CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE091 Reglerteknik F
Tentamen 2024-01-08

14:00 - 18:00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelblad som ingår i tesen

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds på tid och plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-2)$$

Låt insignalen vara $u(t) = \sin \omega t$. Bestäm $y(t)$ för stora t $(t \to \infty)$.
(2 p)

b. I ett återkopplat reglersystem för positionering av en satellit ges det slutna systemets överföringsfunktion från börvärde till ärvärde av

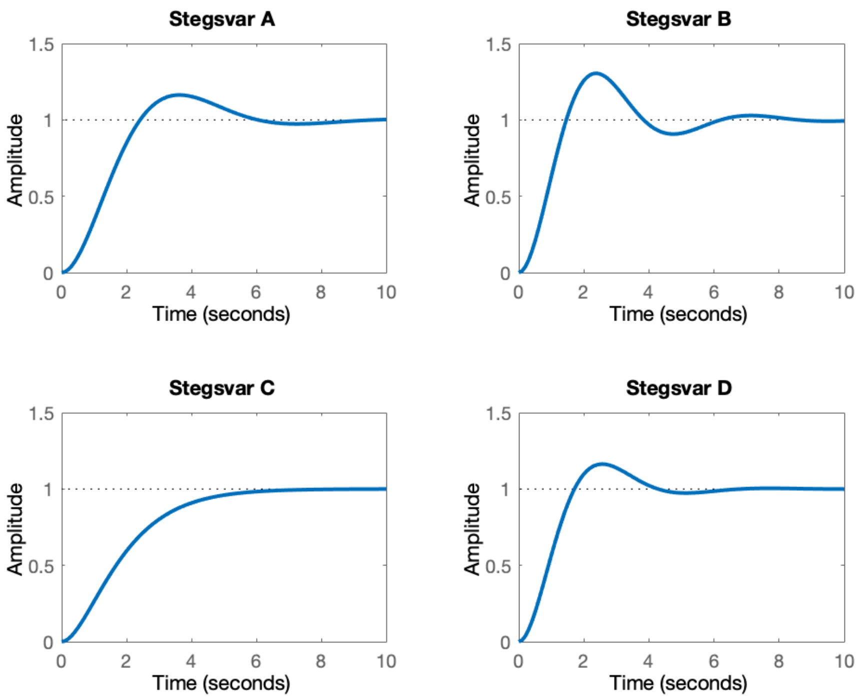
$$G_c(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$$

där K_p och K_d är regulatorns parametrar. I figur A nedan visas det slutna systemets stegsvar för $K_p = 1$, $K_d = 1$. Avgör vilket av stegsvaren B, C eller D som visar resultatet av följande parameterändingar:

(1) $K_p = 2$, $K_d = 1$

(2) $K_p = 1$, $K_d = 2$

OBS! Motivering krävs! (2 p)



c. En regulatordesign har lett fram till en PD-regulator med filter på D-delen med överföringsfunktionen

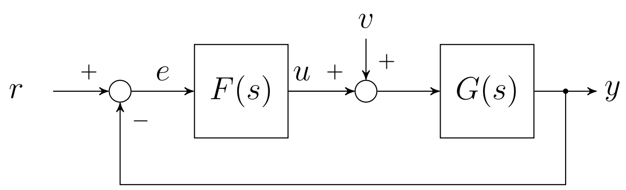
$$F(s) = 0.5 \frac{1+s}{1+0.25s}$$

Föreslå en diskretisering av denna regulator med samplingsintervallet $h = 0.1$s och motivera ditt val av diskretiseringsmetod. Ange ett uttryck för beräkning av styrsignalen $u(kh)$ vid samplingstidpunkten kh ($k = 1, 2, 3, \ldots$. (2 p)

d. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



Vad blir störningen v:s stationära bidrag till utsignalen y, då v är en stegstörning med amplituden 10? (2 p)

e. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$10\,\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y^2(t) = u^2(t)$$

