CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE091 Reglerteknik F
Övningstentamen 2022

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Max 4 A4-blad med egna anteckningar på fram- och baksida

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den ... kl 12-13 i .... Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

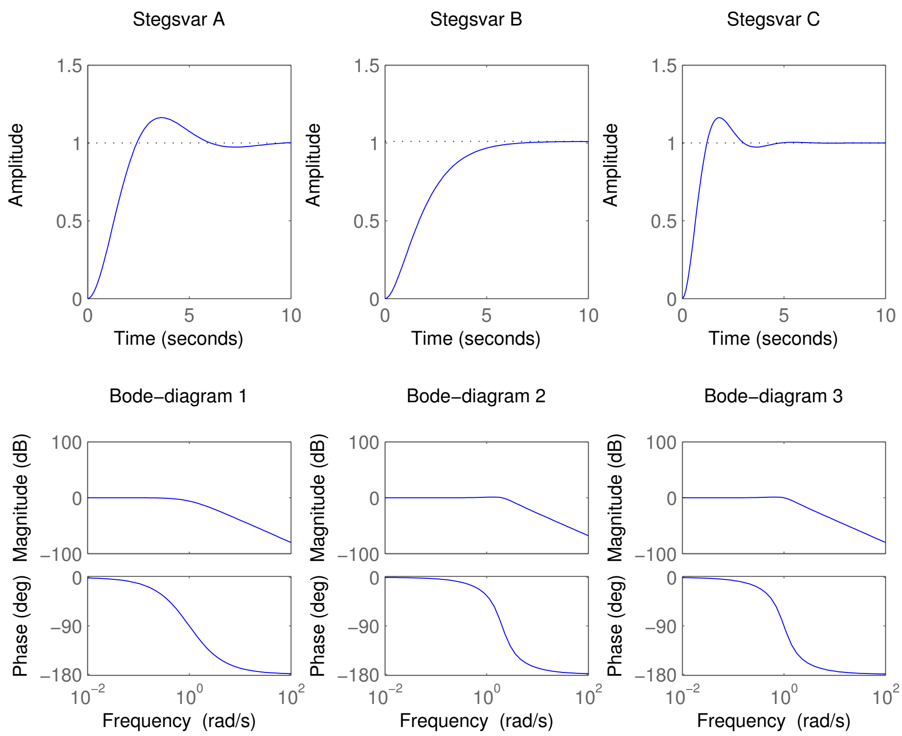
Uppgift 1.

a. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett dynamiskt system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t-2)$$

Låt insignalen vara $u(t) = \sin \omega t$. Bestäm $y(t)$ för stora t ($t \to \infty$). (2 p)

b. Figuren nedan visar stegsvar och Bode-diagram för tre olika system. Para ihop de figurer som hör ihop, dvs beskriver samma system, och motivera ditt svar! (2 p)



c. Ett andra ordningens system beskrivet av

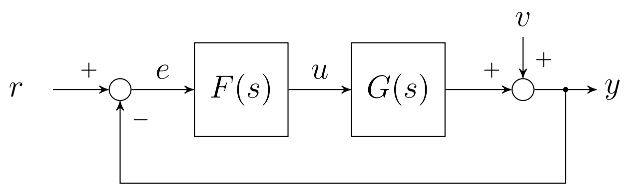
$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = u(t)$$

återkopplas med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet. För vilka värden på K kommer $y(t)$ alltid att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? (2 p)

d. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



Vad blir det kvarstående felet då v är en stegstörning med amplituden 10 (anta $r = 0$)? (2 p)

e. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$10\,\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u^2(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring $u = 1$ och bestäm överföringsfunktionen från insignal till utsignal. (2 p)

Lösning:

a. *Laplace-transformering (med initialvillkoren 0) ger*

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-2s}U(s),$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Eftersom $G(s)$ är strikt stabil, så ges utsignalen för stora t av

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \\ &= \frac{3}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \sin(\omega t - 2\omega - \arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

b. *Stegsvaren med översläng (A, C) svarar mot överföringsfunktioner med en resonanstopp (2, 3), och det snabbare stegsvaret C motsvaras av en högre brytfrekvens i 2. Alltså: A-3, B-1, C-2.*

c. *Kretsöverföringen blir* $L(s) = \frac{K}{s(s+3)}$, *dvs det återkopplade systemet har överföringsfunktionen*

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

Polerna ges av den karakteristiska ekvationen $s^2 + 3s + K = 0$, *som har lösningar i vänstra halvplanet (lös ut rötterna!) för alla* $K > 0$. *Det sökta stabilitetsvillkoret är alltså* $K > 0$.

d. *Kvarstående felet kan beräknas med användning av slutvärdessatsen:* $e_\infty = (1/(1 + KG(0)) \cdot 10 = 2$.

