CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, torsdagen 22 augusti 2013.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 6 september genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 9 och 10 september, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsalsvägen), vid rum 5422 (Oskar Wigström). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 20 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
2. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!

1. Ge <u>enbart svaret</u> på följande frågor. Motiveringar krävs inte på <u>denna</u> uppgift. Rätt svar ger 0,5 poäng, medan fel svar ger noll poäng.

(a) Viktfunktionerna för tre system är givna. Vilka av systemen är insignal/utsignalstabila?

$$g_1(t) = e^{t/2} \cdot \sin(t),\ g_2(t) = e^{-t/2} \cdot \sinh(t),\ g_3(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \sinh(t)$$

(b) Ange den överföringsfunktion $G_2(s)$ som motsvarar viktfunktionen $g_2(t)$ ovan.

(c) Formulera en tillståndsmodell på minimal form som beskriver systemet $G_2(s)$.

(d) Betrakta systemet med viktfunktionen $g_3(t)$. Ange ett uttryck för systemets utsignal $y(t)$, då insignalen $u(t)$ är ett enhetssteg.

2 poäng

2. (a) Ett system med överföringsfunktionen $G(s) = e^{-2s}/s$ skall regleras så att fasmarginalen $\varphi_M = 45^0$ uppnås vid $\omega_C = 1,25$ rad/sek. Kan en PD-regulator (dvs ett lead-filter) användas i detta fall? Motivera svaret!

1 poäng

(b) Kan en P-regulator användas i uppgiften ovan om fasmarginalen $\varphi_M = 45^0$ absolut måste skall uppnås, men vid ett lägre värde på frekvensen ω_C? Ange i så fall detta värde.

1 poäng

(c) Kan en PD-regulator stabilisera systemet $G(s) = 1/(s^2+1)$? Motivera svaret!

1 poäng

(d) En PID-regulator och en PIPD-regulator kan skrivas som respektive

$$F_{PID}(s) = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right],\ F_{PIPD}(s) = \frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_1 s(1+T_f s)}$$

PIPD-regulatorn kan alltid "översättas" till en PID-regulator. Visa genom ett eget valt exempel att alla PID-regulatorer dock inte kan "översättas" till en PIPD-regulator.

1 poäng

3. Betrakta systemet, vars insignal är u och utsignal är y, som beskrivs av tillståndsmodellen

$$\frac{d}{dt}z(t) = (-1 + i \cdot 2)z(t) + (1 - i)u(t) \text{ och } y(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$$

där $u \in R$, $z \in C$, $y \in R$. (Tillämpningar av sådana system finns bl a för asynkronmaskiner.)

a) Definiera en reell tillståndsmodell med tillståndsvektorn $x \in R^2$ vars komponenter ges av:

$$x_1 = \mathrm{Re}\{z\},\ x_2 = \mathrm{Im}\{z\}$$

Den nya modellen skall alltså ha formen $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, där A, B och C samtliga är reella matriser som skall anges numeriskt.

2 poäng

b) Är systemet ovan insignal-utsignalstabilt? Är tillståndsmodellen styr- och observerbar?

2 poäng

4. En instabil process skall styras med en PI-regulator. Processens överföringsfunktion är

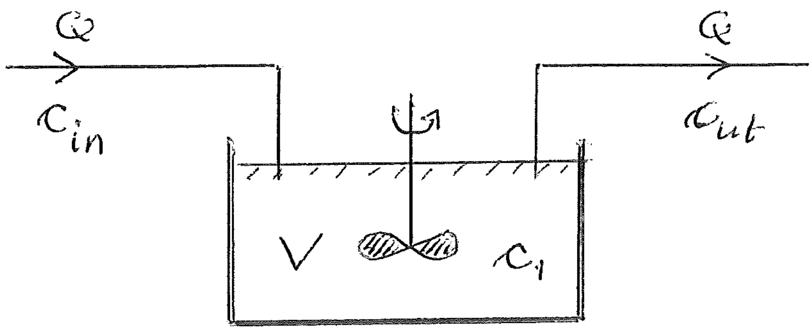
$$G(s) = \frac{s+1}{2s^2 - s - 1}$$

medan regulatorn F(s) har proportionell förstärkning $K_p = 4$ och integrationstid $T_i = 2$.