Differentialekvationen har två jämviktspunkter för $u = u_0 = 1$. Linjärisera differentialekvationen kring dessa och bestäm motsvarande två överföringsfunktioner. (2 p)

Lösning:

a. *Laplace-transformering (med initialvillkoren 0) ger*

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-2s}U(s),$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Eftersom $G(s)$ är strikt stabil, så ges utsignalen för stora t av

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \sin(\omega t - 2\omega - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

b. *Det slutna systemet är av typen $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ med nominella värden (stegsvar A) $\omega_n = 1$ och $\zeta = 1/2$. Parameterändringarna ger i fall (1) en ökning av ω_n och en minskning av ζ, dvs stegsvaret blir snabbare men mer oscillativt, alltså enligt diagram B. I fall (2) ökas ζ medan ω_n är oförändrat jämfört med det nominella fallet, dvs enligt diagram C (i detta fallet fås två reella poler, dvs det blir ingen översläng).*

c. *Tustins metod, som verkar ge de bästa resultaten, ger*

$$(1 + 0.25\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}U(z) = 0.5(1 + \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1})E(z),$$

som med $h = 0.1$ kan förenklas till

$$(6z - 4)U(z) = 0.5(21z - 19)$$

och styrlagen ges därför av

$$u(kh) = 0.67u((k-1)h) + 1.75e(kh) - 1.58e((k-1)h)$$

d. *Slutvärdessatsen kan användas, eftersom det slutna systemet är stabilt (karakteristiska polynomet $s^2 + (K+1)s + 2K + 1$ har positiva koefficienter):*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} \cdot \frac{10}{s} = \frac{2}{1 + 2 \cdot 2} \cdot 10 = 4$$

e. *Jämviktspunkterna är $(u_0, y_0) = (1, 1)$ och $(u_0, y_0) = (1, -1)$. Linjärisering och Laplace-transformering ger*

$$10\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + 2y_0\Delta y = 2u_0\Delta u \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2u_0}{10s^2 + s + 2y_0}$$

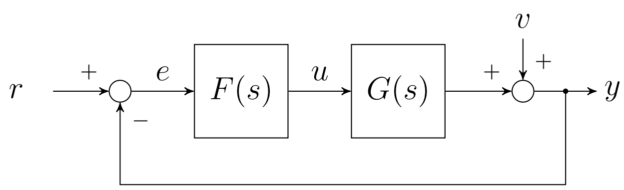
dvs $G(s) = \frac{2}{10s^2+s+2}$ respektive $G(s) = \frac{2}{10s^2+s-2}$.

Uppgift 2.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K > 0$ enligt nedan.



a. För vilka värden på K är det slutna systemet stabilt? (1 p)

b. Vilka blir det slutna systemets poler, uttryckt i K, för $K \gg 1$?
Ledning: För små x gäller att $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. (2 p)

c. Verifiera att en konstant laststörning v stationärt påverkar utsignalen lika mycket i *open-loop* som i *closed-loop*. Varför blir det så? (2 p)

Lösning:

a. Den karakteristiska ekvationen ges av

$$s^2 + 2 + Ks = s^2 + Ks + 2 = 0.$$

Eftersom koefficienterna i karakteristiska polynomet är positiva för alla $K > 0$*, så följer att systemet är stabilt för alla* $K > 0$*. Detta kan också visas med hjälp av Routh-Hurwitz metod. Alternativt kan man lösa den karakteristiska ekvationen direkt som i (b) nedan.*

b. Den karakteristiska ekvationen har lösningen

$$s = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K}{2})^2 - 2} \tag{1}$$

(För små K *fås ett stabilt, komplexkonjugerat polpar. För ökande* K *fås så småningom två reella poler, men eftersom beloppet av den andra termen i (1) alltid är mindre än beloppet av den första termen, så blir*

båda polerna negativa, dvs stabila.)
Lösningen kan approximeras för stora K:

$$s = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K}{2})^2 - 2} = -\frac{K}{2}\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{(K/2)^2}}\Big)$$
$$\approx -\frac{K}{2}\big(1 \pm (1 - \frac{1}{(K/2)^2})\big) =$$

som för $K \gg 1$ ger de två polerna $s \approx -K$ och $s \approx -2/K$.

