Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Omtentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Lördagen den 2 april 2016 kl. 14:00

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar, ☎1785, `kulcsar@chalmers.se`
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på inlämningsuppgift 1-2, projektarbete och laboration 1-2, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration 1-2.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas den 11 april 2016 (pingpong.chalmers.se). Granskning av tentamensresultaten sker den 11 april kl. 10:00-11:00 i E-huset på våning 5, rum 5315.

Lycka till!

Uppgifter

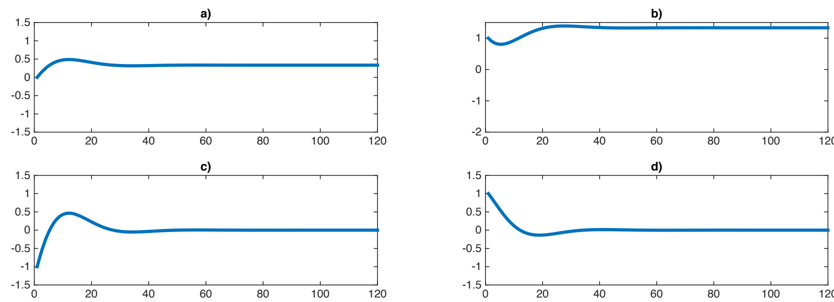
1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Definiera begreppet överföringsfunktion. Hur relaterar den till systemets stabilitet? (**1 poäng**)

   b) Förklara begreppet icke-minfassystem {non-minimum phase system}. Ge ett exempel på ett sådant system. (**1 poäng**)

   c) Vad yttrycker Bodes känslighetsintegral? Förklara kort dess innebörd och vad den har för betydelse. (**1 poäng**)

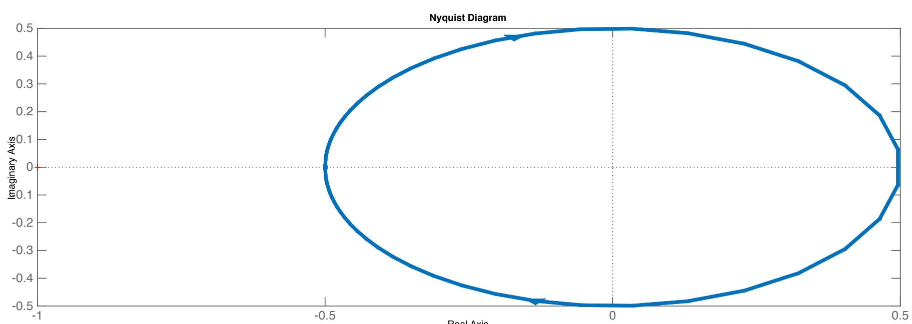
2. Para ihop och förklara!



Figur 1: Steg- och impulssvar

I figur 1 visas två stegsvar samt två impulssvar. Två av dem tillhör samma dynamiska system. Para ihop ett steg- och impulssvar med följande överföringsfunktioner (motivera kortfattat ditt val!).
$G_1(s) = \frac{(s+1)}{s^2+2s+3}$, $G_2(s) = \frac{1-s}{(s^2+2s+3)} + 1$. (**2 poäng**)

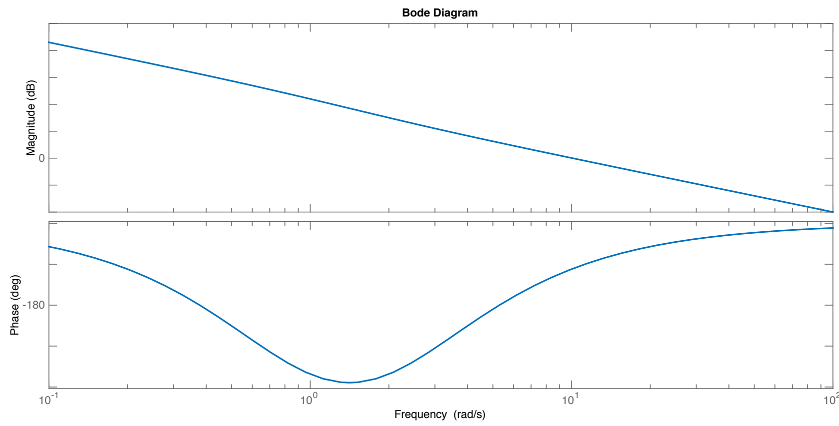
3. Givet Nyquistkurvan för en process $G(i\omega)$ för icke-negativa ω med $G(i0) = G(i\infty) = -0,5$ enligt figur 2.



