CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE091 Reglerteknik F
Tentamen 2023-01-09

14:00 – 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Max 4 A4-blad med egna anteckningar på fram- och baksida

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 23 januari kl 12-13 på plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

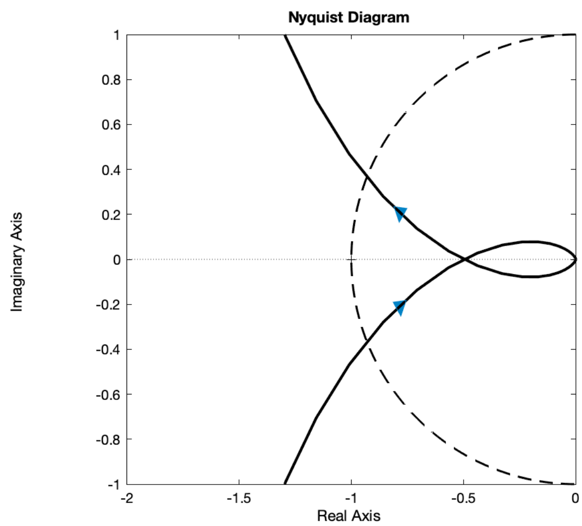
Uppgift 1.

a. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + y^2(t) = u(t) \cdot \cos u(t)$$

Linjärisera denna modell kring den stationära lösningen $u = u_0 = 0$ och $y = y_0 = 0$ och bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion från insignal till utsignal. (2 p)

b. Figuren nedan visar en del av Nyquistdiagrammet för en marginellt stabil process (processen har en ren integration). Processen återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$. Hur stor förstärkning $K > 0$ tillåts, om amplitudmarginalen skall vara minst 3? (2 p)

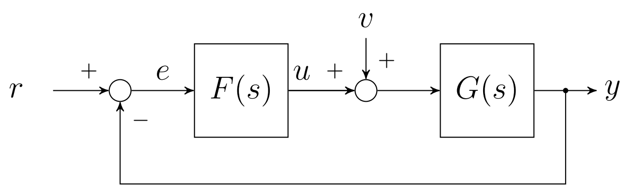


c. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

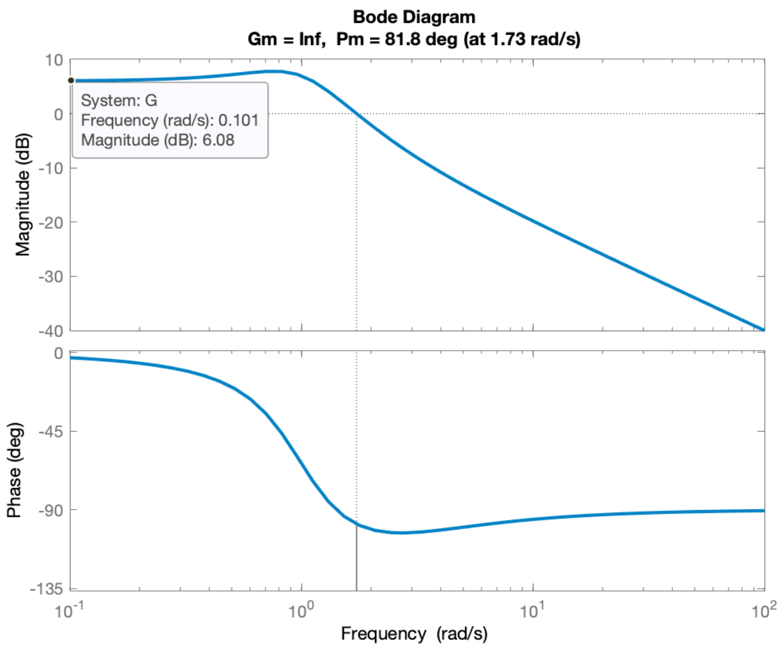
$$g(t) = e^{-0.5t}(1 + 2e^{-0.5t})$$

Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

d. En process $G(s)$ påverkas av en laststörning v, vars inverkan man vill minska genom att återkoppla processen med en P-regulator $F(s) = K$ enligt blockschemat nedan:



Avgör med hjälp av Bodediagrammet för $G(s)$ nedan hur stort laststörningens stationära bidrag till utsignalen y blir *i förhållande till open-loop fallet*, då kretsen sluts med P-regulatorn med $K = 2.5$. Ange ett approximativt %-värde! (3 p)



e. Vilket (vilka) av följande system är insignal-utsignal-stabilt (stabila)? Motivera!

