CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 091 Reglerteknik F
Tentamen 2023-04-05

08.30 - 12.30

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Max 4 A4-blad med egna anteckningar på fram- och baksida

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds på tid och plats som anslås på Canvas. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

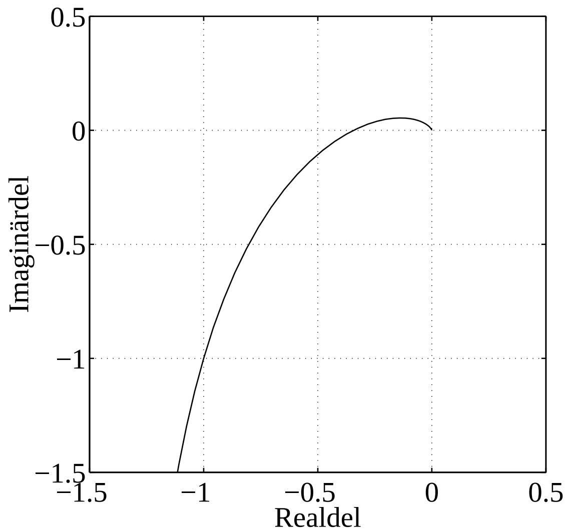
Uppgift 1.

a. Ett andra ordningens system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t-2)$$

där som vanligt u är insignal och y utsignal. Bestäm systemets stegsvar. (2 p)

b. Ett stabilt system med Nyquistkurva enligt figur återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(y_r(t) - y(t)), K \geq 0$. Hur skall K väljas för att fasmarginalen ska bli 45°? (2 p)



c. Ett system, som beskrivs av tillståndsmodellen nedan, skall förses med en tillståndsåterkoppling, som ger det återkopplade systemet en reell, stabil dubbelpol i $s = -a$ för något positivt a. Bestäm det värde på a som ger ett så snabbt system som möjligt under villkoret att koefficienterna i återkopplingen (säg l_1 och l_2) vardera har ett belopp som är högst lika med 1.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

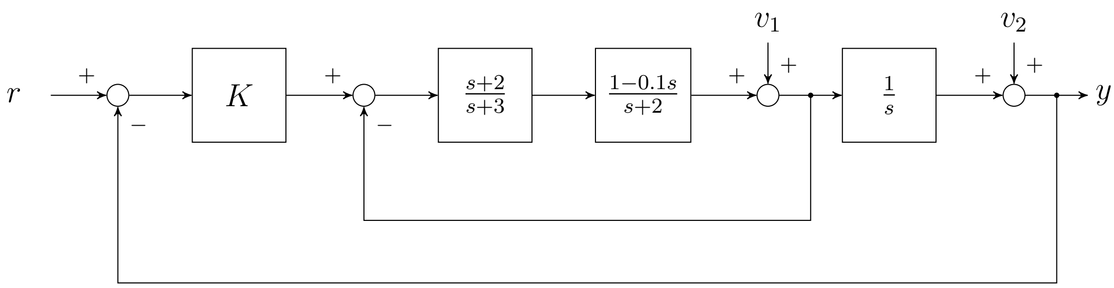
(2 p)

d. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$10\dot{y}(t) + y^2(t) = u(t)$$

Systemet har två stationära lösningar med den konstanta insignalen $u = 1$. Linjärisera differentialekvationen kring de stationära lösningarna och bestäm motsvarande överföringsfunktioner från insignal till utsignal. (2 p)

e. Beräkna överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{V_1(s)}$ för det återkopplade reglersystemet nedan. För vilka värden på K är systemet stabilt? (2 p)



Lösning:

a. Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$

Utan tidsfördröjningen ges stegsvaret av ($U(s) = 1/s$)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (y(t) = 0,\ t < 0)$$

Med en tidsfördröjning på 2 s fås istället ($t \to t-2$)

$$y(t) = t - 3 + e^{-(t-2)}, \quad t \geq 2 \quad (y(t) = 0,\ t < 2)$$

b. Eftersom systemet är stabilt, så kan vi använda det förenklade Nyquistkriteriet. I figuren kan avläsas att Nyquistkurvan skär punkten $(-1,-1)$ där fasen är $-135°$. Om denna punkt "dras in" till enhetscirkeln, så fås fasmarginalen $45°$. Förstärkningen som krävs är $1/\sqrt{2}$.

c. *Slutna systemets karakteristiska polynom är*

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 + l_1 & 3 + l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (4 + l_1)\lambda + 3 + l_2$$

