Tentamen i Reglerteknik för TM2 (m fj), ERE091/SSY310, tisdagen 3 juni 2014.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V-salar

Examinator: Claes Breitholtz

Lärare under tentamen: Claes Lindeborg (0705 655925)

Tentamensresultaten meddelas senast den 18 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 19 och 20 juni, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsalsvägen). Var vänlig iakttag granskningstiderna!


betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex BETA och Physics handbook).
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!
1. Betrakta systemet i figuren, där variationen i inföd q₁ är en störstörhet, medan variationen i utflödet q₂ är en styrstörhet. Karets bottenearea är 1 m².

![Diagram](image)

a) Ställ upp en materialbalans som beskriver processen (dvs utan regulator) och ange den överföringsfunktion som relaterar variationer i utpumpat flöde Δq₂ till volymsvariationer ΔV.

1 poäng

b) Föreslå och motivera valet av en regulator åt processen ovan, sådan att stegstörningar inte ger upphov till kvarstående fel, och där 45⁰ fasmarginal uppnås vid skärfrekvensen \( \omega_c = 1 \) rad/minut.

2 poäng

c) Skissa ett Bodediagram (såväl fas- som beloppkurva) över resulterande kretsöverföring, där det tydligt framgår att fasmarginalen uppnås vid begärd skärfrekvens.

2 poäng

2. En viss typ av reglarsystem kan ha egenskaper att kretsöverföringens Nyquistkurva alltid ligger utanför en cirkel med radien ett och centrum i punkten \(-1 + i \cdot 0\). Ange lägsta möjliga värde på fasmarginalen i ett sådant fall. Vilket största värde på känslighetsfunktionens belopp kan då förväntas?

![Nyquistkurva](image)

3 poäng
3. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av tillståndsområdet

\[
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \text{ och } y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x
\]

där \( u \) är en känd insignal, medan \( w \) är en icke mätbar störning

a) Avgör om systemet är observerbart och bestäm observatörsmatrisen, \( K \), så att resulterande observatörens båda egenvärden blir \(-1\).

3 poäng


2 poäng

Ledning Om \( f(t) \) är en kontinuerlig funktion och \( \delta(t) \) är Dirac’s "impulsfunktion" så gäller:

\[
\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t)
\]

4. Betrakta överföringsfunktionen (som kan uppkomma i samband med fysikaliska system som beskrivs av linjära partiella differentialekvationer):

\[
G(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4s + 5}}
\]

a) Bestäm viktfunktionen \( g(t) \). Använd \( L\{e^{bt} \cdot f(t)\} = F(s + b) \), samt utnyttja sambandet

\[
L^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right\} = J_0(at)
\]

1 poäng

b) Visa att det givna systemet med viktfunktionen \( g(t) \) är insignal-utsignalstabilt.

2 poäng

Ledning \( J_0(x) \), \( x \geq 0 \) är en sk Besselfunktion, en oscillatorisk, relativt svagt dämpad funktion, vars maximala värde är \( J_0(0) = 1 \) och vars minimala värde är \( J_0(3, 9) \approx -0.40 \).
5. Figuren nedan visar ett arbetsstyteck med massan \( m \) som förflytts på ett lutande plan.

Låt avståndet till rotationscentrum vara \( p \) och vinkeln mellan horisontalplanet och det lutande planet vara \( \varphi \). Arbetsstykets position styrs med hjälp av ett stålldon, som kan leverera ett variabelt moment \( T \), applicerat vid rotationscentrum. Följande momentbalans och kraftbalans beskriver systemets dynamik (g betecknar tyngdaccelerationen):

\[
m \cdot p^2(t) \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = T(t) - mg \cdot p(t) \cdot \cos[\varphi(t)]
\]

\[
m \cdot \frac{d^2 p(t)}{dt^2} = -mg \cdot \sin[\varphi(t)] + m \cdot \left( \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2 \cdot p(t)
\]

a) Betrakta jämviktspunkten i systemet där \( p = p_0 \), \( \varphi = \varphi_0 \), \( T = T_0 \). Om positionen \( p_0 \) anses given (men i princip godtycklig), bestäm vilka värden på \( \varphi_0 \) och \( T_0 \) som då motsvarar jämvikt, dvs då alla tidsderivator är noll?