$$G_1(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+6}$$

$$G_2(s) = \frac{s+3}{s^2+2s}$$

(2 p)

Lösning:

a. *Linjäriseringen kan göras antingen genom att gå via en tillståndsmodell eller direkt med diff-ekvationen:*

$$\Delta\ddot{y} + 2y_0\Delta y = (\cos u - u\sin u)|_0\Delta u \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\ddot{y} = \Delta u$$

dvs överföringsfunktionen blir $G(s) = 1/s^2$.

b. *Nyquists förenklade kriterium kan användas, eftersom processen är stabil, så när som på en ren integration. Av Nyquistdiagrammet framgår att* $|G(i\omega_\pi)| = 0.5$. *Kravet på amplitudmarginal ger villkoret* $K|G(i\omega_\pi)| \leq 1/3$, *dvs* K *måste uppfylla* $0 < K \leq 2/3$.

c. *Impulssvaret* $g(t) = e^{-0.5t} + 2e^{-t}$ *ger efter Laplace-transformering*

$$G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{2}{s+1},$$

som har den statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 2 = 4$.

d. *I open loop gäller* $Y(s) = G(s)V(s)$ *och i closed-loop* $Y(s) = G(s)/(1 + F(s)G(s))V(s)$, *dvs i stationaritet dämpas bidraget med faktorn* $1/(1 + F(0)G(0))$ *jämfört med open-loop. Från Bodediagrammet fås approximativt* $|G(0)| \approx 6.08\,\mathrm{dB} = 10^{6.08/20} \approx 2$, *dvs dämpningen blir ungefär* $1/(1 + 2.5 \cdot 2) = 1/6$, *som svarar mot c:a 17%.*

e. $G_1(s)$ *är insignal-utsignal-stabilt, eftersom polerna ligger strikt i VHP* $(-1 \pm i\sqrt{5})$.
$G_2(s)$ *är inte i-u-stabilt, eftersom den innehåller en integrator (ett steg som insignal ger en växande utsignal).*

Uppgift 2.
Processen

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

skall styras med en PD-regulator $F_{PD}(s)$ (med filter på D-delen), som efter regulatordesign visat sig fungera bra med följande val av parametrar:

$$F_{PD}(s) = 7 + \frac{4s}{1 + 0.05s}.$$

Med denna regulator blir bandbredden för det återkopplade systemet c:a 10 rad/s, och samplingsintervallet väljs till 0.05 s.

Föreslå en diskretiserad variant av den kontinuerliga PD-regulatorn ovan, med användning av samplingsintervallet $h = 0.05$ s. Ange ett uttryck för beräkning av styrsignalen $u(kh)$ vid samplingstidpunkten kh. (3 p)

Lösning: *Regulatorn blir*

$$U(s) = F_{PD}(s)E(s) = \big(7 + \frac{4s}{1+0.05s}\big)E(s) = \frac{7 + 4.35s}{1+0.05s}E(s)$$

Flera diskretiseringar är möjliga, t ex:

- *Med Euler bakåt låter vi* $s \leftarrow (1 - z^{-1})/h$, *dvs*

$$\begin{aligned}(1 + 0.05(1 - z^{-1})/h)U(z) &= (7 + 4.35(1 - z^{-1})/h)E(z) \Leftrightarrow \\ (2 - z^{-1})U(z) &= (94 - 87z^{-1})E(z)\end{aligned}$$

  vilket i tidsplanet ger

$$u(kh) = 0.5u((k-1)h) + 47e(kh) - 43.5e((k-1)h).$$

- *Med Euler framåt låter vi* $s \leftarrow (z - 1)/h$, *dvs*

$$\begin{aligned}(1 + 0.05(z - 1)/h)U(z) &= (7 + 4.35(z - 1)/h)E(z) \Leftrightarrow \\ zU(z) &= (87z - 80)E(z)\end{aligned}$$

  vilket i tidsplanet ger

$$u(kh) = 87e(kh) - 80e((k-1)h).$$

- *Med Tustins metod låter vi* $s \leftarrow \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$, *dvs*

$$\begin{aligned}(1+0.05\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1})U(z) &= (7+4.35\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1})E(z) \Leftrightarrow \\ (z+1+2(z-1))U(z) &= (7(z+1)+174(z-1))E(z) \Leftrightarrow \\ (3z-1)U(z) &= (181z-167)E(z)\end{aligned}$$

