CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 091 Reglerteknik F
Tentamen 2025-01-13

14.00 - 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad som ingår i tesen (4 sidor)

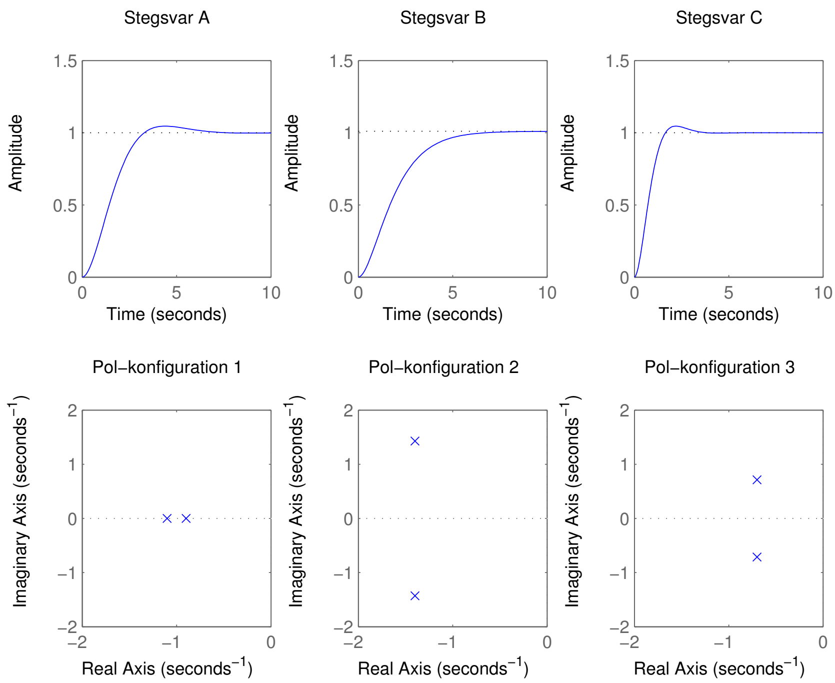
Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. **Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!**

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds på tid och plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Figuren nedan visar stegsvar och poler för tre olika system. Para ihop de figurer som hör ihop, dvs beskriver samma system! Motivera! (2 p)



b. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

$$g(t) = e^{-0.5t}\big(1 + \cos 0.5t\big)$$

Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

c. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, har en långsam och en snabb pol. Bestäm en tillståndsåterkoppling, som lämnar den snabba polen oförändrad och flyttar den långsamma polen till samma läge som den snabba. (2 p)

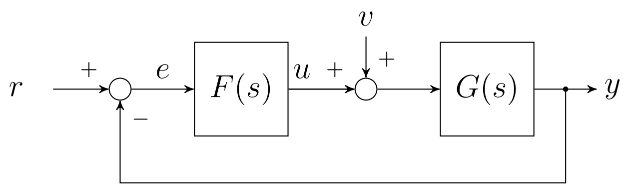
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