**1 poäng**

b) Antag små avvikelser från jämviktsställandet definierat av \( p = p_0 \), \( \varphi = \varphi_0 \), \( T = T_0 \) och inför tillståndsstörheterna \( x_1 = \Delta p \), \( x_2 = \Delta \dot{p} \), \( x_3 = \Delta \varphi \), \( x_4 = \Delta \dot{\varphi} \), styrstörheten \( u = \Delta T \) samt utstörheten \( y = \Delta p \). Ställ upp motsvarande linjära tillståndssystemet på standardformen \( \dot{x} = Ax + Bu \), \( y = Cx \) och avgör systemets stabilitet (in-signal-utsignalstabilt, marginellt stabilt eller instabilt).

**3 poäng**
Laplace-transformen

\[ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \]
\[ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds \]
\[ \mathcal{L}\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s) \]
\[ \mathcal{L}\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0) \]
\[ \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau)d\tau \right\} = \frac{1}{s}F(s) \]
\[ \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \]
\[ \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \]
\[ \mathcal{L}\{f(t-D)\} = e^{-sD}F(s) \]
\[ \mathcal{L}^{-1}\{(G(s)F(s))\} = \int_0^s g(t-\tau)f(\tau)d\tau \]
\[ \mathcal{L}\{e^{-at}\cdot f(t)\} = F(s+a) \]
\[ \mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \]
\[ \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \]  
\[ \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \]  
\[ \mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2} \]
\[ \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \]
\[ \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \]

Z-transformen

\[ F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \]
\[ \mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) - f(-1) \]
\[ z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n = 0 \] har samma antal rötter inom \(|z| = 1|\) z-planet som,
\[ \left(1 + \frac{w}{1 - w}\right)^n + a_1\left(1 + \frac{w}{1 - w}\right)^{n-1} + ... + a_{n-1}\left(1 + \frac{w}{1 - w}\right) + a_n \]
har inne i vänstra halvan av w-planet. (Möbiustransformen)
\[ \mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \]
\[ \mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a} \]
\[ \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \]  
\[ \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to \infty} F(z) \]
\[ \lim_{k \to \infty} f(k) - \lim_{z \to 1} (z-1)F(z) \]

LTI-modeller

\[ y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \]
\[ Y(s) = G(s)U(s) \]
\[ y(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i) \]
\[ Y(z) = H(z)U(z) \]
\[ \dot{z}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \]

\[ y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad g(t) = C\Phi(t)B + DM(t) \]

\[ \Phi(t) = e^{At} = I + At + A^2t^2/2! + A^3t^3/3! + \ldots = L^{-1}((sI - A)^{-1}) \]

\[ \frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I, \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \quad \Phi(t)\Phi(r) = \Phi(t+r) \]

\[ z(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-t)Bu(r)dr \]

\[ G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} + d \]

**Styrbar kanonisk form:**

\[ \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \]

\[ y(t) = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1} \ b_n]z(t) + d \cdot u(t) \]

**Observerbar kanonisk form:**

\[ \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \]

\[ y(t) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]z(t) + d \cdot u(t) \]

**Styr- och observerbarhet beror av \( \text{rang}(S) \) respektive av \( \text{rang}(O) \):**

\[ S = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B], \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \]

Routh-Hurwitz stabilitetskriterium

\[
\begin{array}{c|ccccccccc}
  s^n & 1 & a_2 & a_3 & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
  s^{n-1} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
  s^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
  s^{n-2} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
  \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
  s^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
  s^0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\end{array}
\]