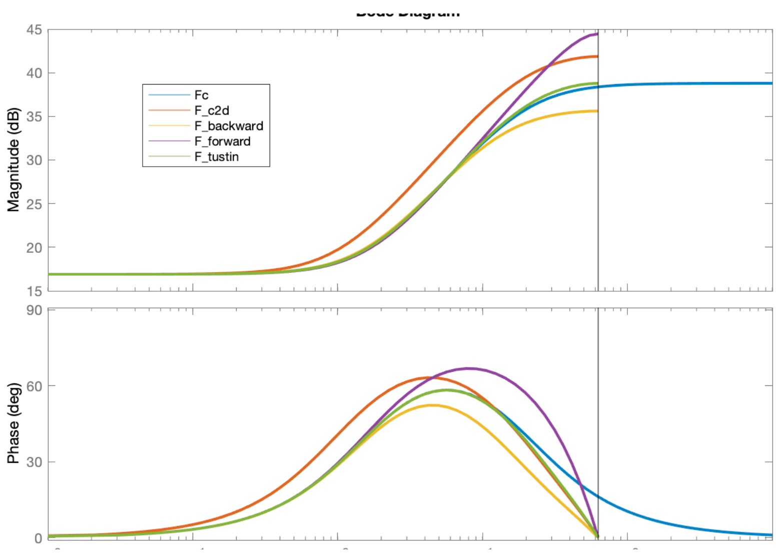
  vilket i tidsplanet ger

$$u(kh) = 0.33u((k-1)h) + 60.3e(kh) - 55.7e((k-1)h).$$

Diskretisering via tillståndsmodell med antagandet om styckvis konstant insignal används framför allt för diskretisering av processen, *men förekommer ändå ibland. I detta fall ger den som resultat*

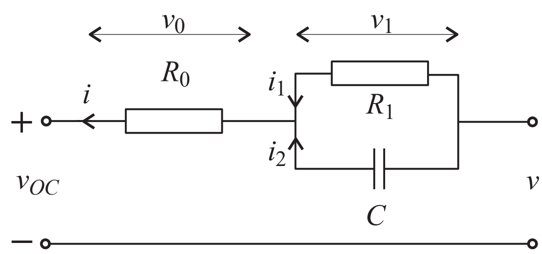
$$F_{PD}(z) = \frac{87z - 82.6}{z - 0.37}$$

Bodediagrammet nedan visar de olika diskretiseringarna jämfört med den kontinuerliga regulatorn.



Uppgift 3.
Ström-spänning-relationen i ett litiumjonbatteri kan beskrivas av en s.k. ekvivalent krets, som den i figuren nedan. Till vänster är en spänningskälla v_{OC} (Open Circuit Voltage), som genom elektrokemi ger en nära konstant

spänning (som i och för sig beror på hur laddat batteriet är) och till höger är spänningen v mellan polerna på batteriet. Strömmen i som tas (negativ) eller laddas (positiv) styrs av ett s.k. BMS (Battery Management System).



När batteriet laddas ökar spänningen v. Normalt får inte spänningen v överstiga $v_{max} = 4.2$ Volt då battericellen annars skadas, eller t.o.m. kan börja brinna.

a. Visa att överföringsfunktionen från strömmen i till spänningsskillnaden $v - v_{OC}$ kan skrivas

$$G(s) = k_0 + \frac{k_1}{1 + sT}$$

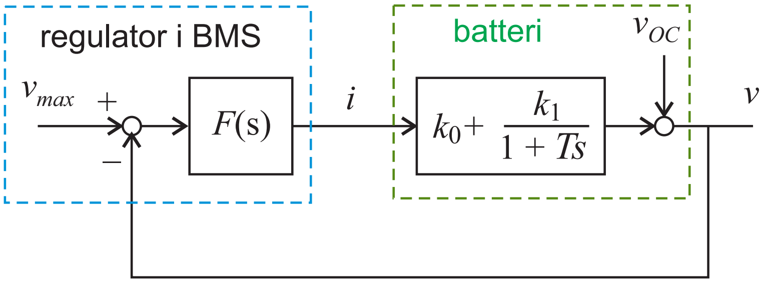
och bestäm vad k_0, k_1 och T är (samtliga parametrar blir positiva med konventionen att strömmen är positiv vid laddning). (2 p)

b. Anta att batteriet är i vila. Då är $v = v_{OC}$, som vi kan anta är 3.9 V. Om vi sedan lägger på största tillåtna laddström, 150 A, hur lång tid tar det innan vi når högsta tillåtna polspänning v, om vi kan anta att v_{OC} är konstant, $R_0 = 1$ mΩ, $R_1 = 2$ mΩ och $C = 20$ kF?

