

ERE 091 Reglerteknik F Tentamen 2023-08-18

14.00 - 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Max 4 A4-blad med egna anteckningar på fram- och baksida

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds på tid och plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

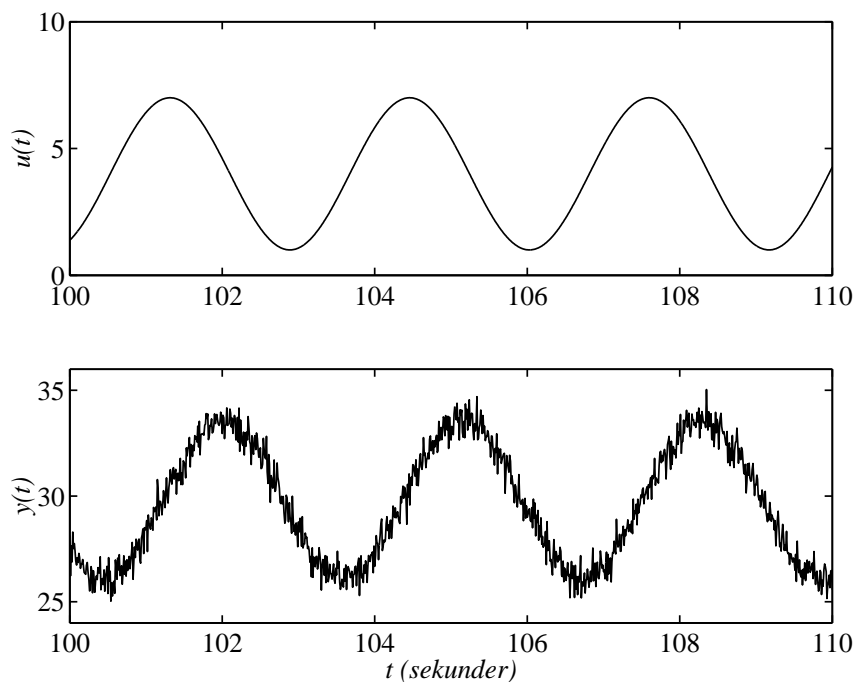
Uppgift 1.

- a. Ett andra ordningens system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t - 1)$$

där som vanligt u är insignal och y utsignal. Bestäm systemets stegsvar. (2 p)

- b. En frekvensanalys har genomförts på en process med resultatet nedan. I figuren visas insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$, den senare uppmätt med mätbrus. Anta att processen kan beskrivas som ett första ordningens system utan dödtid. Bestäm (ungefärligt) förstärkning och tidskonstant. *Ledning:* Bortse från offset i signalerna, dvs det är variationerna kring medelvärden som är av intresse! (2 p)



- c. Ett återkopplat system är stabilt och har dessutom en stabil kretsöverföring. Anta att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller följande krav:

$$|S(i\omega)| \leq 2$$

Vilken amplitudmarginal garanterar detta? (2 p)

- d. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

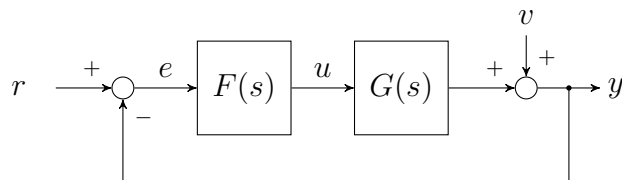
$$\dot{y}(t) + \sin y(t) = \cos u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring den stationära lösning som ges av $u = y = \pi/4$ och bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion från insignal till utsignal. (2 p)

- e. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + s + 1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



Vad blir det kvarstående felet då v är en stegstörning med amplituden 10 (anta $r = 0$)? (2 p)

Lösning:

- a. Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

Utan tidsfördröjningen ges stegsvaret av ($U(s) = 1/s$)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (y(t) = 0, \quad t < 0)$$

Med en tidsfördröjning på 1 s fås istället ($t \rightarrow t - 1$)

$$y(t) = t - 2 + e^{-(t-1)}, \quad t \geq 1 \quad (y(t) = 0, \quad t < 1)$$

b. Följande kan utläsas av registreringen (ungefärliga siffror):

- Periodtid c :a 3.1 s, vilket svarar mot $\omega \approx 2\pi/3.1 \approx 2$.
- Tidsförskjutning på c :a 0.7 s, vilket svarar mot en fasförskjutning $\varphi \approx \frac{0.7}{3.1} \cdot 2\pi \approx 1.4$ rad.
- Förstärkning på c :a 1.1.