Vi önskar polynomet $(\lambda + a)^2 = \lambda^2 + 2a\lambda + a^2$, *och identifiering av koefficienter ger* $l_1 = 2a - 4$ *och* $l_2 = a^2 - 3$. *Att göra* a *så stort som möjligt betyder alltså att göra* l_1 *och* l_2 *så stora som möjligt, dvs lika med 1. Insatt i resp uttryck ger detta* $a = 5/2$ *resp* $a = 2$. *Det är alltså* l_2 *som är begränsande och största värdet på* a *blir* $a = 2$, *vilket svarar mot* $l_1 = 0$ *och* $l_2 = 1$.

d. *De stationära lösningarna fås genom att sätta* $u = u_0 = 1$ *och* $\dot{y} = 0$, *vilket ger två lösningar:* $y_0 = 1$ *respektive* $y_0 = -1$. *Den linjäriserade diff-ekvationen blir, uttryckt i avvikelser från de stationära värdena:* $10\dot{\Delta y} + 2y_0\Delta y = \Delta u$. *Laplacetransformering ger motsvarande överföringsfunktioner:*

$$G_1(s) = \frac{1}{10s + 2} \qquad G_{-1}(s) = \frac{1}{10s - 2}$$

e. *Kalla överföringsfunktionerna i respektive block från vänster till höger* F_1, F_2, G_2 *och* G_1. *Då fås genom enkel blockschemaräkning att*

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1}{1 + F_2G_2 + F_1F_2G_1G_2} = \frac{1/s}{1 + \frac{1-0.1s}{s+3} + \frac{K}{s} \cdot \frac{1-0.1s}{s+3}}$$

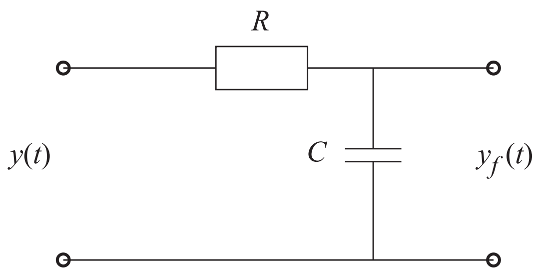
där det är viktigt att notera att en faktor $(s + 2)$ *förkortats bort—detta äventyrar dock inte stabiliteten, eftersom pol/nollställes-paret ligger i vänstra halvplanet. Efter förenkling fås*

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{s + 3}{s(s + 3) + s(1 - 0.1s) + K(1 - 0.1s)} = \frac{s + 3}{0.9s^2 + s(4 - 0.1K) + K}$$

Av detta framgår att systemet är stabilt för $0 < K < 40$ *(kriteriet är att koefficienterna i det karakteristiska polynomet skall vara positiva).*

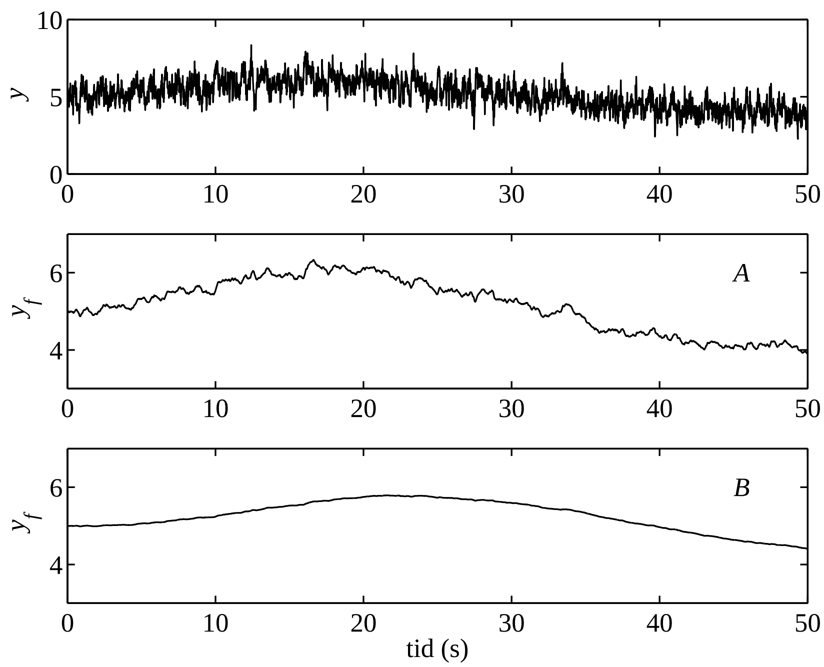
Uppgift 2.

