Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 2 juni 2016 kl. 14:00

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (Lärare: Simon Pedersen, ☎5744, `pesimon@chalmers.se`)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på inlämningsuppgift 1-2, projektarbete och laboration 1-2, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration 1-2.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas den 13 april 2016 (pingpong.chalmers.se). Granskning av tentamensresultaten sker den 13 juni kl. 10:00-11:00 i E-huset på våning 5, rum 5439, Johan Karlsson.

Lycka till!

Uppgifter

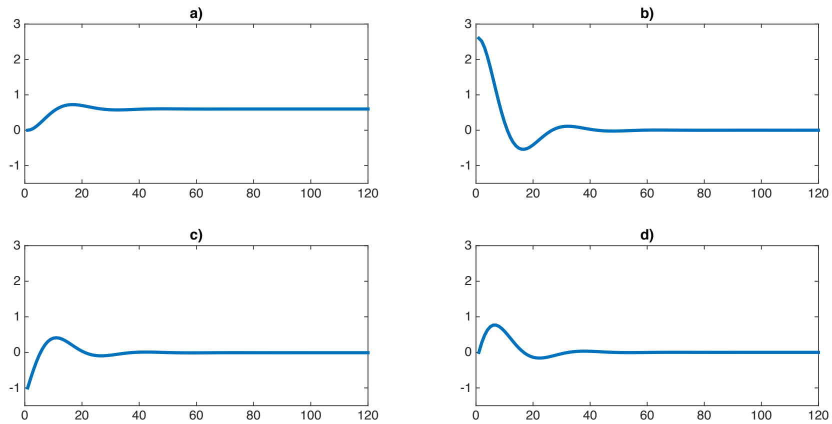
1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Beskriv skillnaden mellan en proper och en strikt proper överföringsfunktion. (**1 poäng**)

   b) Vad innebär det att en tillståndsrepresentation är på minimal form? Hur kan man testa om en tillståndsmodell är minimal? (**1 poäng**)

   c) Definiera amplitudmarginal, fasmarginal och stabilitetsmarginal, till exempel i ett Nyquistdiagram. Utred sambandet mellan stabilitetsmarginal och känslighetsfunktion. (**1 poäng**)

2. Para ihop och förklara!



Figur 1: Steg- och impulssvar

I figur 1 visas två stegsvar samt två impulssvar. Två av dem tillhör samma dynamiska system. Para ihop ett steg- och impulssvar med följande överföringsfunktioner (motivera kortfattat ditt val!).
$G_1(s) = \frac{-s^2+0.6s-0.05}{(s^2+2s+5)}$, $G_2(s) = \frac{3}{s^2+2s+5}$. (**2 poäng**)

3. Givet frekvensfunktionen $G(i\omega) = \frac{20i\omega+1}{20i\omega+5}$.

   a) Skissa Nyquistkurvan för G. (**1 poäng**)

   b) Med $u(t) = sin(\omega t)$, där $\omega = 0.25\frac{rad}{sec}$, bestäm och skissa $y(t)$ efter lång tid. (**1 poäng**)

4. Givet överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{s^2-s-2}$ och $C(s) = K$, $\infty > K \geq 0$ med blockschemat i Fig. 3.

   a) Bestäm ett K som ger ett stabilt slutet system (**1 poäng**)

