

ERE 091 Reglerteknik F Tentamen 2026-01-12

14.00 - 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad som ingår i tesen (4 sidor)

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds på tid och plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

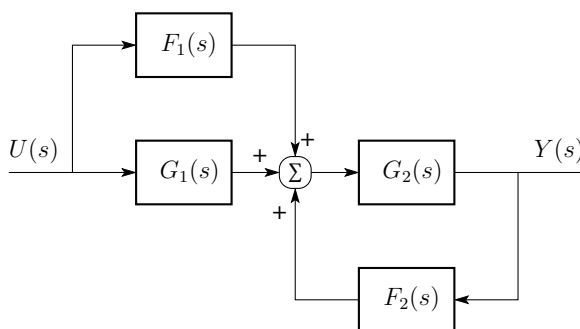
Uppgift 1.

- a. För ett dynamiskt system ges sambandet mellan insignalen u och utsignalen y av differentialekvationen

$$a\dot{y}(t) - y(t) = au(t)$$

För vilka värden på a är differentialekvationen insignal-utsignal-stabil?
(1 p)

- b. Bestäm med hjälp av blockschemat nedan överföringsfunktionen från $U(s)$ till $Y(s)$.



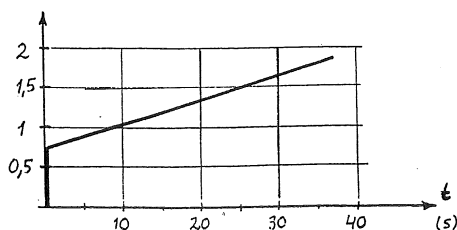
(2 p)

- c. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t - 3) + 2u(t - 3)$$

Bestäm överföringsfunktionen från insignal till utsignal samt systemets statiska förstärkning.
(2 p)

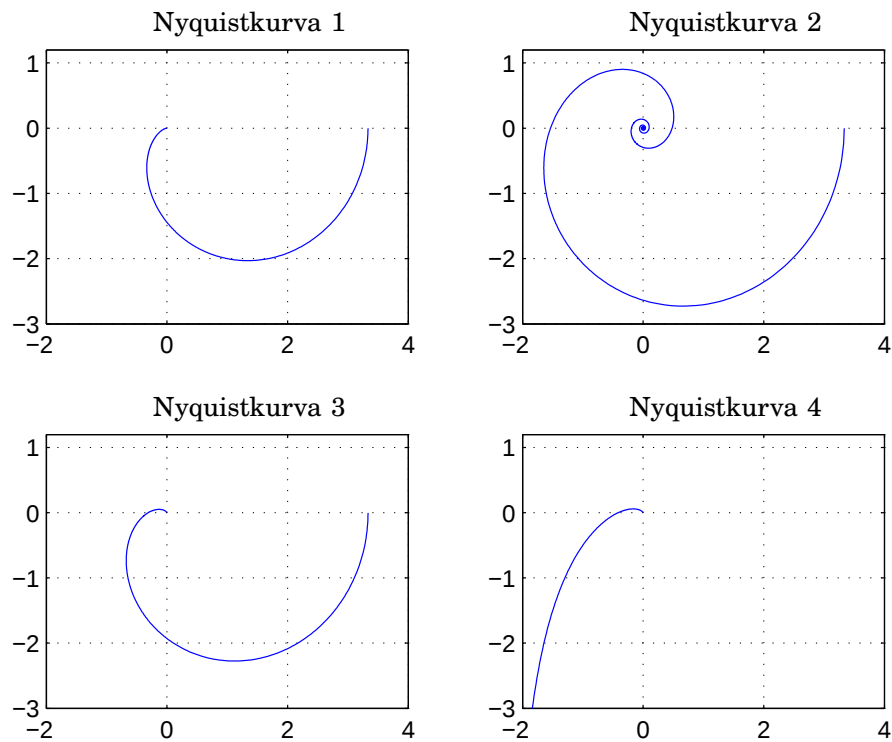
- d. Figuren nedan visar stegsvaret för en PI-regulator med överföringsfunktionen $F_{PI}(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$. Bestäm integrationstidskonstanten T_i och förstärkningen K .
(2 p)