Upprita systemets ***Nyquistdiagram***, och utred utgående från diagrammet om återkopplade systemet är stabilt. (Eventuellt kan kretsöverföringen $L(s) = G(s)F(s)$ förenklas något.)

4 poäng

5. Ett buffertkar används ofta inom processindustrin för att utjämna variationer, exempelvis koncentrationen i ett vätskeflöde. Man kan säga att variationerna lågpassfiltreras med karet. I vissa fall är det fördelaktigt att ha flera kar i serie för bästa filterverkan, samtidigt som det av ekonomiska skäl är ofördelaktigt att lagra stora mängder av den vätska, som antingen säljs direkt till en kund eller vidareförädlas i ett eller flera reaktions- eller separationssteg.



Antag att den uppehållna vätskevolymen är V (m^3) och att totala vätskeflödet är Q (mol/m^3). Koncentrationen av det intressanta ämnet i ingångsflödet kan skrivas $C_{in}(t) = C_{i0} + \Delta C_{in}(t)$, medan motsvarande koncentrationen av ämnet inne i karet kan skrivas $C_1(t) = C_{i0} + \Delta C_1(t)$. Då vi antar "mycket god" omrörning i karet, kan koncentrationsgradienter försummas och koncentrationen av ämnet i utgångsflödet blir då $C_{ut}(t) = C_{i0} + \Delta C_{ut}(t) = C_{i0} + \Delta C_1(t)$.

(a) Formulera en materialbalans (tidsderivatan av upplagrad mängd av ämnet = infödet av ämnet - utflödet av ämnet) och ange överföringsfunktionen från koncentrationsvariationer i inflödet $\Delta C_{in}(t)$ till variationerna i utflödet $\Delta C_{ut}(t)$.

1 poäng

(b) Visa att om den konstanta volymen V delas upp i n lika stora mindre kar, blir motsvarande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta C_{ut}(s)}{\Delta C_{in}(s)} = \left[1 + \frac{Vs}{nQ}\right]^{-n}$$

1 poäng

(c) Antag att variationen $\Delta C_{in}(t)$ domineras av en sinusformad "svävning" med periodtiden T. Visa att (i sinusformat stationärtillstånd) <u>förstärkningen</u> (i enheten dB) är

$$|G|_{dB} = -10 \cdot n \cdot \log\left[1 + \left(\frac{2\pi V}{nTQ}\right)^2\right]$$

1 poäng

(d) Visa att största dämpning (= minsta förstärkning) fås ur lösningen till ekvationen

$$\log(1+x) = \frac{2x}{1+x},\ x = \left(\frac{2\pi V}{nTQ}\right)^2$$

2 poäng

(e) Antag att V = 10000 liter, Q = 100 liter/minut och T = 40 minuter. Ovanstående ekvations lösning är $x \approx 3,92$ (Enkelt att ta fram med en kalkylator, men det tar kanske 10 minuter så vi bjuder på detta.) Bestäm i hur många lika delar volymen V skall delas upp för att dämpningen av svävningen skall bli så stor som möjligt. (Notera att n bestäms som ett reellt tal, varefter det bästa av två möjliga heltal väljs.)

1 poäng

Observera att uppgifterna (a - e) ovan <u>inte</u> måste lösas i viss ordning!

Lösning till Reglerteknik EE-EG91 och ES017
22 augusti 2013 / GB

---

1. (a) $g_3(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \sinh(t)$ är insignal/utsignalstabilt
(övriga instabila)

(b) $G_2(s) = \mathcal{L}\{g_2(t)\} = \dfrac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 - 1} = \dfrac{1}{s^2 + s - 3/4}$

(c) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3/4 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$
(t. ex.)