(**Om du inte klarade a-uppgiften kan du låta** $k_0 = k_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ **och** $T = 20$ **s.**) (3 p)

c. När man närmar sig den maximala spänningen måste man naturligtvis minska strömmen, men ändå ha så stark laddström som möjligt. Med andra ord vill man styra strömmen så att spänningen blir $v = v_{max}$. Det här kan lösas med en reglerkrets som den i figuren nedan.

Visa att med en PI-regulator $F(s) = K_p + K_I/s$ så förblir systemet stabilt för alla värden på (positiva) k_0, k_1 och T.



(2 p)

Lösning:

a. *För kondensatorn gäller*

$$C\frac{dv_1}{dt} = i_2 = i - i_1 = i - \frac{v_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad (1 + R_1Cs)V_1(s) = R_1I(s),$$

vilket med $\Delta v = v - v_{OC}$ *ger*

$$V(s) = V_{OC}(s) + R_0I(s) + \frac{R_1}{1 + R_1Cs}I(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V(s)}{I(s)} = R_0 + \frac{R_1}{1 + R_1Cs}$$

Med givna värden insatta fås $k_0 = R_0 = 10^{-3}\ \Omega$, $k_1 = R_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\Omega$ *och* $T = R_1C = 40\,s$.

b. *Svaret på ett steg om 150 A blir*

$$\Delta v(t) = \big(k_0 + k_1(1 - e^{-t/T})\big) \cdot 150 = 150\big(10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}(1 - e^{-t/40})\big),$$

vilket når högsta tillåtna värde på $0.3\,(4.2 - 3.9)$ *efter c:a 28 s.*

c. *Kretsöverföringen blir*

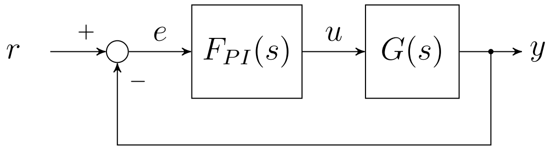
$$L(s) = \frac{K_ps + K_I}{s} \cdot \frac{k_0(1 + sT) + k_1}{1 + sT}.$$

Att detta ger ett stabilt slutet system för alla positiva k_0, k_1 *och* T *kan inses genom t ex ett av följande argument:*

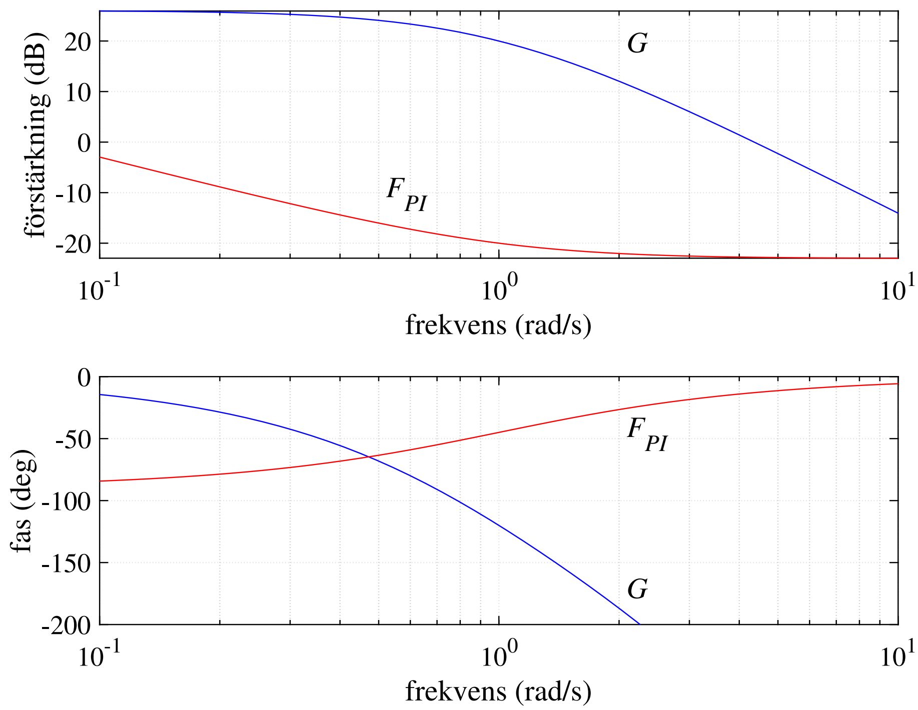
- *Karakteristiska polynomet är ett andragradspolynom med positiva koefficienter.*
- *Kretsöverföringen har en fasförskjutning mellan* 90° *och* -180° *(eftersom fasen för små* ω *är* -90° *och därefter två nollställen kan höja fasen max* 180° *och en pol kan sänka den max* 90°*) och Nyquistkurvan därför inte kan korsa negativa realaxeln.*

Uppgift 4.