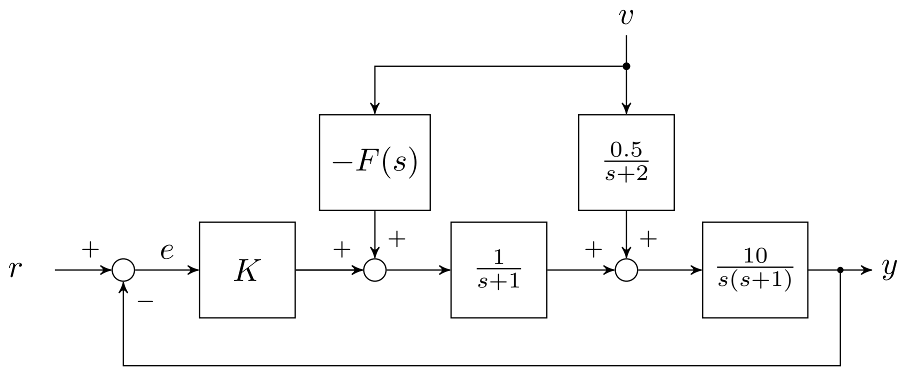
e. *Med insignalen* $u = u_0 = 1$ *fås den stationära lösningen* $y = y_0 = 1$. *Med* $\Delta u = u - u_0$ *och* $\Delta y = y - y_0$ *ges den linjäriserade diff-ekvationen av*

$$10\,\Delta\ddot{y}(t) + \Delta\dot{y}(t) + \Delta y(t) + y_0 = u_0^2 + 2u_0\Delta u(t)$$

vilket efter Laplace-transformering ger

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{10s^2 + s + 1}.$$

Uppgift 2.
Blockschemat nedan visar ett reglersystem, innehållande en återkoppling med en P-regulator och en framkoppling från en mätbar störning v.



a. Hur påverkas systemets stabilitet av framkopplingen? Motivera! (1 p)

b. Bestäm P-regulatorns förstärkning K så att amplitudmarginalen blir 2.5. (2 p)

c. Bestäm framkopplingsfiltret $F(s)$ så att störningen avkopplas helt. (2 p)

Lösning:

a. *Stabiliteten påverkas inte, eftersom framkopplingen ligger utanför återkopplingsslingan, dvs systemets karakteristiska ekvation innehåller inga delar från framkopplingen.*

b. *Kretsöverföringen*

$$L(s) = \frac{10K}{s(s+1)^2}$$

har fasen $-180°$ *för* $\omega = 1$, *vilket innebär att* K *kan bestämmas ur relationen*

$$|L(i \cdot 1)| = \frac{10K}{2} = 1/2.5$$

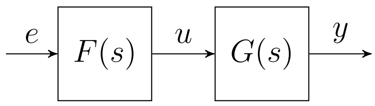
vilket ger $K = 0.08$.