c. *Eftersom det slutna systemet är stabilt, så anger känslighetsfunktionen $S(s)$ hur mycket laststörningen påverkar utsignalen i* closed-loop*; stationärt fås:*

$$S(0) = (1/(1 + KG(0)) = 1$$

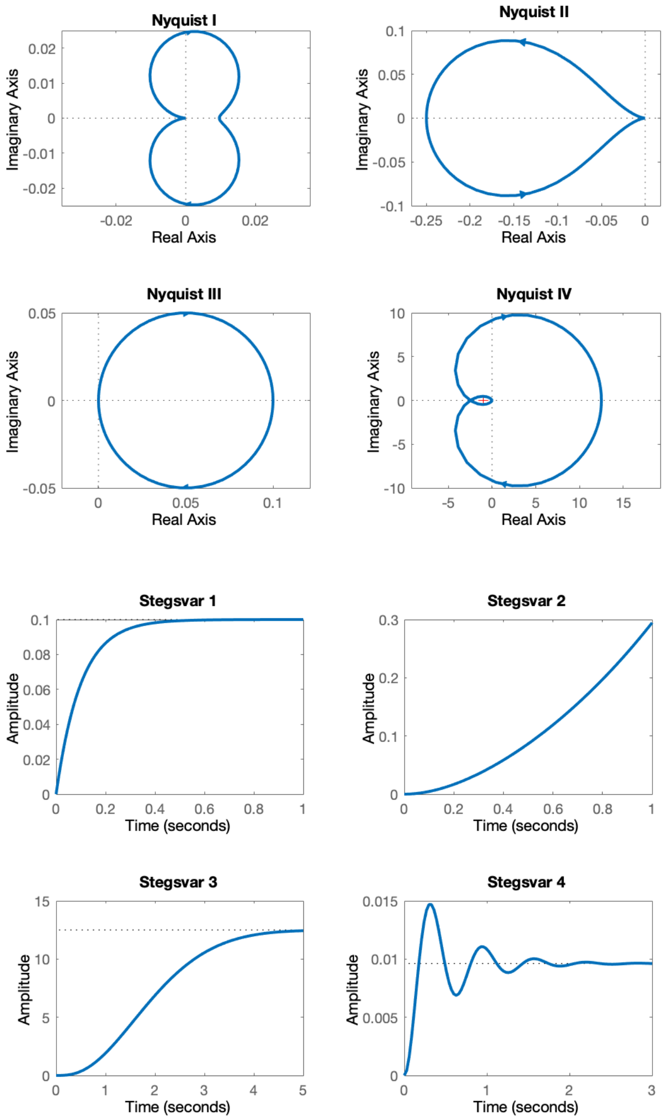
dvs laststörningen påverkar utsignalen lika mycket som i open-loop*. Anledningen till detta är processens nollställe i origo, som ger $G(0) = 0$.*

Uppgift 3.
Fyra system är givna:

$$G_A(s) = \frac{1}{s+10} \qquad G_B(s) = \frac{25}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$G_C(s) = \frac{1}{s^2+4s+104} \qquad G_D(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)}$$

Nyquistdiagram och stegsvar för systemen visas nedan. Para ihop systemen med rätt figurer, och motivera noga dina svar med lämpliga räkningar och/eller överslag—poäng ges endast för korrekta motiveringar! (4 p)



Lösning: *Nyquistdiagrammet fås från avbildningen* $s \mapsto G(s)$ *då* s *genomlöper Nyquists kontur* γ. *En del av denna utgörs av segmentet* $\gamma_1 : s = i\omega, \omega \in [r, R]$ *där man låter* $r \to 0$ *och* $R \to \infty$. *Som ledning studerar vi hur detta segment avbildas under respektive överföringsfunktion:*