För ett första ordningens system $G(s) = K/(1 + sT)$ ges förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen ω av:

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$$

Då kan K och T bestämmas:

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega T = -1.4 \quad \Rightarrow \quad T = \tan(1.4)/2 \approx 2.9$$

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad K \approx 5.9 \cdot 1.1 \approx 6.5$$

c. Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller eftersom $L(s)$ är stabil. Alltså passerar $L(i\omega)$ till höger om den kritiska punkten $(-1, 0)$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = 1/(1 + L(s))$, där $L(s)$ är kretsöverföringen, vilket ger

$$|S(i\omega)| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |1 + L(i\omega)| \geq 1/2$$

dvs avståndet från $L(i\omega)$ till punkten -1 är större än 0.5 . Alltså korsar kurvan negativa realaxeln till höger om punkten $(-0.5, 0)$, vilket innebär att amplitudmarginalen uppfyller $A_m \geq 2$.

d. Linjärisering ger

$$\Delta \dot{y}(t) + \cos \pi/4 \cdot \Delta y(t) = -\sin \pi/4 \cdot \Delta u(t)$$

vilket efter Laplace-transformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{1/\sqrt{2}}{s + 1/\sqrt{2}}$$

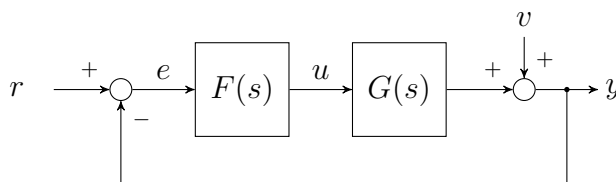
e. Kvarstående felet kan beräknas med användning av slutvärdessatsen:
 $e_\infty = (1/(1 + KG(0))) \cdot 10 = 2$.

Uppgift 2.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{1+4s}e^{-s/2}$$

skall återkopplas med regulatorn $F(s)$ enligt blockschemat nedan:



- a. Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna, så att nedanstående specifikationer uppfylls:

1. Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar v .
2. Systemets fasmarginal ska vara $\varphi_m = 60^\circ$.
3. Skär(överkorsnings-)frekvensen får inte understiga $\omega_c = 1$ rad/s.

(3 p)

- b. Skissa (huvuddragen av) kretsöverföringens amplitud- och faskurvor i ett Bodediagram (*OBS! diagram finns sist i tesen*) och verifiera att kravspecifikationerna 2 och 3 uppfylls av din design i (a). (2 p)

Lösning:

- a. Krav 1 innebär att integralverkan behövs, dvs pröva en PI-regulator $F(s) = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$. Vid $\omega_c = 1$ har processen fasförskjutningen $\arg G(i\omega_c) = -\arctan 4\omega_c - \omega_c/2 \approx -1.83$ rad $= -104.6^\circ$. Med $\varphi_m = 60^\circ$, så kan vi alltså låta regulatorn ge ytterligare $180 - 60 - 104.6 = 15.4^\circ$ fasförskjutning vid $\omega = \omega_c = 1$. Detta ger $\arg F(i\omega_c) = \arctan T_i \omega_c - \pi/2 = -15.4 * \pi/180$ eller $T_i = \tan 74.6^\circ \approx 3.6$. Justera slutligen förstärkningen så att $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = (K_p/T_i)\sqrt{1+T_i^2} \cdot 10/\sqrt{17} = 1$, vilket ger $K_p = 0.40$.