Figur 2: Nyquistplot

   (a) Para ihop kurvan (Figur 2) med en av följande överföringsfunktioner och motivera ditt svar
   $G_1(i\omega) = \frac{i\omega}{(i\omega)^2+2i\omega+1}$, $G_2(i\omega) = \frac{-0.5i\omega}{2i\omega+1}$, $G_3(i\omega) = \frac{-0.5}{2(i\omega)^2+i\omega}$, $G_4(i\omega) = \frac{(i\omega)-0.5((i\omega)^2+1)}{(i\omega)^2+2(i\omega)+1}$. (**1 poäng**)

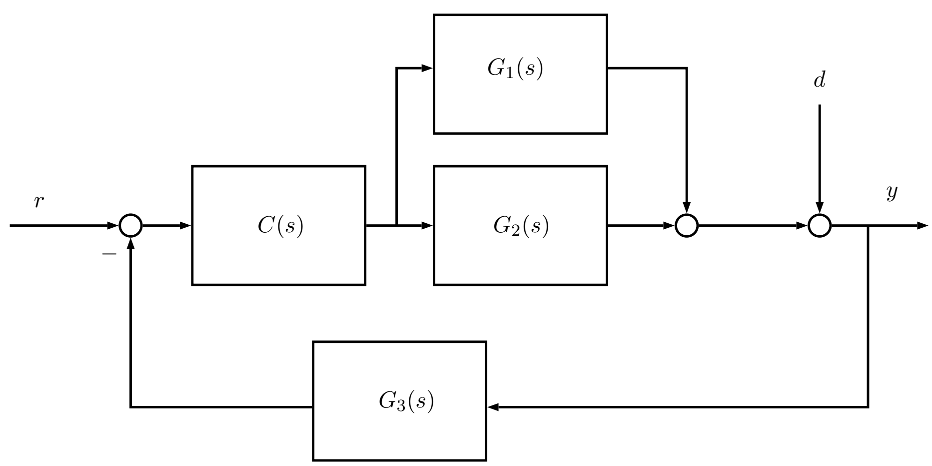
   (b) Med ditt valda $G(i\omega)$, hitta den *ändliga och nollskilda* frekvensen ω_1 som uppfyller $\varphi(\omega_1) = 0$, dvs ingen fasförskjutning (**1 poäng**)



Figur 3: Bodediagram över kretsöverföringen

4. I figur 3 visas Bodediagrammet för kretsöverföringen $L(i\omega)$ (antag enhetsåterföring). $L(i\omega)$ har inga instabila nollställen. Är det slutna systemet stabilt? Motivera! (**2 poäng**)

5. Givet det slutna systemet enligt figur 4



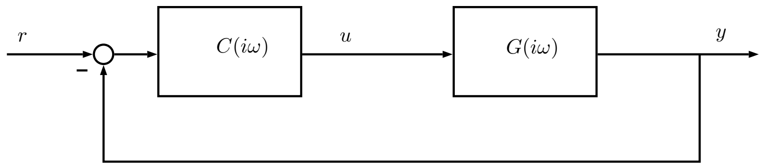
Figur 4: Blockschema för slutet system

$$G_1(s) = \frac{s(s+3)}{(s+2)(s+1)}, \quad C(s) = s + 3 + \frac{2}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{5}, \quad G_2(s) = \frac{s}{s+3}$$

a) Hitta känslighetsfunktionen från insignalen d till y då $r = 0$ (**1 poäng**).

b) Bestäm värdet av $\frac{y_\infty}{r_\infty}$ efter mycket lång tid (dvs i steady state). (**1 poäng**)

6. Givet en regulator $C(i\omega) = \frac{K}{i\omega}$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{6}{5(i\omega)^2+8(i\omega)+3}$ (med enhetsåterföring, se figur 5). Bestäm K så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 30°$. (**3 poäng**)



Figur 5: Återkopplat blockschema

7. Givet en tillståndsmodell enligt

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} x(t)$$

med $|\alpha| < \infty$, $|\beta| < \infty$.

a) Är tillståndsrepresentationen styrbar för ändliga α, β? (**1 poäng**)

b) Är tillståndsrepresentationen observerbar för ändliga α, β? (**1 poäng**)

c) Är systemet stabilt med $\alpha = 1$, $\beta = 1$? (**1 poäng**)

d) Med $\alpha = 1$, $\beta = 1$, bestäm $y(2)$ vid ett enhetssteg där $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(u(t) \triangleq 0, t \geq 0)$. (**1 poäng**)

8. Givet tillståndsmodell och viktfunktional enligt

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + u(t)$$
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(x^T(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Q_u u(\tau) \Big)\, d\tau$$

antag att det slutna systemets pol befinner sig i -1. Bestäm Q_u och $\bar{P}$ som lösningen till den algebraiska Ricattiekvationen för reglering (**2 poäng**).

Solution to ERE091 / SSY310

resit exam (2016 04 02)

1) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{b(s)}{a(s)}$

roots of $a(s)\big|_{p_i} = 0$ $\qquad$ $Re\{p_i\} \leq 0$

2) If phase changes the minimum amount, we call minimum phase with stable, causal inverse. If phase shift is ~~larger~~ smaller than this minimum, it is called non-min phase.