Antal teckenbyten i vänstra kolumnen ger antalet positiva poler
Tidssvar

\[ G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2} \]

\[ s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases} \]

\[ y(t) = K \left(1 - e^{-at} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega dt + \varphi)\right) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta) \]

\[ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \]

\[ \zeta = \cos \varphi \]

\[ \frac{y(t)}{y(\infty)} \]

\[ t_r \approx \frac{1}{\omega_n} (1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) \quad t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad M = e^{-\pi \sqrt{1 - \zeta^2}} \]

\[ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \]
Bode-diagram

\[ G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \]

<table>
<thead>
<tr>
<th>\omega</th>
<th>\omega_1/4</th>
<th>\omega_1/2</th>
<th>\omega_1</th>
<th>2\omega_1</th>
<th>4\omega_1</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Korrektion</td>
<td>\frac{1}{\sqrt{1.0625}}</td>
<td>\frac{1}{\sqrt{1.25}}</td>
<td>\frac{1}{\sqrt{2}}</td>
<td>\frac{1}{\sqrt{1.25}}</td>
<td>\frac{1}{\sqrt{1.0625}}</td>
</tr>
<tr>
<td>Korrektion_{dB}</td>
<td>-0.2 dB</td>
<td>-1.0 dB</td>
<td>-3 dB</td>
<td>-1.0 dB</td>
<td>-0.2 dB</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ G(s) = \frac{\omega_1^2}{s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2} \]

Nyquist

\[
Z = \text{antal instabila poler för slutna systemet} \\
P = \text{antal instabila poler för öppna systemet} \\
N = \text{antal varv i bildplanet runt kritiska punkten}
\]

\[ Z = P+N \]
Regulator design
Känslighetsfunktioner:

\[ T = \frac{L}{1 + L'}, \quad S = \frac{1}{1 + L'}, \quad L = GF \]

\[ G_0 = (1 + \Delta G)G, \quad \text{Robust stabilitet för } |\Delta G| < 1/T, \quad \forall \omega > 0 \]

Tillståndstöringskoppling:

\[ u(t) = L_r r(t) - Lx(t) \]

r stegformad ger att y \( \rightarrow r \) då t \( \rightarrow \infty \) för

\[ L_r = \left[ C(BL - A)^{-1} B \right]^{-1} \]

\[ \hat{x}(t) = (A - BL)x(t) + BL_r r(t), \quad y(t) = Cx(t) \]

Observer

\[ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)] \]

skattning fel (utan störningar)

\[ \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) \]

Lagfilter (fasretarderande):

\[ F(s) = \frac{1 + Ts}{\alpha + Ts}, \quad 0 < \alpha < 1 \]

Lagfilter (fasavancerande):

\[ F(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta = \frac{1 - \sin \varphi_{\text{max}}}{1 + \sin \varphi_{\text{max}}}, \quad \varphi_{\text{max}} \text{ uppnås för } \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \]

Regulatorer:

\[ F_P(s) = K_p \]

\[ F_I(s) = K_i/s \]

\[ F_{PI}(s) = K_p + K_i/s = K_p(1 + \frac{1}{T_i s}) \]

\[ F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + T_d s} = K_p(1 + \frac{T_d s}{1 + T_d s}) \]

\[ F_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I s}{1 + T_d s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_d s} \right) \]

\[ F_{PID}(s) = K_P + \frac{K_i s}{z - 1} + \frac{(K_d/T_i)(z - 1)}{z - e^{-h/T_f}} \]
1. a) \[ V(t) = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{s} \] ellen
\[ \Delta V = \Delta q_1 - \Delta q_2 \] (differentiell matricelägen)
\[ s \Delta \tilde{V}(s) - \Delta V(s) = \Delta \tilde{q}_1(s) - \Delta \tilde{q}_2(s) \]
\[ \tilde{C}_2(s) = \frac{\Delta V(s)}{\Delta \tilde{q}_2(s)} = -\frac{1}{s} \] (\(\Delta q_1\) sätts till noll i förra superpositionen!)

b) Noll kvantit. fel \(\Rightarrow\) integralverkan (du I, PI, PID)