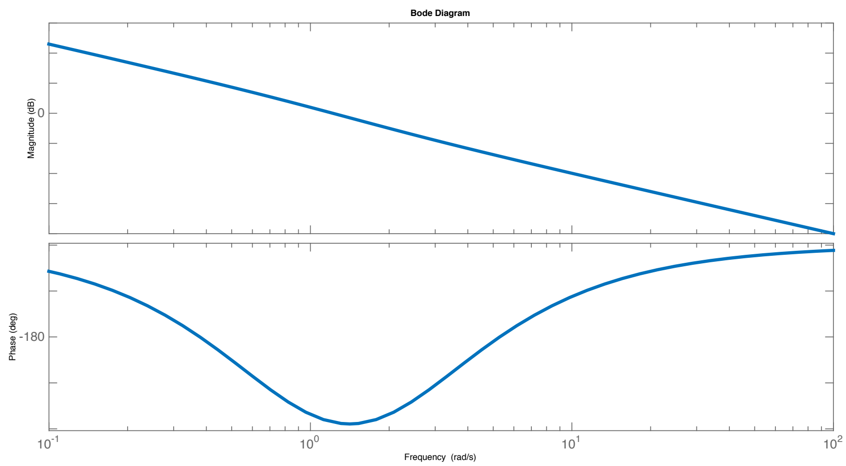
   b) Föreslå en icke enbart proportionell regulator $C(s)$ som stabiliserar systemet och ange dess ekvation. (**1 poäng**)

5. I figur 2 visas Bodediagrammet för kretsöverföringen $L(i\omega) = K_0G(i\omega)$ (antag enhetsåterföring). $L(i\omega)$ har inga instabila nollställen. Är det slutna systemet stabilt? Motivera! (**2 poäng**)

6. Givet en nominell överföringsfunktion $G_n(s) = \frac{1}{s^2+10s+25}$ med PD-regulator $C(s) = 5(1 + \frac{s}{5})$.

   a) Om den multiplikativa modellosäkerheten är uppåt begränsad av $d_m(s) = \frac{s}{(s+3)}$, är regulatorn $C(s)$ robust stabiliserande? (**1 poäng**)

   b) Om den additiva modellosäkerheten är uppåt begränsad av $d_a(s) = \frac{s}{(s+3)}$, är regulatorn $C(s)$ robust stabiliserande? (**1 poäng**)

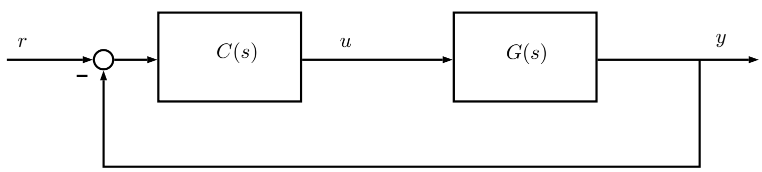


Figur 2: Bodediagram över kretsöverföringen

7. Givet en regulator $C(i\omega) = \frac{1}{T_i i\omega}$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{6}{(i\omega)^2+2(i\omega)+4}$ (med enhetsåterföring, se figur 3).

   a) Bestäm T_i så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 45°$. (**2 poäng**)

   b) Med det beräknade T_i, bestäm det slutna systemets steady-stateutsignal y_∞ om $r_\infty = 1$. (**1 poäng**)



Figur 3: Återkopplat blockschema

8. Givet en tillståndsmodell enligt

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x(t)$$

   a) Är tillståndsmodellen stabil? Bestäm överföringsfunktionen till ovanstående system. (**1 poäng**)

   b) Med $u(t) = 0$, bestäm $y(10)$ om $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$(**1 poäng**)

9. Givet tillståndsmodell och viktfunktional enligt

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + u(t)$$
$$J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2(\tau)Q + u^2(\tau)R\right) d\tau$$

   Bestäm Q, R givet att det slutna systemets optimala polplacering fås genom att spegla det öppna systemets poler i imaginäraxeln. (**2 poäng**).