Ett RC-filter enligt figuren nedan kan användas för att filtrera bort brus i en analog mätsignal.



a. Bestäm överföringsfunktionen från givarsignal y till filtrerad signal y_f. (2 p)

b. Vi har en resistans $R = 1000\,k\Omega$ och två olika kondensatorer, en med $C = 10\,\mu F$ och en med $C = 1\,\mu F$. I figuren nedan visas den ofiltrerade signalen y och de filtrerade signalerna för de två kapacitanserna. Vilken kapacitans (10 eller 1 μF) hör ihop med vilken plot (A eller B)? (2 p)



Lösning:

a. *Resultatet kan fås via Kirchhoffs lagar och definition av kapacitans, alternativt genom en enkel impedansdelning:*

$$Y_f(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + RCs} Y(s)$$

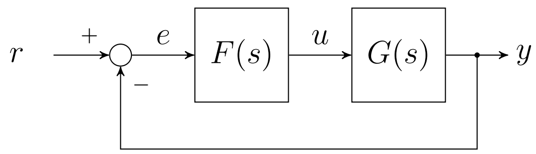
b. *Filtrets tidskonstant är alltså* $T = RC$*, dvs det större värdet på* C *ger större tidskonstant, alternativt lägre bandbredd, vilket ger kraftigare filtrering av signalen. Alltså: A svarar mot* $C = 1$ *och B svarar mot* $C = 10$.

Uppgift 3.
Vi skall i denna uppgift studera det enkelt återkopplade systemet enligt figuren nedan, där processens överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

och regulatorn är en PI-regulator med överföringsfunktionen

$$F(s) = K \cdot \frac{s+1}{s}, \quad K > 0$$



a. Ange bandbredden för det återkopplade systemet som funktion av förstärkningen K. (1 p)

b. Antag att referenssignalen är sinusformad, dvs $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalen $u(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω. (2 p)

c. Antag återigen att $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalens derivata $\dot{u}(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω i intervallet $0 \leq \omega \leq 10$. (3 p)

Lösning:

a. *Det återkopplade systemets överföringsfunktion är*

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K}{s+K}$$

Bandbredden ω_b *ges av*

$$\frac{|G(i\omega_b)|}{|G(0)|} = \frac{K}{\sqrt{\omega_b^2 + K^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vilket ger $\omega_b = K$.

b. *Överföringsfunktionen från referens till styrsignal är*

$$G_{ru} = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)} = K\frac{s+1}{s+K}$$

och kravet att förstärkningen för sinussignaler skall vara mindre än ett ger

$$|G_{ru}(i\omega)| = K\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{K^2+\omega^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(\omega/K)^2}} < 1$$

dvs $K < 1$.

c. *Överföringsfunktionen från referens till styrsignalens derivata är*

$$G_{ru} = \frac{sF(s)}{1+F(s)G(s)} = K\frac{s(s+1)}{s+K}$$

och kravet på förstärkningen ger

$$|G_{rud}(i\omega)| = K\frac{\omega\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{K^2+\omega^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1/\omega^2+1/K^2}} < 1, \quad 0 < \omega < 10$$

Det framgår att täljaren växer och nämnaren avtar med ökande ω*, dvs förstärkningen ökar med* ω*. Därför är kravet för* $\omega = 10$ *bestämmande och vi får villkoret*

$$\frac{\sqrt{1+10^2}}{\sqrt{1/10^2+1/K^2}} < 1,$$

dvs approximativt $K < 0.1$ *(*K *positivt enligt uppgiftens formulering).*

Uppgift 4.
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2-s}{s(1+s)^2}$$

skall återkopplas med en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p\frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}.$$

a. Bestäm parametrarna i regulatorn så att systemets fasmarginal blir minst 50° vid skärfrekvensen (överkorsningsfrekvensen) 0,5 rad/s. (3 p)

b. Bestäm den maximala tidsfördröjning man kan ha i kretsöverföringen utan att det återkopplade systemet blir instabilt.
Ledning: använd designspecifikationen i (a)—du behöver inte ha löst deluppgift (a) för att lösa denna deluppgift! (2 p)