- e. Nyquistdiagrammen för fyra av överföringsfunktionerna $G_1 - G_6$ visas i figuren nedan. Para ihop rätt överföringsfunktion med rätt Nyquistkurva och motivera dina svar. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 3}, \quad G_2(s) = \frac{30}{(s+1)(s+3)^2}, \quad G_3(s) = \frac{10}{s+3}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 3}, \quad G_5(s) = \frac{5}{s(s^2 + 4s + 3)}, \quad G_6(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 3}e^{-s}$$



Lösning:

- a. Laplace-transformering ger överföringsfunktionen $G(s) = \frac{a}{as-1}$, vilket betyder att systemet har en pol i $s = 1/a$, dvs villkoret för in-ut-stabilitet är $a < 0$.
- b. Blockschemat kan ses som en seriekoppling av $F_1 + G_1$ med ett återkopplat system med G_2 i "framledningen" och F_2 i återkopplingen. Alltså (observera att det är positiv återkoppling):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(F_1 + G_1)G_2}{1 - F_2G_2}$$

c. Laplace-transformering ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+2}e^{-3s}$$

med den statiska förstärkningen $G(0) = 1$.

d. Genom att skriva om det Laplace-transformerade stegsvaret som

$$Y_{FI}(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \cdot \frac{1}{s} = K\frac{1}{s} + \frac{K}{T_i} \cdot \frac{1}{s^2}$$

ses att stegsvaret utgörs av summan av ett steg och en ramp med förstärkningarna K respektive K/T_i . Avläsning i figuren ger $K = 0,75$ och $K/T_i = (2,0 - 0,75)/40$, som ger $T_i = 24$.

e. Kurva 1, 2 och 3 har samma begynnelsevärde $G(0)$, som stämmer med G_1 , G_2 , G_3 och G_6 . Dödtiden avgör att kurva 2 kommer från G_6 (spiralformen). Kurva 1 och 3 skiljer i fasen för höga frekvenser och kan förklaras av skillnaden mellan antal poler och antal nollställen – detta ger paren kurva 1– G_1 (fasen -180° för höga ω) och kurva 3– G_2 (fasen -270° för höga ω). Återstår kurva 4, vars lågfrekvensförstärkning går mot ∞ , detta pga den rena integratorn i G_5 .

Uppgift 2.

En process beskrivs av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

- Bestäm ett uttryck för stegsvaret för $G(s)$ i stationäritet. (2 p)
- En PI-regulator $F(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$ kopplas in på vanligt sätt för att styra processen. För vilka värden på $K > 0$ och $T_i > 0$ fås ett stabilt återkopplat system? (3 p)

Lösning:

- a. Stegsvaret ges av

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-s+1}{s^2+1} + \frac{1}{s},$$

vilket efter inverstransformering ger

$$y(t) = -\cos t + \sin t + 1,$$

vilket sammanfaller med uttrycket i stationäritet.

- b. Återkopplingen ger

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K(1 + T_i s)}{T_i s} \cdot \frac{s+1}{s^2+1},$$

dvs den karakteristiska ekvationen är

$$s^3 + Ks^2 + (1 + K + K/T_i)s + K/T_i = 0$$

Routh-Hurwitz' tablå blir

$$\begin{array}{cc} 1 & (1 + K + K/T_i) \\ K & K/T_i \\ c_0 & 0 \\ d_0 & \end{array}$$

med $c_0 = (1 + K + K/T_i) - 1/T_i = 1 + K + \frac{1}{T_i}(K - 1)$ och $d_0 = K/T_i$. Eftersom $K > 0$ och $T_i > 0$, så fås $d_0 > 0$. Återstår villkoret $c_0 > 0$, vilket ger stabilitetsvillkoret $T_i > \frac{1-K}{1+K}$ (vilket ju för $K > 1$ alltid är uppfyllt för positiva T_i).