G_A : *Börjar i* $1/10$ *och slutar i* $-i/R$. *Uppfylls endast av diagram III.*

G_B : *Börjar i* $25/2$ *och slutar i* $25i/R^3$. *Uppfylls endast av diagram IV.*

G_C : *Börjar i* $1/104$ *och slutar i* $-1/R^2$. *Uppfylls endast av diagram I.*

G_D : *Börjar i* $-1/4$ *och slutar i* $-i/R^2$. *Uppfylls endast av diagram II.*

För stegsvaren gäller:

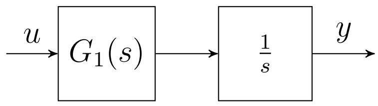
G_A : *Stabilt, första ordningens system med statisk förstärkning 0.1. Svarar mot stegsvar 1.*

G_B : *Stabilt och väldämpat andra ordningens system med statisk förstärkning 25/2. Svarar mot stegsvar 3.*

G_C : *Stabilt andra ordningens system med dålig dämpning och statisk förstärkning 1/104. Svarar mot stegsvar 4.*

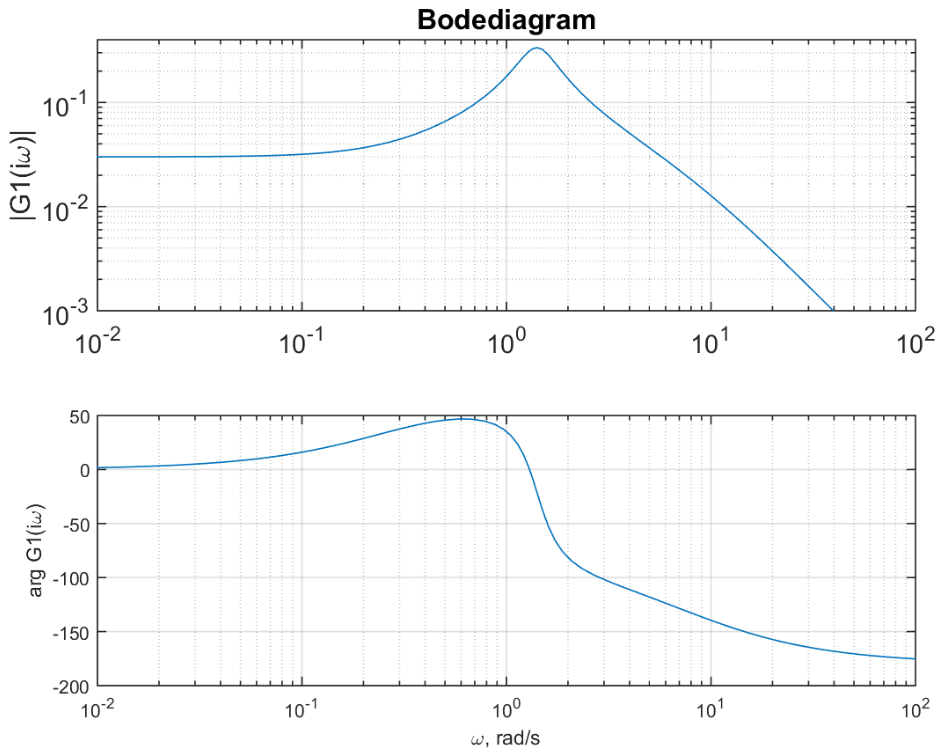
G_D : *Instabilit system (en pol i* $s = 1$*). Svarar mot stegsvar 2.*

Uppgift 4.
I denna uppgift skall vi studera återkopplad reglering av en process, som enligt blockschemat nedan består av en delprocess $G_1(s)$ i serie med en integrator. Bodediagrammet för $G_1(s)$ visas i figuren längst ned. Observera alltså att systemet innehåller en integrator, som inte finns med i bodediagrammet (eftersom det bara är för $G_1(s)$).