d. En process med överföringsfunktionen

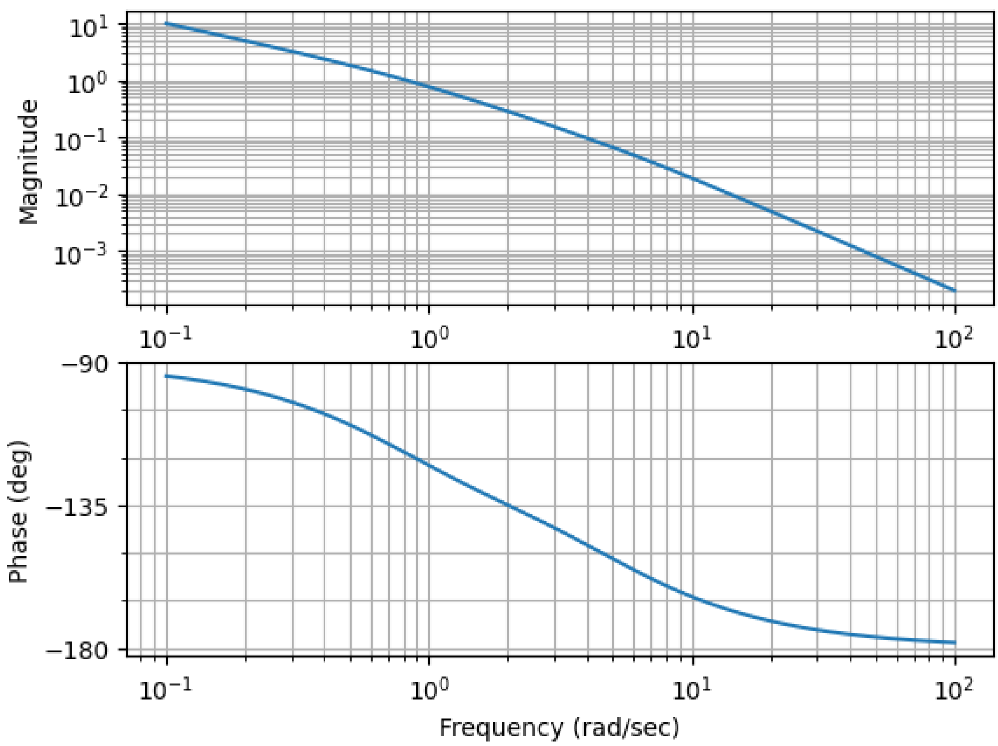
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$. Vilken är högsta tillåtna förstärkning K, om amplitudmarginalen skall vara minst 2,5? (2 p)

e. En process $G(s)$ utan poler i högra halvplanet återkopplas med en P-regulator $F(s) = K_p$ enligt nedan.



Processens frekvensfunktion framgår av följande Bodediagram:



Vad blir det kvarstående felet på en stegformad störning v med amplituden A_v? Var noga med att motivera dina beräkningar! (3 p)

Lösning:

a. *Två reella poler ger ett väldämpat stegsvar, dvs B-1. Stegsvaren A och C har samma dämpning, men det snabbare C har poler längre från origo, alltså A-3, C-2.*

b. *Impulssvaret ger efter L-transformering* $G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2}$ *med statiska förstärkningen* $G(0) = 2 + 1 = 3$.

c. *Beräkna först systemets egenvärden:*

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+4) + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

dvs uppgiften är att med återkopplingen flytta polen -1 till -3, vilket ger ett önskat karakteristiskt polynom $(\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$:

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda+4+l_1 & 3+l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4+l_1)\lambda + 3 + l_2$$

Identifiering av koefficienter ger $l_1 = 2$ *och* $l_2 = 6$.

d. *Systemets kretsöverföring blir* $L(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$, *och Nyquists förenklade kriterium kan alltså användas.* $L(s)$ *har fasen* $-180°$ *för* $\omega = \omega_\pi = 1$. *Kravet på amplitudmarginal ger villkoret* $K|G(i\omega_\pi)| \leq 1/2.5$, *och eftersom* $|G(i\omega_\pi)| = 1/2$, *måste* K *uppfylla* $K \leq 0.8$.

e. *Det slutna systemets överföringsfunktion från* v *till* y *blir*

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Av Bodediagrammet för $G(s)$ *framgår bland annat följande:*

   (i) *Lågfrekvensasymptoten lutar -20 dB per dekad, dvs processen har en integration. Det betyder att processen för låga frekvenser kan approximeras med överföringsfunktionen* K/s.