En PI-regulator $F_{PI}(s)$ har tagits fram för en process med överföringsfunktionen $G(s)$.



Bodediagrammen för processen och regulatorn visas nedan.



a. Hur stor fasmarginal ger denna reglering? (2 p)

b. Fasmarginalen visar sig vara för liten så därför lägger man till ett lead-filter så att regulatorn blir

$$F(s) = \underbrace{K\frac{1+\tau s}{1+\tau s/b}}_{F_{lead}} F_{PI}(s)$$

Ange en design av F_{lead} som ger en fasmarginal på 40° vid oförändrad skärfrekvens (överkorsningsfrekvens). (3 p)

Lösning:

a. *Fasmarginalen kan avläsas för* $\omega_c \approx 1$ *rad/s, där* G *och* F_{PI} *har sammanlagd förstärkning 1. Faskurvorna ger en sammanlagd fas på c:a* $-165°$*, dvs en fasmarginal på c:a* $15°$*.*

b. *Leadfiltret behöver höja fasen med* $25°$*, vilket ger* $b = \frac{1+\sin 25°}{1-\sin 25°} \approx 2.5$*. Maximalt faslyft vid* $\frac{\sqrt{b}}{\tau} = \omega_c$ *ger* $\tau \approx 1.6$*. Eftersom skärfrekvensen skall vara oförändrad, så gäller slutligen kravet* $|F_{lead}(i\omega_c)| = K\sqrt{b} = 1$*, dvs* $K = 1/\sqrt{b} \approx 0.63$*.*

Uppgift 5.
Ett mekaniskt system består av en massa, vars läge $y(t)$ påverkas av såväl en fjäderkraft och en friktionskraft som av en yttre kraft $u(t)$. Systemet beskrivs av differentialekvationen

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t)$$

där $y(t)$ betecknar massans position och $y(t) = 0$ anger massans viloläge då $u(t) = 0$. Konstanterna m, k och b betecknar massa, fjäderkonstant respektive friktionskoefficient. Vi antar att $m = k = 1$.

a. Inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Verifiera att systemet beskrivs på tillståndsform av modellen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(1 p)

b. Antag att $b = 0.5$. Bestäm en positionsreglering i form av en tillståndsåterkoppling på formen

$$u(t) = -L_u x(t) + K_r r(t)$$

sådan att det återkopplade systemets poler placeras i -2.
Ledning: I detta steg behöver du bara bestämma L_u. (2 p)

c. Antag att man lägger på en referenssignal i form av ett steg med amplituden ett. Vad blir utsignalen $y(t)$ när massan ställt in sig i sin nya position? Vad är ett lämpligt värde på K_r? (1 p)

Lösning:

a. *Med de valda tillståndsvariablerna fås* $\dot{x}_1 = x_2$ *och* $\dot{x}_2 = -k/m \cdot x_1 - b/m \cdot x_2 + 1/m \cdot u = -x_1 - b \cdot x_2 + u$. *På vektorform blir detta den givna modellen*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

b. *Med de vanliga beteckningarna beskrivs det återkopplade systemet av*

$$\dot{x}(t) = (A - BL_u)x(t) + BK_r r(t)$$

med

$$A - BL_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - l_1 & -b - l_2 \end{bmatrix}$$

och med $b = 0.5$ *blir därmed det karakteristiska polynomet* $\det(sI - (A - BL_u)) = s(s + l_2 + 0.5) + l_1 + 1$. *Slutna systemets önskade karakteristiska polynom är* $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$, *vilket uppnås med valen* $l_1 = 3$ *och* $l_2 = 3.5$.

c. *Det slutna systemet är*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Med $r(t) = 1$ *fås stationärt (då* $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$*) att* $x_2 = 0$ *och* $y = x_1 = K_r/4$. *Med* $K_r = 4$ *fås alltså inget stationärt fel.*

SLUT!