Uppgift 3.

Följande olinjära modell beskriver dynamiken för en eldriven båt (x_1 är båtens hastighet, x_2 är propellerns rotationshastighet och u är spänningen till motorn):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (x_1 + x_2)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u\end{aligned}$$

- Linjärisera systemet kring spänningen $u = u_0 = 1$. Antag att positiv spänning ger upphov till positiv hastighet för båten. (2 p)
- Anta att båtens hastighet är mätbar, men inte propellerns rotationshastighet. Bestäm utifrån den linjäriserade modellen från (a) en observatör med poler i -2 och -1. (3 p)

Lösning:

- a. Den olinjära tillståndsmodellen är

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

Den stationära punkten svarande mot insignalen $u = u_0 = 1$ ges av $x_{20} = u_0 = 1$ respektive $1 - x_{10}^2 - x_{10} = 0$. Den senare ekvationen ger den positiva lösningen $x_{10} = (\sqrt{5} - 1)/2$. Linjäriseringen fås genom att beräkna partiella derivator i den stationära punkten:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\partial f}{\partial x_{(x_0, u_0)}} = \begin{bmatrix} -2x_1 - 1 & 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B &= \frac{\partial f}{\partial u_{(x_0, u_0)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- b. En observatör kan användas för att skatta tillstånden:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t),$$

där dynamiken för skattningsfelet bestäms av matrisen $A - KC$:

$$A - KC = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna k_1 och k_2 bestäms så att önskade poler fås:

$$\det(sI - (A - KC)) = \begin{vmatrix} s + k_1 + \sqrt{5} & -2 \\ k_2 & s + 1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+k_1+\sqrt{5}) + 2k_2 = (s+1)(s+2),$$

vilket ger $k_1 = 2 - \sqrt{5}$ och $k_2 = 0$.

Uppgift 4.

Följande överföringsfunktioner beskriver två varianter av en PD-regulator:

$$F_1(s) = K_p(1 + T_d s) \quad F_2(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right)$$

- Skissa amplitud- och faskurvor i Bodediagram för de två varianterna. OBS! *Skisser* räcker — det duger t ex med endast asymptoter för amplitudkurvan — men det är viktigt att ange ev. brytfrekvenser, liksom värden för amplitud och fas då $\omega \rightarrow 0$ eller $\omega \rightarrow \infty$. (1 p)
- Vilken är den främsta anledningen till att man föredrar variant 2 för praktisk implementering? (1 p)
- Anta att T_f i variant 2 “läses” i förhållande till T_d genom att bestämma relationen $T_f = T_d/N$, där N är ett fixt heltal (detta är en inte ovanlig lösning i kommersiella regulatorer). Genomför en diskretisering med användning av dels “Euler bakåt” och dels “Euler framåt”. Vilken är den diskretiserade regulatorns pol i de båda fallen? Vad händer med polen då $T_d \rightarrow 0$? Slutsats? (2 p)

Lösning:

- Variant 1: Amplituddelen har lutning 0 för små ω (förstärkning K_p) och bryter uppåt vid $\omega = 1/T_d$. Fasdelen börjar vid 0° för små ω och ökar till 90° för stora ω .
Variant 2: Amplituddelen börjar som ovan, bryter uppåt vid $\omega = 1/(T_d + T_f)$ samt nedåt vid $\omega = 1/T_f$. Asymptotiskt är förstärkningen K_p för små ω och $K_p(1 + T_d/T_f)$ för stora ω . Fasdelen börjar vid 0° för små ω , når ett max mellan brytfrekvenserna och planar ut vid 0° för stora ω .*
- Variant 1 ger godtyckligt hög förstärkning för höga frekvenser, vilket är olämpligt, eftersom brus ger upphov till stora styrsignaler.*
- Variant 2 av PD-regulatorn med $T_f = T_d/N$ ges av*

$$F_2(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}\right)$$

Diskretisering med “Euler bakåt” respektive “Euler framåt” ger

$$F_{2b}(z) = K_p \left(1 + \frac{\frac{T_d}{h}(1 - z^{-1})}{1 + \frac{T_d}{Nh}(1 - z^{-1})}\right), \quad F_{2f}(z) = K_p \left(1 + \frac{\frac{T_d}{h}(z - 1)}{1 + \frac{T_d}{Nh}(z - 1)}\right)$$