(d) $y(t) = \int_0^t g_3(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) e^{-2(t-\tau)} \sinh(t-\tau) d\tau$
$= \int_0^t \theta e^{-2\theta} \sinh\theta \, d\theta$

=

---

2. (a) $G(s) = e^{-2s}/s$

$\varphi_m = \pi + \angle G(i\omega_c) + \psi$, där ψ är det
fastillskott som regulatorn skall ge.

$\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} - 2\omega_c + \psi = \frac{\pi}{2} - 2.5 + \psi \Rightarrow$

$\psi = 2.5 - \frac{\pi}{4} = 1.7146 \text{ rad} = 98.25^\circ > 90^\circ$,

dvs en PD-regulator (lead-filter) klarar
__inte__ detta!

(b) P-regulatorn ger inget fastillskott.

$\varphi_m = \pi - \frac{\pi}{2} - 2\omega_c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\omega_c = \frac{\pi}{4}$

P-regulatorn klarar detta för $\omega_c = \frac{\pi}{8} \approx \underline{0.39 \text{ rad/s}}$

(dvs snabbheten blir endast knappt 40%.)

2. c) $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $F(s) = K_P + \frac{K_D s}{1+T_f s}$

$$L(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{K_P(1+T_f s) + K_D s}{1+T_f s}$$

KE: $1 + L(s) = 0 \Rightarrow$

$$(s^2+1)(1+T_f s) + K_P(1+T_f s) + K_D s = 0 \iff$$

$$T_f s^3 + s^2 + (K_D + (K_P+1)T_f)s + (K_P+1) = 0 \iff$$

$$s^3 + \frac{s^2}{T_f} + \left(\frac{K_D}{T_f} + K_P + 1\right)s + \frac{K_P+1}{T_f} = 0$$

Routh:

1	$\frac{K_D}{T_f} + K_P + 1$	0
$\frac{1}{T_f} > 0$	$\frac{K_P+1}{T_f}$	0
$\frac{K_D}{T_f^2} > 0$	0	0
$\frac{K_P+1}{T_f} > 0$	0	0

Eftersom alla element i första kolumnen kan göras positiva, följer det att en PD regulator kan stabilisera systemet.

d) Låt exempelvis $T_i = T_d = T_f = 1$!

$$F_{PID}(s) = K_P\left[1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{s+1}\right] = \frac{K_P}{2} \cdot \frac{s^2+s+\frac{1}{2}}{(s+1)\cdot s}$$

$s^2 + s + \frac{1}{2}$ har komplexa nollställen, vilket inte kan fås med reella T_1 och T_2! Översättning fungerar om F_{PID} har reella nollställen, endast.

3. (a) $\frac{d}{dt} z = (-1+i\cdot 2)z + (1-i)u$; $y = \mathrm{Re}\{z\}$

Inför $x_1 = \mathrm{Re}\{z\}$ och $x_2 = \mathrm{Im}\{z\}$!

$$\frac{d}{dt}(x_1+ix_2) = \underbrace{(-1+2i)(x_1+ix_2)} + (1-i)u$$

$$= (-x_1-2x_2) + i(2x_1-x_2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 - u \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \ , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ full rang $\Rightarrow$ styrbart system

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ full rang $\Rightarrow$ Observerbart system

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Endast nollställen i VHP $\Rightarrow$

Systemet insignal/utsignalstabilt !

---

4. $G(s) = \frac{s+1}{2s^2-s-1}$, $F(s) = 4\left(1+\frac{1}{2s}\right) = 2\,\frac{2s+1}{s}$

$L(s) = 2\,\frac{s+1}{2s^2-s-1}\cdot\frac{2s+1}{s}$

$$\begin{array}{l|l} 2s^2-s-1 & 2s+1 \\ \underline{-(2s^2+s)} & s-1 \\ \quad -2s-1 & \\ \underline{-(-2s-1)} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow L(s) = \frac{2(s+1)}{s(s-1)}$