- b. Kretsöverföringen är $L(s) = 1.1 \frac{1+3.6s}{s(1+4s)}e^{-s/2}$, vilket ger

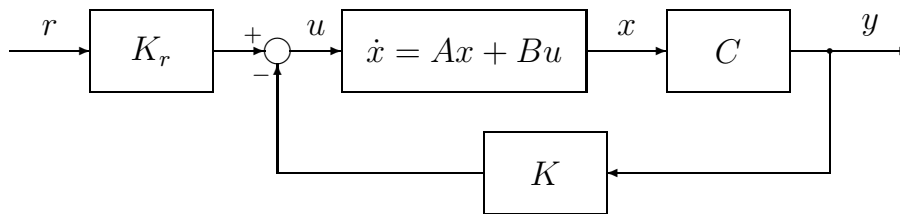
$$|L(i\omega)| = 1.1 \frac{\sqrt{1+(3.6\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+(4\omega)^2}}$$

$$\arg L(i\omega) = -\pi/2 + \arctan 3.6\omega - \arctan 4\omega - \omega/2$$

Amplituddelen har LF-asymptoten $|L(i\omega)| \approx 1.1/\omega$ och HF-asymptoten $|L(i\omega)| \approx 0.9/\omega$. Skissen kompletteras med några punkter, vilket verifierar att krav 2 och 3 är uppfyllda.

Uppgift 3.

Betrakta följande återkopplade system:



där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [4 \ 0]$$

dvs r, u och y är skalärer, men tillståndsvektorn x har två element.

- Bestäm K så att det återkopplade systemet får en pol i -1. (3 p)
- Bestäm K_r så att ärvärdet y är lika med börvärdet r för långsamma börvärdesändringar. (2 p)

Lösning:

- Överföringsfunktionen från u till y ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [4 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-4s + 4}{s^2 + s + 2}$$

Överföringsfunktionen från r till y blir då

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + s + 2 + K(-4s + 4)} = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + (1 - 4K)s + 4K + 2}$$

En pol skall ligga i $s = -1$, dvs nämnaren i G_{ry} skall bli 0 för $s = -1$, vilket ger kravet $K = -1/4$.

- Med K enligt ovan får vi

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r(-4s + 4)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{K_r(-4s + 4)}{(s + 1)^2}$$

dvs även den andra polen hamnar i -1. Kravet på följsning av långsamma börvärdesändringar ger

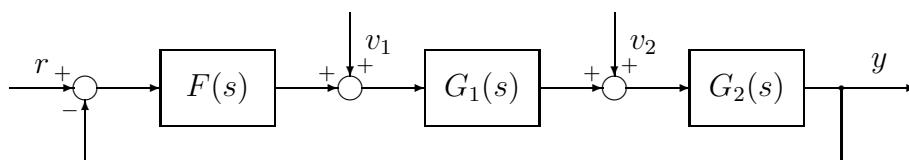
$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow K_r = 1/4.$$

Uppgift 4.

Vi skall studera två alternativa regulatorstrukturer för att lösa ett och samma reglerproblem.

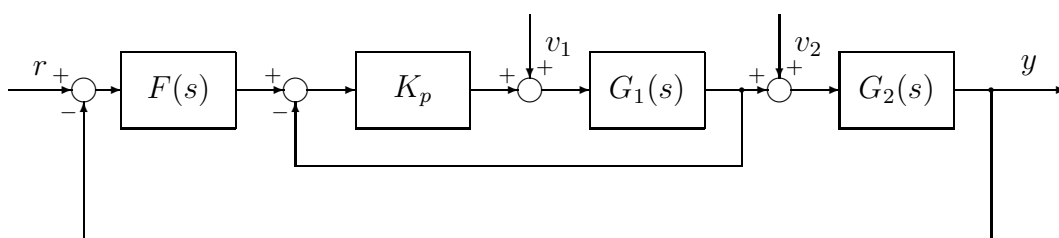
- a. Betrakta det återkopplade systemet nedan. Systemet består av två delsystem med överföringsfunktioner $G_1(s)$ och $G_2(s)$ och påverkas av två störningar v_1 och v_2 . Regulatorn F är en P-regulator. Överföringsfunktionerna ges av:

$$F(s) = 5 \quad G_1(s) = \frac{3}{1 + 4s} \quad G_2(s) = \frac{1}{s}$$



Uppgift: Bestäm det kvarstående felet, då v_1 är en stegformad störning med amplituden 2. (2 p)

- b. Med avsikten att snabbare kompensera bort störningen v_1 , så införs nu en kaskadreglering enl figuren nedan.