Lösning:

a. *Specifikation:* $\omega_c = 0.5$ *rad/s*, $\varphi_m = 50°$. *Vid önskad skärfrekvens gäller*

$$|G(i\omega_c)| = \frac{\sqrt{4+\omega_c^2}}{\omega_c(1+\omega_c^2)} \approx 3.3.$$
$$\arg G(i\omega_c) = -\pi/2 - \arctan \omega_c/2 - 2\arctan \omega_c \approx 2.74\, rad = -157°,$$

vilket innebär att ett faslyft på $\varphi_{max} = 27°$ *behövs. Detta ger (se formelsamlingen)*

$$b = \frac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}} \approx 2.7$$

och om max faslyft läggs vid ω_c *så gäller* $\tau_d = \sqrt{b}/\omega_c \approx 3.3$. *Slutligen, välj* K_p *så att kretsöverföringen får förstärkningen 1 vid* ω_c*:*

$$K_p = \frac{1}{\sqrt{b}|G(i\omega_c)|} \approx 0.19$$

PD-regulatorn blir alltså

$$F_{PD}(s) = 0.19\frac{1+3.3s}{1+1.2s}.$$

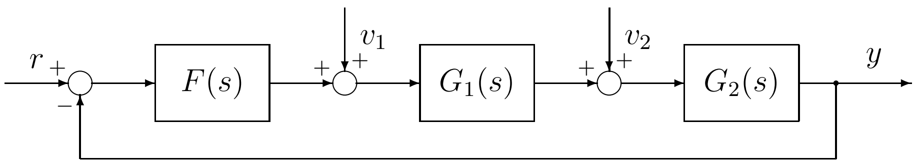
b. *En tidsfördröjning* e^{-sT_d} *ger fasminskningen* $-\omega_c T_d = -0.5T_d$ *rad vid skärfrekvensen. Villkoret för bibehållen stabilitet är alltså att denna fasminskning är (till beloppet) mindre än fasmarginalen:*

$$0.5T_d < \varphi_m \quad \Leftrightarrow \quad T_d < 2\varphi_m = 2\cdot 50 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1.7\, s$$

Uppgift 5.
Vi skall studera två alternativa regulatorstrukturer för att lösa ett och samma reglerproblem.

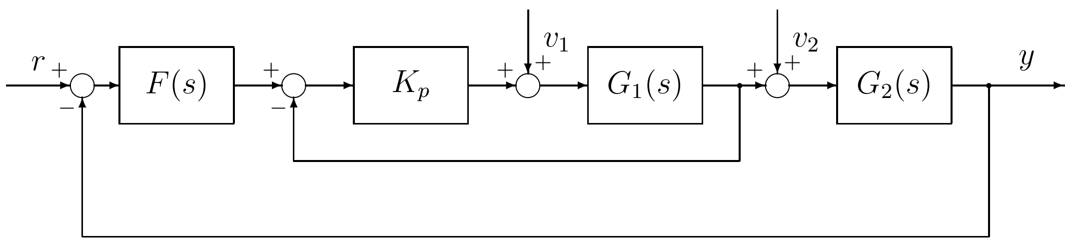
a. Betrakta det återkopplade systemet nedan. Systemet består av två delsystem med överföringsfunktioner $G_1(s)$ och $G_2(s)$ och påverkas av två störningar v_1 och v_2. Regulatorn F är en P-regulator. Överföringsfunktionerna ges av:

$$F(s) = 5 \qquad G_1(s) = \frac{3}{1+4s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$



Uppgift: Bestäm det kvarstående felet, då v_1 är en stegformad störning med amplituden 2. (2 p)

b. Med avsikten att snabbare kompensera bort störningen v_1, så införs nu en kaskadreglering enl figuren nedan.



Uppgift: Bestäm för vilka värden på $K_p > 0$ man får en förbättring jämfört med (a), dvs ett mindre kvarstående fel (med samma stegstörning v_1).

(3 p)

Lösning:

a. Det slutna systemets överföringsfunktion från v_1 till y är

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1+4s) + 5 \cdot 3}$$

Av detta framgår att slutna systemet är stabilt (positiva koefficienter i ett 2:a ordningens kar.pol.), dvs vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s) + 5 \cdot 3} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken, eftersom $e = r - y$.

b. Om vi kallar utsignalen från blocket G_1 för y_1, så gäller

$$Y_1 = \frac{G_1}{1 + K_p G_1} V_1 - \frac{K_p G_1 F}{1 + K_p G_1} Y$$

och tillsammans med $Y = G_2 Y_1$ ger detta, efter att ha löst ut Y:

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + K_p G_1 + K_p F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1+4s) + 3K_p s + 15K_p}$$

På samma sätt som i (a) ser man att det slutna systemet är stabilt, och slutvärdessatsen kan användas:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s) + 3K_p s + 15K_p} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5K_p}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken som i (a). Slutsatsen är att man får ett mindre kvarstående fel om $K_p > 1$.

SLUT!