c. *För att inverkan från* v *skall elimineras helt krävs att*

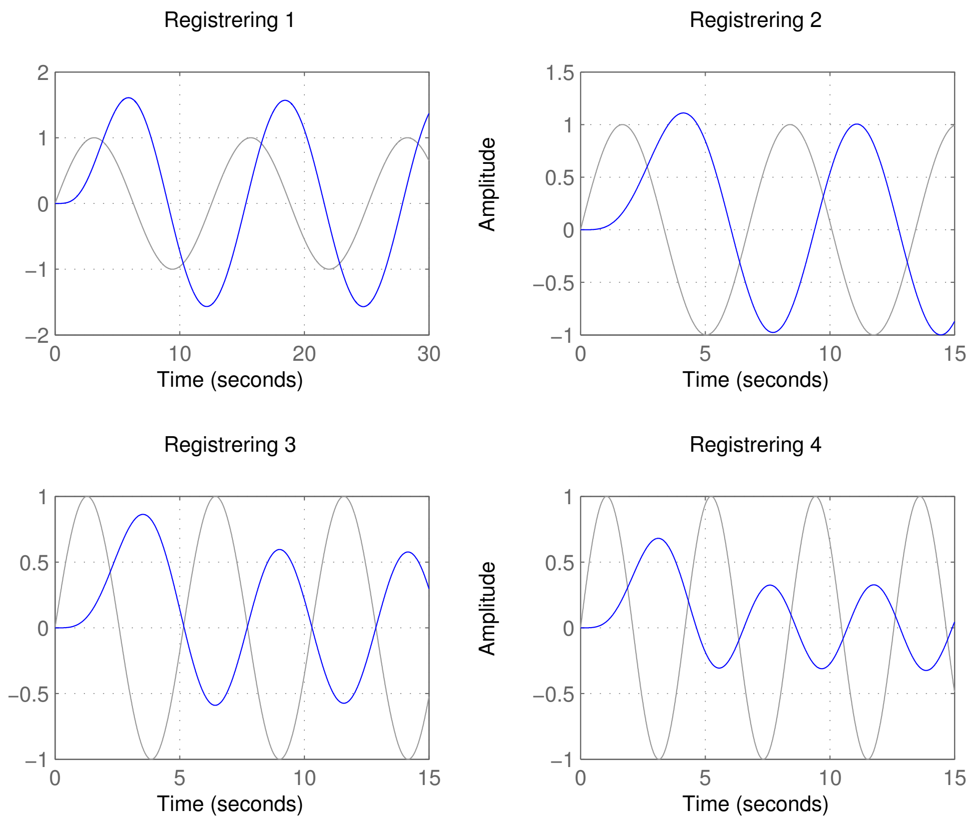
$$\frac{1}{s+1}F(s) = \frac{0.5}{s+2}$$

vilket ger $F(s) = 0.5\frac{s+1}{s+2}$.

Uppgift 3.
En kollega till dig har designat en regulator, som du skall ta i drift. Du vill gärna övertyga dig om att det slutna systemet kommer att vara stabilt, innan du sluter loopen. Till din hjälp har du resultaten från några experiment utförda i *open loop*, där regulatorns insignal e varierats som en sinussignal, och såväl regulatorns insignal som processens utsignal y registrerats. Se blockschemat nedan, där $F(s)$ är regulatorns överföringsfunktion och $G(s)$ är processens.



Fyra olika registreringar från dessa experiment visas nedan. Insignalen är alltså $e(t) = \sin(\omega t)$ för olika värden på ω.



a. Förklara hur man utifrån dessa registreringar har goda skäl att anta att det slutna systemet blir stabilt efter att reglerkretsen slutits. (3 p)

b. Utgående från att det slutna systemet är stabilt, beräkna fas- och amplitudmarginaler. Approximativa värden räcker, men motivera! (2 p)

Lösning:

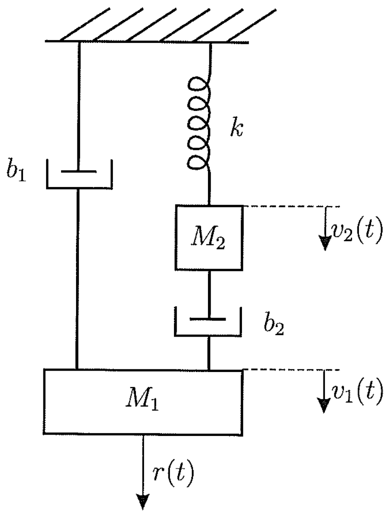
a. *Registrering 2 visar att Nyquistkurvan ($L(i\omega) = F(i\omega)G(i\omega)$) går in i enhetscirkeln (förstärkningen är 1!) i 3:e kvadranten (fasförskjutning motsvarande mellan 1/4 och 1/2 av en period); registrering 3 visar att kurvan skär negativa realaxeln (fasförskjutning $-180°$!) till höger om den kritiska punkten (förstärkningen mindre än 1). Det tyder på att det förenklade Nyquistkriteriet kan tillämpas (processen är stabil) och att det slutna systemet är stabilt.*

b. *Registrering 2 ger fasmarginalen: periodtiden är c:a 7 s och tidsförskjutning insignal $\rightarrow$ utsignal är c:a 2.7 s. Detta ger* $\arg L(i\omega_c) \approx -\frac{2.7}{7}360 \approx -140°$, *dvs fasmarginalen är c:a* $40°$.
Registering 3 ger amplitudmarginalen: förstärkningen är c:a 0.6, dvs amplitudmarginalen c:a $1/0.6 \approx 1.7$.