IO funktioner inte här, så förstavalt är PI!

\[ F(s) = \frac{K_p}{s} \]
\[ L(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^2} \]

\(\uparrow\) För att kompensera processens minskade körning

\[ c_m = \bar{u} + \arg L(i \omega_c) = \bar{u} - \bar{u} + \arg \left( \frac{K_p \omega_c}{K_i} \right) \]
\[ c_m = 90^\circ \text{ och } \omega_c = 1 \Rightarrow K_p = K_i \]

\[ |L(i \omega_c)| = \left| \frac{K_p i + K_p}{1 - i} \right| = \frac{K_p \sqrt{2}}{1} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \]

dvs
\[ F(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \]

C) \[ L(s) = \frac{0.707 (1 + 5/1)}{s^2} \]

---

LF = asymptoten skön
0 dB = midvän

\(\omega_c \geq 1\)

\(c_m \approx 45^\circ\)

\(-180^\circ \quad -180^\circ\)

\(-40 \text{dB/dec} \quad -20 \text{dB/dec}\)
Om N-kurvan passerar lätt in till cirkeln med radien ett centrerad i $-1+i0$, kommer den att passera skärmiga mellan den cirkel och enhetscirkeln i punkten $Q$.

Elementärt trigonometri visar att han $\theta_m = \sqrt{3}$, dvs $\theta_m = 60^\circ$ eller mer om N-kurvan passerar genom en nära liggande punkt.

\[ S = \frac{1}{1 + L} \Rightarrow |S(i\omega)| = \frac{1}{|1 + L(i\omega)|} e^{i \text{arg} L(i\omega)} \]

\[ |L(i\omega)| = 1 \quad (\text{enl. def.}) \]

\[ \text{arg} L(i\omega) = \theta_m - 180^\circ \quad (\text{enl. def}) \]

\[ |S(i\omega)| = \frac{1}{1 + \cos(\theta_m - 180^\circ) + i \sin(\theta_m - 180^\circ)} = \frac{1}{1 - \cos \theta_m - i \sin \theta_m} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta_m}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{2}{3}}} = 1 \]

\[ |S(i\omega)| \leq 1 \quad \text{för sådana system.} \]
3. a) \[ \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \]

\[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}) = (1 \; \; 0) \]

\[ \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Full rank } \Rightarrow \text{Observable!} \]

\[ \frac{d\hat{X}}{dt} = A \hat{X} + B u + K \left[ y - C \hat{X} \right] = \]

\[ = (A - KC) \hat{X} + B u + Ky \]

\[ A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (1 \; -1) = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 + 1 \\ -k_2 - 1 & -1 + k_2 \end{pmatrix} \]

\[ \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -(k_1 + 1) \\ k_2 + 1 & \lambda + 1 - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1 + k_1 - k_2) \lambda + k_1 k_2 - k_2 + k_2 + k_1 + 1 \]

\[ = \lambda^2 + (k_1 - k_2 + 1) \lambda + 2k_1 + k_2 + 1 \equiv (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \]

\[ \Rightarrow k_1 - k_2 + 1 = 2 \]

\[ 2k_1 + k_2 + 1 = 1 \]

\[ \Rightarrow k_1 = 2/3, \quad k_2 = -2k_1 = -2/3 \]

\[ \therefore K = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \]

b) \[ \frac{d\hat{X}}{dt} = AX + Bu + N \mu \]

\[ \frac{d\hat{X}}{dt} = A \hat{X} + Bu + K \left[ y - C \hat{X} \right] \]

\[ \hat{X} = X - \hat{X} \]

\[ \frac{d}{dt} \hat{X}(t) = (A - KC) \hat{X} + N \mu \]

\[ \hat{X}(t) = e^{(A+Kc)t} \cdot \hat{X}(0) + \int_0^t e^{(A+Kc)(t-s)} N \mu d\tau \]

\[ \approx e^{(A-KC)t} \cdot N \]
3. \( b \neq 0 \) \( A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 4/3 \\ -\frac{1}{3} & -5/3 \end{pmatrix} \)