Regulatorns pol ges i de två fallen av

$$z_b = \frac{T_d}{Nh + T_d} = \frac{1}{1 + \frac{Nh}{T_d}}, \quad z_f = \frac{T_d - Nh}{T_d} = 1 - \frac{Nh}{T_d}$$

När Nh är litet jämfört med T_d så är polerna ungefär desamma, men om $T_d \rightarrow 0$ för fixt h , så får man ett något oväntat resultat: $z_b \rightarrow 0$ medan $z_f \rightarrow -\infty$. Detta betyder att med Euler bakåt fås en stabil regulator, men med Euler framåt blir regulatorn instabil. Den senare metoden är alltså inte lämplig att använda i denna situation!

Uppgift 5.

Temperaturen i en bil påverkas genom att med återkoppling från en temperatursensor reglera spänningen till ett värmelement. Överföringsfunktionen från spänning till temperatur ges av

$$G(s) = \frac{2}{1 + 0.25s} e^{-0.2s}$$

- Bestäm låg- och högfrequensasymptoterna (endast beloppsskurvan) för processen. (2 p)
- Anta att en P-regulator används för att styra värmeelementet. Bestäm den högsta skärfrekvens ω_c , som ger en fasmarginal på minst 55° . Vilket kvarstående fel fås vid stegformade börvärdesändringar? (2 p)
- Vi önskar nu eliminera det kvarstående felet vid stegformade börvärdesändringar. Välj lämplig regulatorstruktur och bestäm regulatorparametrar som ger en skärfrekvens $\omega_c = 3$ rad/s och en fasmarginal på minst 55° . (3 p)

Lösning:

- LF-asymptot: $|G(i\omega)| \approx 2$. HF-asymptot: $|G(i\omega)| \approx \frac{8}{\omega}$.
- En fasmarginal $\varphi_m = 55^\circ$ fås om processen har fasen -125° vid skärfrekvensen ω_c :

$$\arg G(i\omega_c) = (-\arctan 0.25\omega_c - 0.2\omega_c) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx -125^\circ \Rightarrow \omega_c \approx 6 \text{ rad/s}$$

Bestäm P-regulatorns förstärkning K_p så att denna skärfrekvens erhålls:

$$K_p = \frac{1}{|G(i\omega_c)|} \approx 0.9.$$

Denna förstärkning ger det kvarstående felet

$$\frac{1}{1+L(0)} = \frac{1}{1+K_p G(0)} \approx \frac{1}{1+1.8} \approx 0.36.$$

- c. Välj PI-regulator för att eliminera kvarstående fel: $F(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$.
Processens fasförskjutning vid $\omega_c = 3$ rad/s är

$$\arg G(i\omega_c) = (-\arctan 0.25 \cdot 3 - 0.2 \cdot 3) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx -71^\circ$$

Regulatorn skall då ha fasvridningen -54° ($-125^\circ + 71^\circ$), dvs:

$$\arg F(i\omega_c) = (-\pi + \arctan T_i \cdot 3) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -54^\circ \Rightarrow T_i \approx 0.24$$

Bestäm slutligen K så att kretsförstärkningen är 1 vid skärfrekvensen:

$$K = \frac{T_i \omega_c}{\sqrt{1 + (T_i \omega_c)^2}} \cdot \frac{1}{|G(i\omega_c)|} \approx 0.37$$

SLUT!