Uppgift 4.
Det mekaniska systemet nedan består av två massor M_1 och M_2, två viskösa dämpare med dämpkonstanter b_1 och b_2, en fjäder med fjäderkonstant k samt en pålagd kraft $r(t)$. Hastigheterna för de två massorna betecknas v_1 och v_2.

a. Välj tillståndsvariabler och ta fram en tillståndsmodell för systemet.
(3 p)

b. Beräkna överföringsfunktionen från kraften r till hastigheten v_1.
Ledning: Du behöver *inte* invertera en 3×3 matris för att göra detta!
(2 p)



Lösning:

a. *Med tillståndsvariablerna v_1, v_2 och fjäderkraften F_k fås från en kraftbalans:*

$$
\begin{aligned}
M_1 \frac{dv_1(t)}{dt} &= r(t) - b_1 v_1(t) - b_2(v_1(t) - v_2(t)) \\
M_2 \frac{v_2(t)}{dt} &= b_2(v_1(t) - v_2(t)) - F_k(t) \\
\frac{dF_k(t)}{dt} &= k v_2(t)
\end{aligned}
$$

Genom att dividera med M_1 respektive M_2 fås en tillståndsmodell på standardform.

b. Överföringsfunktionen kan fås genom att ställa upp modellen på matrisform och beräkna $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, men för att undvika att invertera en 3×3-matris kan man istället direkt Laplace-transformera ekvationerna i a):

$$
\begin{aligned}
(M_1 s + b_1 + b_2)V_1(s) &= R(s) + b_2 V_2(s) \\
(M_2 s + b_2)V_2(s) &= b_2 V_1(s) - \frac{k}{s} V_2(s)
\end{aligned}
$$

Lös ut V_2 som funktion av V_1 ur den andra ekvationen:

$$V_2(s) = \frac{b_2 s}{M_2 s^2 + b_2 s + k} V_1(s)$$

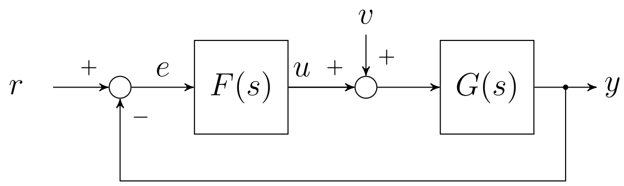
Insatt i den första ekvationen fås nu den sökta överföringsfunktionen:

$$V_1(s) = \frac{M_2 s^2 + b_2 s + k}{(M_2 s^2 + b_2 s + k)(M_1 s + b_1 + b_2) - b_2^2 s} R(s)$$

Uppgift 5.
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)^2}$$

skall återkopplas enligt figuren nedan:



Kraven på reglersystemet är att kvarstående fel efter en stegstörning v skall elimineras, samt att fasmarginalen skall vara $\varphi_m = 50°$.

a. Dimensionera en regulator, som uppfyller kraven. Välj skärfrekvens (överkorsningsfrekvens) enligt $\omega_c = 0.4\,\omega_{150}$, där $\arg G(i\omega_{150}) = -150°$. (3 p)

b. Fasmarginalen är ett mått på hur regulatorn klarar av att hantera osäkerheter i processen. Vilken är (med den givna specifikationen) den största tidsfördröjningen i processen som kan tillåtas, innan det återkopplade systemet blir instabilt? (2 p)

Lösning:

a. *Välj en PI-regulator* $F(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$, *eftersom kvarstående fel skall elimineras. Regulatorn dimensioneras i följande steg:*

   (a) *Skärfrekvensen väljs från* $\arg G(i\omega_{150}) = -90° - 2\arctan\omega_{150}/8 = -150°$, *som ger* $\omega_{150} = 8\tan 30° \approx 4.6$ *rad/s och* $\omega_c \approx 1.85$ *rad/s.*

   (b) *Från* $\arg G(i\omega_c) = -116°$ *följer att PI-regulatorn kan tillåtas sänka fasen med* $14°$ *(180-116-50). Detta ger* $\arg F(i\omega_c) = \arctan(\omega_c T_i) - 90° = -14°$, *dvs* $T_i \approx 2.17$.

   (c) *Slutligen ger villkoret* $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = 1$ *att* K_p *skall väljas som*

$$K_p = \frac{\omega_c(\omega_c^2 + 8^2) \cdot T_i\omega_c}{\sqrt{(1 + (T_i\omega_c)^2}} \approx 121$$

b. En tidsfördröjning T_d ger fasvridningen $-\omega T_d$. Fasmarginalen på $50°$ blir 0 (dvs man når gränsen för instabilitet) om följande villkor är uppfyllt:

$$-\omega_c T_d = -50\frac{\pi}{180}$$

som ger $T_d = 0.47$ s.

SLUT!