ} (R_D + R_S) = (num.) =$
 $= 15 - 0.50(16 + 7) = 3.50V \geq V_{GSQ} - V_T = 0.50V$ dvs
MOSFET arbetar som förutsett! (Mättnadslösning). $\square$

Uppgift 6

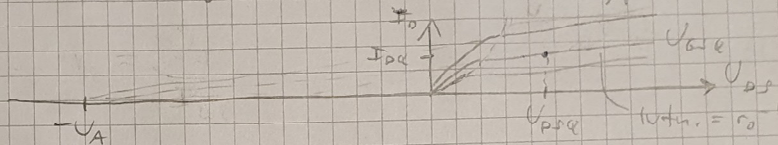
6. Nät och numeriska data från 5

(a) MOSFET transkonduktans i arbetspunkt Q:

$$FS \Rightarrow g_m = \left. \frac{\partial I_D}{\partial V_{gs}} \right|_Q = k (V_{gsQ} - V_T) = (2 \mu A/V^2)$$

$$= 4,00 \frac{mA}{V^2} \cdot 0,50 V = \underline{2,00 \mu S}$$

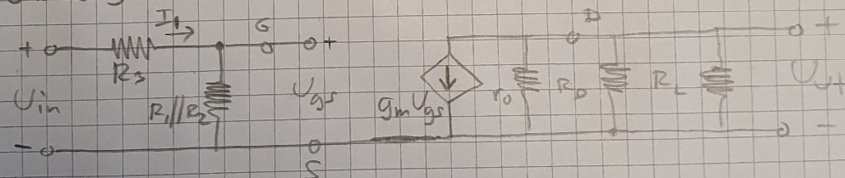
Utrenitans r_o och samband med V_A :



dvs $\frac{1}{r_o} \approx \frac{I_{DQ}}{V_A}$ ty $V_A \gg V_{DSQ} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_o = \frac{V_A}{I_{DQ}} \approx 200 \text{ k}\Omega$

Småsignalschema med C som kortslutning:



KVL vänstra nätet: $-V_{in} + I_1 R_3 + I_1 (R_1 // R_2) = 0$
 Eliminera I_1 : $V_{gs} = I_1 (R_1 // R_2)$

$\Rightarrow V_{in} = \left[\frac{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right] V_{gs}$

KVL högra nätet: $-V_{out} - [r_o // R_D // R_L] g_m V_{gs} = 0$

dvs sökta $\frac{V_{out}}{V_{in}} = -g_m \frac{[r_o // R_D // R_L] R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} \approx \underline{\underline{-14,5}}$ num.