\( C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \)

\( \mathbf{X}(s) = L^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} s + 5/3 & 4/3 \\ -1/3 & s + 1/3 \end{pmatrix} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} s + 1/3 & s + 5/3 \\ 5/3 & s + 1/3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ s + 1 \end{pmatrix} \)

\( \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 4/3 \cdot e^{-t} \\ e^{-t} - 4/3 \cdot e^{-t} \end{pmatrix} \)

\( 4. a) \ G(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4s + 3}} = \frac{1}{\sqrt{(s+1)^2 + 1}} = L \{g(t)\} \)

\( g(t) = e^{-2t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \right\} = e^{-2t} \cdot J_0(t) \)

Enligt dämpningslagen

\( b) \) Systemet insignal-ustabil, \( \int_0^\infty |g(t)| \, dt \) konv. Ausgangsfluss ist nicht endlich:

\( \int_0^\infty g(t) \, dt = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot J_0(t) \, dt < \int_0^\infty e^{-2t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} \, dt = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow \)

Systemet ist insignal-ustabil!
5. a) Jämlikhetsför $(p_0, q_0, T_0) = 0$. Sätta hela tidderiveratorna sätt till noll:

\[
\begin{align*}
0 &= T_0 - mg \rho \cos \phi \\
0 &= -mg \sin \phi \\
\Rightarrow T_0 &= mg \rho \\
\phi_0 &= 0
\end{align*}
\]

dvs $p_0$ fri konsant $\Rightarrow \phi_0 = 0$ och $T_0 = mg \rho$

b) \[
m p_0^2 \ddot{\phi} = \Delta T - mg \cdot \Delta p
\]

\[
\dot{p} \Delta \ddot{\phi} = -mg \cdot \Delta \phi.
\]

Här har används att $\cos \Delta \phi \approx 1$ och $\sin \Delta \phi \approx \Delta \phi$ (små vinklar) och kvadrater på Δ-storheter (och dess derivator) har ignorerats (tecken har satts rätt)

Inför tillståndsstorheter $x_1 = \Delta p$, $x_2 = \Delta \dot{p}$, $x_3 = \Delta \phi$, $x_4 = \Delta \ddot{\phi}$ och skylfordel $u = \Delta T$:

\[
\begin{align*}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -g x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= u_k (mp_0^2) - (\beta p_0^2) x_1
\end{align*}
\]

\[
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\beta}{p_0^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mp_0^2} \end{bmatrix} u(t)
\]

\[
\dot{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x(t)
\]
5, 6 (forts.) Poloerna ges av det $(S^2 - A) = 0$

\[
\begin{vmatrix}
S & -1 & 0 & 0 \\
0 & S & 9 & 0 \\
0 & 0 & S & -1 \\
+\frac{2}{P_0} & 0 & 0 & S
\end{vmatrix} = S^4 + \frac{a^2}{P_0^2} S^2 + \frac{a^4}{P_0^2} = S^4 + \nu^4 =
\]

\[
= (S + \nu)(S^2 - \nu S^2 + \nu^2 S - \nu^3)
\]

\[S = -\nu \quad \text{(Stabil pol)} \quad \text{Rouths criterium} \Rightarrow \]

\[
\begin{array}{c|cc}
S^3 & 1 & \nu^2 \\
S^2 & -\nu & -\nu^3 \\
S & \nu & 0 \\
1 & -\nu^2 & 0
\end{array}
\Rightarrow \text{Instabilt system}
\]

\[
(\nu^3 - \nu S^2 + \nu^2 S - \nu^3) = \nu(S^2 + \nu^2) - \nu(S^2 + \nu^2) = (S - \nu)(S^2 + \nu^2)
\]

Systemet har alla poler för $S = \nu, S = -\nu$ och $S = \pm i \nu$ där $\nu = \sqrt{a/P_0}$. (En eller flera poler i HHP.)