   (ii) *Eftersom processen saknar poler i högra halvplanet, så kan stabiliteten avgöras med det förenklade Nyquistkriteriet. Eftersom fasen överstiger* $-180°$, *så följer att det slutna systemet är stabilt.*

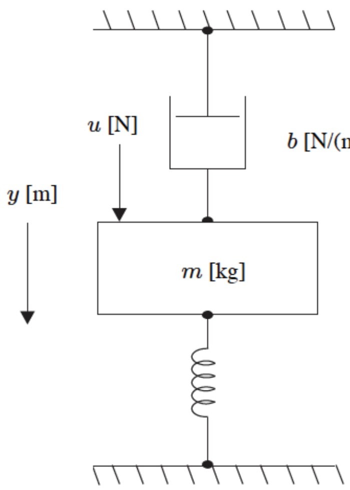
Med hjälp av dessa två konstateranden kan vi använda slutvärdessatsen (sätt $r = 0$*):*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} \cdot \frac{A_v}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{K/s}{1 + KK_p/s} \cdot A_v = \frac{A_v}{K_p}$$

Uppgift 2.
En massa $m[kg]$ placeras på en olinjär fjäder med ett kraft-läges-beroende

$$F = k_1 y + k_2 y^3,$$

där F [N] är fjäderkraften och y [m] är sammanpressningen av fjädern jämfört med ospänt läge. För att stabilisera massan finns dessutom en linjär viskös dämpare med dämpkonstanten b [N/(m/s)]. Se figur nedan.



a. Ställ upp en olinjär tillståndsmodell på formen

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

för det mekaniska systemet, där insignalen u [N] är en yttre kraft, som kan användas för att styra positionen på massan, dvs utsignalen y. (3 p)

b. På grund av gravitationen, så ger jämviktsläget för insignalen $u = 0$ en utsignal $y \neq 0$. Linjärisera modellen från (a) kring denna jämviktspunkt. Den linjära modellen beskriver systemet med en fiktiv, *linjär* fjäderkraft. Vilken är den fiktiva fjäderkonstanten? (2 p)

Ledning: Jämviktspunkten behöver inte lösas ut explicit.

Lösning:

a. Krafterna, som påverkar massan, är följande:

- *Gravitationen:* $F_1 = mg$
- *Fjädern:* $F_2 = k_1 y + k_2 y^3$
- *Dämparen:* $F_3 = b\dot{y}$
- *Yttre kraft:* $F_4 = u$

Kraftbalans ger

$$m\ddot{y} = mg - (k_1 y + k_2 y^3) - b\dot{y} + u$$

Om tillstånden väljs som $x_1 = y$ *och* $x_2 = \dot{y}$, *så kan modellen skrivas*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{m}\big(mg - (k_1 x_1 + k_2 x_1^3) - b x_2 + u\big) = -\frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u + g \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

b. *Jämviktspunkten* (x_{10}, x_{20}) *kan bestämmas ur villkoret* $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$*:*

$$\begin{aligned}
x_{20} &= 0 \\
k_1 x_{10} + k_2 x_{10}^3 &= mg
\end{aligned}$$

där den andra ekvationen ger en implicit lösning för x_{10}.
Den linjäriserade modellen blir nu

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\
\Delta\dot{x}_2 &= -\Big(\frac{k_1}{m} + \frac{3k_2 x_{10}^2}{m}\Big)\Delta x_1 - \frac{b}{m}\Delta x_2 + \frac{1}{m}\Delta u \\
\Delta y &= \Delta x_1,
\end{aligned}$$

vilket är en modell svarande mot en linjär, fiktiv fjäderkonstant $k_1 + 3k_2 x_{10}^2$.

Uppgift 3.
Följande överföringsfunktioner beskriver två varianter av en PD-regulator:

$$F_1(s) = K_p(1 + T_d s) \qquad F_2(s) = K_p\big(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\big)$$

a. Skissa amplitud- och faskurvor i Bodediagram för de två varianterna. OBS! *Skisser* räcker — det duger t ex med endast asymptoter för amplitudkurvan — men det är viktigt att ange ev. brytfrekvenser, liksom värden för amplitud och fas då $\omega \to 0$ eller $\omega \to \infty$. (1 p)

b. Vilken är den främsta anledningen till att man föredrar variant 2 för praktisk implementering? (1 p)

c. Bestäm en differensekvation, som kan användas som en datoralgoritm för att implementera variant 2 av PD-regulatorn med samplingsintervallet h.
Tips: Använd "Euler bakåt" för diskretiseringen. (2 p)