a. Dimensionera en P-regulator som ger en fasmarginal på 40°. (3 p)

b. Vi vill nu göra det återkopplade systemet dubbelt så snabbt jämfört med (a) genom att dubblera skärfrekvensen. Dimensionera en lämplig regulator för att åstadkomma detta. (3 p)

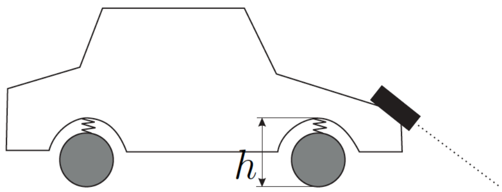


Lösning:

a. *Med en P-regulator med förstärkningen K_p får vi kretsförstärkningen $L(s) = \frac{K_p}{s} G_1(s)$, som har fasen $\arg L(i\omega) = \arg G_1(i\omega) - 90°$. Önskad fasmarginal fås för skärfrekvensen $\omega = \omega_c$: $\arg G_1(i\omega_c) - 90° = -180° + \varphi_m = -140°$, vilket med Bodediagrammets hjälp ger $\omega_c = 1.5$. Dessutom skall för skärfrekvensen gälla att $|L(i\omega_c)| = \frac{K_p}{\omega_c}|G_1(i\omega_c)| = 1$, vilket åter med Bodediagrammets hjälp ger $K_p = \frac{1.5}{|G_1(i \cdot 1.5)|} = \frac{1.5}{0.3} = 5$.*

b. *Dubbla snabbheten svarar mot dubbla skärfrekvensen, dvs den nya skärfrekvensen skall vara $\omega_c = 3$. Vid denna frekvens gäller att $\arg G_1(i\omega_c) = -100°$, dvs vi har tappat $50°$ i fasen. Därför behövs t ex ett leadfilter $F(s) = K\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b}$ för att höja fasen i motsvarande grad. Behovet av faslyft ger $b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} = \frac{1+\sin 50°}{1-\sin 50°} = 7.5$. Maximalt faslyft $\frac{\sqrt{b}}{\tau_d}$ vid $\omega = \omega_c$ ger $\tau_d = 0.9$. Slutligen ger kravet $|L(i\omega_c)| = K\sqrt{b}\frac{|G_1(i\omega_c|}{\omega_c} = 1$ med $|G_1(i\omega_c)| = 0.08$ från Bodediagrammet valet $K = 13.7$.*

Uppgift 5.
Vi skall i denna uppgift studera ett aktivt stötdämparsystem för en bil. I detta system ersätts fjädrar och stötdämpare av ett hydraulservo, vars kraft styrs av en regulator, som mäter avståndet mellan kaross och marken och försöker hålla detta konstant kring referensvärdet (som sätts till 0).



Hydraulservot beskrivs av överföringsfunktionen

$$G_{\text{servo}}(s) = \frac{1}{s/10+1}$$

och bilens dynamik beskrivs av

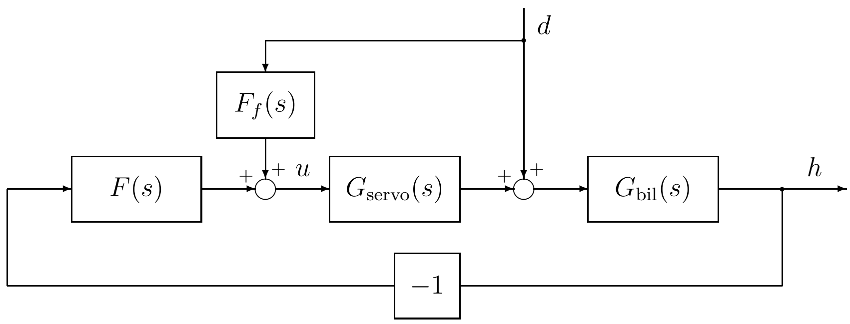
$$G_{\text{bil}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Regulatorn har överföringsfunktionen