-1- Solution (Exam SSY310 / ERE091 02/06/16)

1) strictly $\deg(b(s)) < \deg(a(s))$ $\qquad G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$

a) Proper

$$\deg(b) \leq \deg(a)$$

Proper, strictly proper TFs are physically realizable. (Causality!)

b) To describe a model (u,y) we use the least possible number of states. LTI state-space is both controllable/observ.

c)

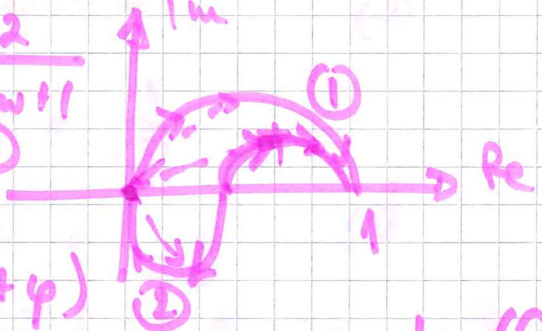
$S_m = \max_{\omega} S(i\omega)$

$\min_{\omega} |1 + L(i\omega)|$

2) a-d, b-c + explanation

3) a) $G(i\omega) = \underbrace{\frac{4i\omega}{4i\omega+1}}_{①} + \underbrace{\frac{0{,}2}{4i\omega+1}}_{②}$

$\sim 0{,}7211$



b) $y(t) = |A(\omega)| \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$|A(\omega)| = \sqrt{Im(G(i\tfrac{1}{4}))^2 + Re(G(i\tfrac{1}{4}))^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{Im(G(i\frac{1}{4}))}{Re\, G(i\frac{1}{4})}$

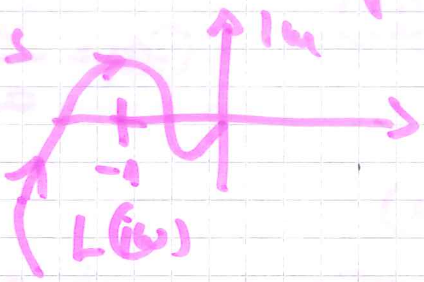
$|A(\omega)| = 0{,}724$ $\qquad \varphi \cong 35°$

3) a) $T(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K}{s^2 - s \underbrace{-2 + K}}$ a positive K can only change 1 pole

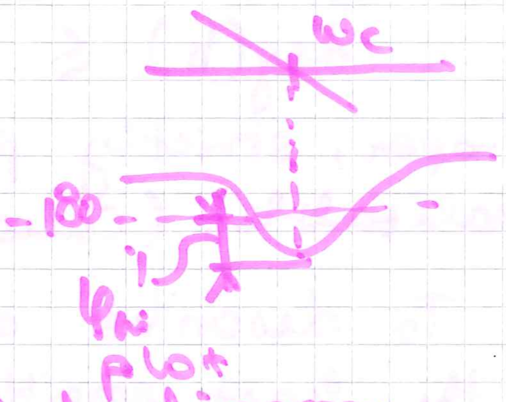
$\nexists K$ that stabilizes

b) E.g. $C(s) = K(1 + T_D s)$

5) Closed loop is unstable, to see this



or $\varphi_M < 0$



6)

Test a) $|T_N| \cdot \delta_m \leq 1$

b) $\left|\frac{C_N}{1+L_N}\right| \delta_A \leq 1$

Bode diagram test

a, is robustly stable b, is not

7) $w_c = 1{,}26$ $\varphi = -180 + 45 = -135°$, ~~-3dB~~

a) $-3\,dB = 20 \cdot \log \frac{1}{T_i}$

$\frac{1}{T_i} = 10^{-\frac{3}{20}}$

b) $y_\infty = r_\infty$ due to the integrator in the loop

8) $\text{eig } A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ stable

a) TF: $G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B = [2 \ 3] \begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 \\ 0 & 1/s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$G(s) = \frac{8}{s+1} + \frac{3}{s+2}$

b) $x(10) = e^{A \cdot 10} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} e^{-10} & 0 \\ 0 & e^{-20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-10} + e^{-20}$

9) closed loop pole: $-0{,}5$

$A - BL = -0{,}5 = 0{,}5 - 1 \cdot R^{-1} \bar{P} \Rightarrow R = \bar{P}$

CARE $2 \times 0{,}5 \bar{P} + Q - \bar{P}^2 (B \cdot R^{-1} B^T) = 0 \Rightarrow Q = 0$