Lösning:

a. *Variant 1: Amplituddelen har lutning 0 för små ω (förstärkning K_p) och bryter uppåt vid $\omega = 1/T_d$. Fasdelen börjar vid $0°$ för små ω och ökar till $90°$ för stora ω.*
Variant 2: Amplituddelen börjar som ovan, bryter uppåt vid $\omega = 1/(T_d + T_f)$ samt nedåt vid $\omega = 1/T_f$. Asymptotiskt är förstärkningen K_p för små ω och $K_p(1 + T_d/T_f)$ för stora ω. Fasdelen börjar vid $0°$ för små ω, når ett max mellan brytfrekvenserna och planar ut vid $0°$ för stora ω.

b. *Variant 1 ger godtyckligt hög förstärkning för höga frekvenser, vilket är olämpligt, eftersom brus ger upphov till stora styrsignaler.*

c. *PD-regulatorn ges av (u är styrsignal och e är reglerfel)*

$$U(s) = K_p\big(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\big)E(s) \quad \Leftrightarrow$$
$$(1 + T_f s)U(s) = K_p\big(1 + (T_f + T_d)s\big)E(s)$$

Diskretisering med "Euler bakåt" ger nu:

$$\big(1 + T_f\frac{1 - q^{-1}}{h}\big)u(k) = K_p\big(1 + (T_f + T_d)\frac{1 - q^{-1}}{h}\big)e(k) \quad \Leftrightarrow$$
$$(1 + \frac{T_f}{h})u(k) = \frac{T_f}{h}u(k-1) + K_p(1 + \frac{T_f + T_d}{h})e(k) - K_p\frac{T_f + T_d}{h}e(k-1)$$

Med $\alpha = T_f/h$ och $\beta = (T_f + T_d)/h$, så kan alltså algoritmen beskrivas som

$$u(k) = \frac{\alpha}{1+\alpha}u(k-1) + K_p\frac{1+\beta}{1+\alpha}e(k) - K_p\frac{\beta}{1+\alpha}e(k-1)$$

Uppgift 4.
Ett återkopplat system är stabilt och har en stabil kretsöverföring med väldefinierade skärfrekvenser ω_c och ω_π. Anta att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller villkoret

$$|S(i\omega)| \leq 2, \quad \omega \in [0, \infty)$$

a. Vilken amplitudmarginal garanteras med villkoret på S? (2 p)

b. Vilken fasmarginal garanteras med villkoret på S? (3 p)

Ledning: Cosinussatsen anger sambandet mellan längderna a, b och c i en triangel och den mot sidan c stående vinkeln γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Lösning: *Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller, eftersom kretsöverföringen $L(s)$ är stabil. Alltså passerar frekvenskurvan $L(i\omega)$ till höger om den kritiska punkten $(-1, 0)$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = 1/(1 + L(s))$, vilket ger*

$$|S(i\omega)| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |1 + L(i\omega)| \geq 1/2$$

dvs avståndet från $L(i\omega)$ till punkten -1 är större än 0.5. Följande slutsatser kan då dras:

a. *Nyquistkurvan korsar negativa realaxeln till höger om punkten $(-0.5, 0)$, vilket innebär att avståndet till origo är mindre än 0.5. Eftersom detta avstånd också är lika med $1/A_m$, så medför detta att amplitudmarginalen uppfyller $A_m \geq 2$.*

b. *Nyquistkurvan korsar enhetscirkeln i punkten $L(i\omega_\pi)$ med $|L(i\omega_\pi)| = 1$ på avståndet $c > 0.5$ till punkten -1. Från triangeln som bildas av punkterna $L(i\omega_\pi)$, -1 och origo fås med användningen av cosinussatsen och definitionen av fasmarginalen φ_m:*

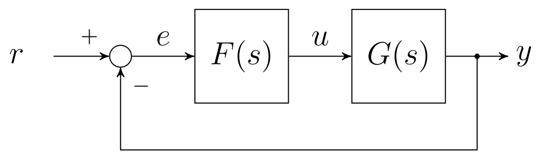
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi_m = 2 - 2\cos\varphi_m \geq 1/4$$

vilket ger $\cos\varphi_m \leq 7/8$ *eller* $\varphi_m \geq \arccos 7/8 \approx 29^o$.