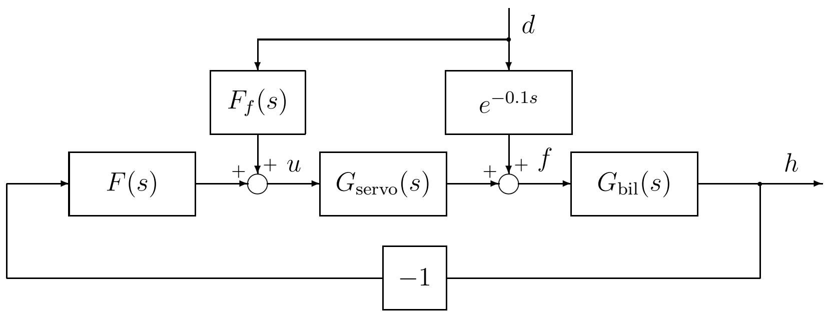
$$F(s) = 2\left(\frac{3}{s}+1\right)$$

Slutligen kan vägens höjdförändringar ses som en laststörning d.

a. För att förbättra egenskaperna på ojämna vägar har en laseravståndsmätare installerats längst fram i bilen. På så sätt kan störningen d mätas innan den påverkar bilen, och vi kan använda denna mätning för en framkoppling $F_f(s)$ enligt blockschemat nedan. Hur skall $F_f(s)$ väljas så att störningen inte skall synas alls i utsignalen h? (2 p)



b. I själva verket fungerar lasermätningen så bra att den mäter störningen 0.1 s *innan* den påverkar bilen. Blockschemat förändras nu enligt nedan. Hur skall kompenseringen $F_f(s)$ ändras så att störningen d återigen inte slår igenom i utsignalen h? (1 p)



c. Anta samma situation som i (b) men att $F_f(s)$ förblir oförändrad från (a), dvs det kommer inte längre att vara en perfekt utsläckning av störningen. Visa att en störning med frekvensen $\omega = 10\pi$ i själva verket kommer att påverka bilen med dubbla amplituden jämfört med fallet utan framkoppling.
Ledning: Jämförelsen mellan de två fallen kan med fördel göras genom att bilda kvoten av motsvarande överföringsfunktioner. (2 p)

Lösning:

a. *Överföringsfunktionen från d till h blir*

$$G_{dh}(s) = \frac{(1 + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

dvs för att ingen påverkan på h skall fås, så bör kompenseringen väljas som

$$F_f(s) = -1/G_{\text{servo}}(s) = -(1 + s/10)$$

Detta är en stabil kompensering, men den innehåller en ren derivering.

b. *Överföringsfunktionen modifieras nu till*

$$G_{dh}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

vilket ger en ändrad kompensering enligt

$$F_f(s) = -e^{-0.1s}/G_{\text{servo}}(s) = -e^{-0.1s}(1 + s/10)$$

Jämfört med (a) innebär detta bara en extra fördröjning av framkopplingen.

c. Överföringsfunktionen från d till h är med framkopplingen från (a):

$$G_{dh}^{\text{ff}}(s) = \frac{(e^{-0.1s} + F_f(s)G_{\text{servo}}(s))G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)} = \frac{(e^{-0.1s} - 1)G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

medan motsvarande överföringsfunktion utan framkoppling är

$$G_{dh}(s) = \frac{e^{-0.1s}G_{\text{bil}}(s)}{1 + F(s)G_{\text{servo}}(s)G_{\text{bil}}(s)}$$

Studera nu kvoten

$$Q(s) = \frac{G_{dh}^{\text{ff}}(s)}{G_{dh}(s)} = \frac{e^{-0.1s} - 1}{e^{-0.1s}}$$

Det gäller att $|Q(i\omega)| = |e^{-i\cdot 0.1\omega} - 1| \leq 2$ *och för* $\omega = 10\pi$ *fås*

$$|Q(i \cdot 10\pi)| = |e^{-i\pi} - 1| = |-1 - 1| = 2$$

dvs denna störningsfrekvens slår igenom med dubbla amplituden med framkoppling jämfört med fallet utan framkoppling.

SLUT!