Uppgift: Bestäm för vilka värden på K_p man får en förbättring jämfört med (a), dvs ett mindre kvarstående fel (med samma stegstörning v_1). (3 p)

Lösning:

- a. Det slutna systemets överföringsfunktion från v_1 till y är

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1 + 4s) + 5 \cdot 3}$$

Av detta framgår att slutna systemet är stabilt (positiva koefficienter i ett 2:a ordningens kar.pol.), dvs vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s) + 5 \cdot 3} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken, eftersom $e = r - y$.

b. Om vi kallar utsignalen från blocket G_1 för y_1 , så gäller

$$Y_1 = \frac{G_1}{1 + K_p G_1} V_1 - \frac{K_p G_1 F}{1 + K_p G_1} Y$$

och tillsammans med $Y = G_2 Y_1$ ger detta, efter att ha löst ut Y :

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + K_p G_1 + K_p F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1+4s) + 3K_p s + 15K_p}$$

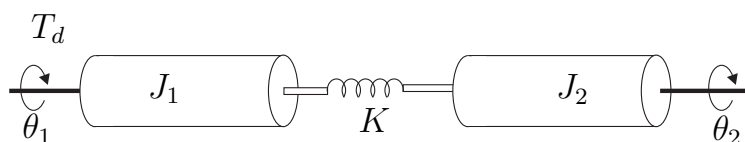
På samma sätt som i (a) ser man att det slutna systemet är stabilt, och slutvärdessatsen kan användas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s) + 3K_p s + 15K_p} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5K_p}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken som i (a). Slutsatsen är att man får ett mindre kvarstående fel om $K_p > 1$.

Uppgift 5.

Betrakta drivaxeln i figuren nedan.



Det drivande momentet $T_d(t)$ är systemets insignal. Rotationsvinkeln för de två axelhalvorna med tröghetsmomenten J_1 respektive J_2 är $\theta_1(t)$ respektive $\theta_2(t)$. Vinkelhastigheten för de två halvorna är $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ respektive $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$. De två axelhalvorna förbinds med en torsionsfjäder, och momentet över denna är proportionellt mot vinkelskillnaden med proportionalitetskonstanten K . Friktionen försummas.

- Bestäm en tillståndsmodell på (A, B, C) -form för systemet med utnyttjande av tre tillståndsvariabler: $x_1 = \theta_1 - \theta_2$, $x_2 = \omega_1$ och $x_3 = \omega_2$. Låt utsignalen vara vinkelhastigheten ω_2 på höger axelhalva. (3 p)
- Avgör om utsignalen $\omega_2(t)$ alltid kommer att gå mot 0 då det drivande momentet $T_d(t)$ går mot 0. (2 p)

Lösning:

- Newtons lag för roterande system ger*

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1(t) &= T_d(t) - K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ J_2 \dot{\omega}_2(t) &= K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \end{aligned}$$

Med de föreslagna tillståndsvariablerna fås

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{\omega}_1(t) = -\frac{K}{J_1} x_1(t) + \frac{1}{J_1} T_d(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}_2(t) = \frac{K}{J_2} x_1(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -K/J_1 & 0 & 0 \\ K/J_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \end{bmatrix} T_d(t) \\ y(t) &= \omega_2(t) = Cx(t) = [0 \quad 0 \quad 1] x(t) \end{aligned}$$

b. Lösning av systemekvationerna (alternativt direkt beräkning av överföringsfunktionen) ger

$$Y(s) = \frac{K}{J_1 J_2} \frac{1}{s(s^2 + K/J_1 + K/J_2)} T_d(s)$$

På grund av den rena integratorn, så följer inte av $T_d(t) \rightarrow 0$ att $y(t) \rightarrow 0$. Man kan också direkt verifiera i systemekvationerna att en lösning med $T_d = 0$ ges av $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = \text{konst}$. Att axeln fortsätter att rotera utan drivande moment beror på att friktionen försummas.

SLUT!