Uppgift 5.
En process som beskrivs med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

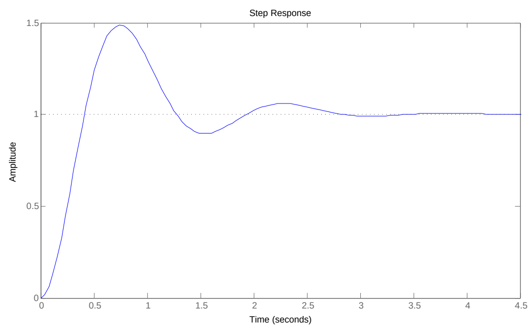
skall regleras enligt blockschemat nedan:



För att bl a eliminera kvarstående fel vid processtörningar, så har en kollega till dig designat en PI-regulator med syftet att få en skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) $\omega_c = 4$ och tillräcklig fasmarginal. Så här blev resultatet:

$$F_1(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i}), \qquad K_p = 22 \text{ och } T_i = 1$$

När denna regulator kopplas till processen (dvs $F(s) = F_1(s)$), så fås följande stegsvar (vid börvärdesändring), som har lite väl stor översläng:



a. Verifiera att skärfrekvensen är ungefär som avsett (dvs $\omega_c \approx 4$) och beräkna fasmarginalen φ_m. (2 p)

b. Föreslå hur du vill komplettera din kollegas design, så att skärfrekvensen bibehålls men fasmarginalen ökas till $\varphi_m = 50°$. Din regulator $F_2(s)$ skall alltså tillsammans med regulatorn $F_1(s)$ ge den totala regulatorn

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Genomför beräkningarna och ange överföringsfunktionen för den totala regulatorn.

(3 p)

Lösning:

a. *Beräkna kretsöverföringens förstärkning vid $\omega = 4$:*

$$|L(i \cdot 4)| = |F_1(i \cdot 4)| \cdot |G(i \cdot 4)| = K_p \frac{\sqrt{1 + (4T_i)^2}}{4T_i} \cdot \frac{1}{4\sqrt{4^2 + 4^2}} \approx 1.002$$

dvs vi kan dra slutsatsen att $\omega_c \approx 4$. Fasmarginalen kan då beräknas (observera att Gs brytfrekvens är precis 4):

$$\begin{aligned} \varphi_m &\approx 180^\circ + \arg G(i \cdot 4) + \arg F_1(i \cdot 4) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \arctan(4T_i) \\ &= \arctan 4 - 45^\circ \approx 31^\circ \end{aligned}$$

b. *Fasen behöver alltså höjas c:a $50^\circ - 31^\circ = 19^\circ$, och detta kan göras med en PD-regulator*

$$F_2(s) = K_2 \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s / b}$$

Med $\varphi_{max} = 19^\circ$ fås värdet på b:

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} \approx 1.97$$

Max faslyft vid $\omega = 4$ fås genom att välja $\sqrt{b}/\tau_d = 4$, vilket ger $\tau_d \approx 0.35$. Slutligen justeras förstärkningen, så att skärfrekvensen bibehålls:

$$|F_2(i \cdot 4)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\sqrt{1 + (\frac{4\tau_d}{b})^2}}{\sqrt{1 + (4\tau_d)^2}} \approx 0.71$$

Den totala regulatorn är alltså

$$\begin{aligned} F(s) = F_1(s)F_2(s) &= K_p(1 + \frac{1}{sT_i}) K_2 \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s / b} \\ &\approx 15.6 \cdot \frac{1 + s}{s} \cdot \frac{1 + 0.35s}{1 + 0.18s} \end{aligned}$$

SLUT!