Eg. - systems with unstable zeros
- dead / delayed time systems

3) Waterbed effect
Disturbance dust distribution is constant (or zero) ~~for~~ over the frequency range

$$\int_0^\infty \log|S(i\omega)|\,d\omega = \int_0^\infty \log\left|\frac{1}{1+L(i\omega)}\right| d\omega =$$
$$= \pi \sum_i Re(p_k)$$

with p_k standing for the RHP ~~po~~ poles of $L(s)$

2) a - c, $\underbrace{\text{b - d}}$
+ explanation $\qquad$ non-minimum phase system (step)
direct feedthroug (impulse)

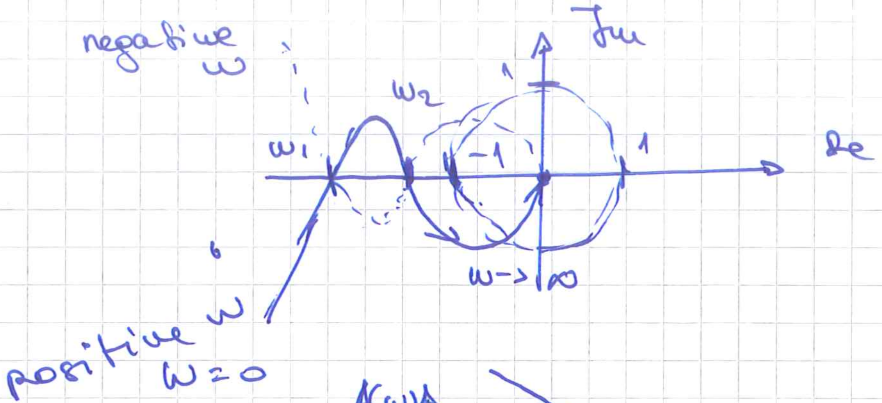
3) a) $G_4(s) = \frac{2s}{s^2+2s+1} - 0{,}5$

$G_4(i\omega)\Big|_{\substack{\omega\to\infty \\ \omega=0}} = 0$ $\qquad$ no phase shift if

b) $Im\{G_4(i\omega_1)\} = 0$ $\qquad$ $\left(\varphi(\omega_1) = \frac{Im\, G(i\omega_1)}{Re\, G(i\omega_1)}\right.$

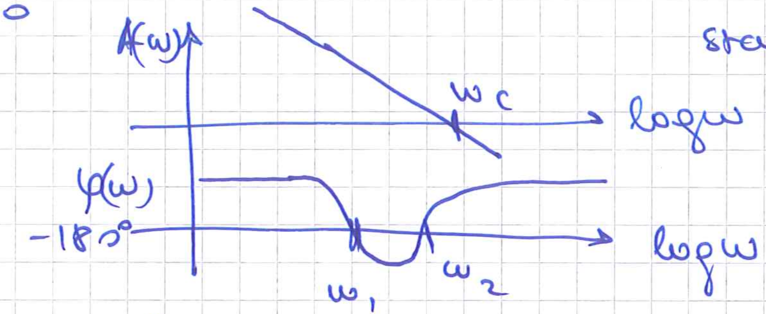
$\omega_1 \hat{=} 1 \ rad/sec$

4) Transfer the Bode plot to Nyquist



no unstable zeros, it does not encircle -1, no unstable poles

stable closed loop



5) $T_{dy} = \dfrac{1}{(G_1+G_2)G_3 \cdot C + 1} = \dfrac{1}{1 + X(s)} = \dfrac{5(s+3)}{2s^2+14s+13}$

$$(G_1+G_2) = \frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{s}{(s+3)} = \frac{s(1+(s+1)(s+2))}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G_4 \cdot X(s) = G_4 \cdot (G_1+G_2) \cdot C = \frac{(s+1)(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{5} \cdot (G_1+G_2) = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\frac{(s+3)^2+(s+1)(s+2))}{s+3}}_{X(s)}$$

$$T_{dy} = \frac{(G_1+G_2)\cdot C}{(G_1+G_2)G_3 C + 1} = \frac{X(s)}{X(s)\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{\frac{1}{5} + X(s)^{-1}}$$

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot T_{ry}(s) \cdot \frac{R(s)}{\cancel{s}} =$$

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2+9s+4}{2s^2+14s+26} = \frac{11}{26} \; // \quad \approx 0{,}4231$$

6) $-180 + 30° = -150°$

$-150° = \varphi(\omega_s)$ $\qquad \omega_s \cong 0{,}43 \; \text{rad/sec}$

$K_{dB} \cong -11\,dB$, $K \cong 0{,}2818$

7)

a) $G = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$

$\det C = -\beta - \alpha\beta \neq 0$

$(\alpha+\beta)\beta \neq 0$

③

b) $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$

$\det \mathcal{O} = 0$ independently of β

c) $\text{eig } A \Big|_{\alpha = \beta - 1} = -1, 1$

unstable system

d) $y(2) = C \cdot e^{2A} \cdot x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{+2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2}$ //

8) $A = 0{,}5$, $B = 1$, $Q_x = 1$

$Q_u = ?$ $\bar{P} = ?$

$A - B\bar{K} = -1 = 0{,}5 - 1 \cdot Q_u^{-1} \cdot \bar{P} \Rightarrow \bar{P} = 1{,}5 Q_u$

$\bar{P}A + A^T\bar{P} - \bar{P}BQ_u^{-1}B\bar{P} + Q_x = 0$

$\bar{P} + 1 - \bar{P}\dfrac{1{,}5}{\bar{P}}\bar{P} = 0 \Rightarrow \bar{P} = 2, \; Q_u = 4/3$