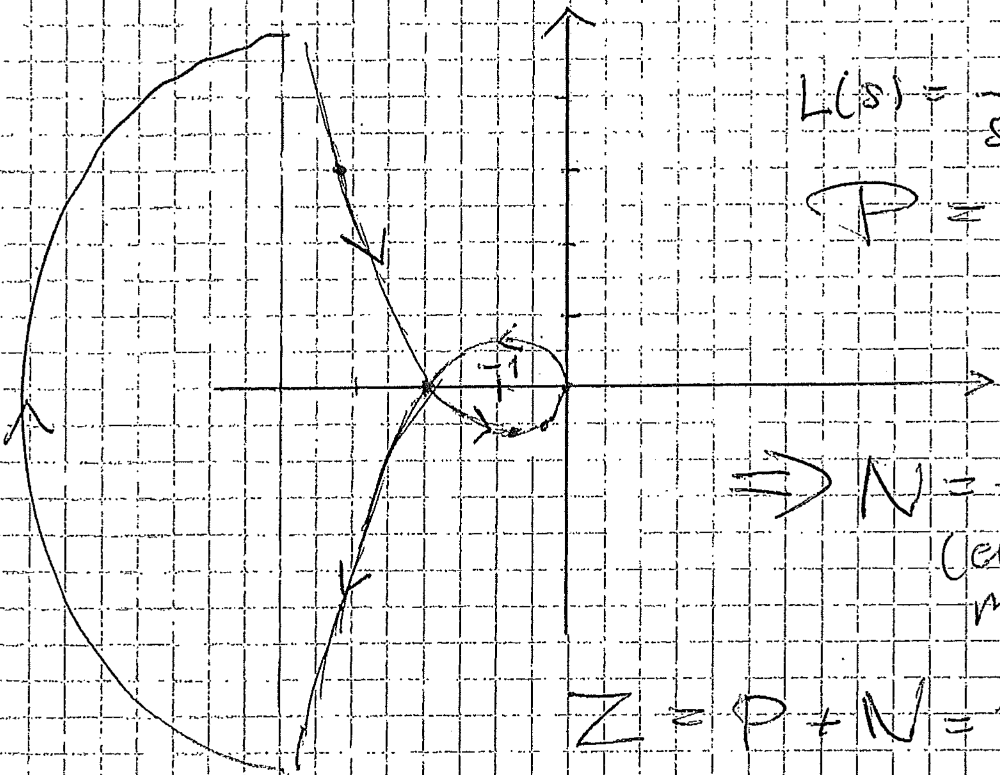
$$L(j\omega) = \frac{2(1+j\omega)}{-j\omega(1-j\omega)}\cdot\frac{(1+j\omega)}{(1+j\omega)} = 2j\,\frac{(1+j\omega)^2}{\omega(1+\omega^2)}$$

$$= 2j\,\frac{1+j2\omega-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{-4}{1+\omega^2} + j\,\frac{2(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}$$

4. (forts.)

ω	$Re\{L\}$	$Im\{L\}$
0	-4	∞
0.5	-3.2	3
1	-2	0
2	-0.8	-0.6
3	-0.4	-0.533
∞	0	0

På den "stora" bågen (då N:s kontur genomlöps medurs) mappas alla punkter på origo i L-pl. På den "lilla" bågen ($s = \varepsilon e^{j\varphi} \Rightarrow L \approx -\frac{2}{\varepsilon} e^{-j\varphi}$, sluts kurvan i $-\infty$ för $\varphi = 0$)



$$L(s) = \frac{s+1}{s(s-1)} \Rightarrow$$

$P = 1$ $(s = 1)$

$\Rightarrow N = -1$
(ett varv runt -1 moturs)

$$Z = P + N = 1 - 1 = 0$$

$\therefore$ Stabilt system enligt Nyquist!

5. (a) $\frac{d}{dt}\{V c_1(t)\} = Q c_{in}(t) - Q c_1(t)$

då ju pga god omrörning $c_{ut} \approx c_1$.

$$V \frac{d}{dt}(c_{10} + \Delta c_1(t)) =$$

$$= Q(c_{10} + \Delta c_{in}(t)) - Q(c_{10} + \Delta c_1(t))$$

eller $V \Delta \dot{c}_1 = Q \Delta c_{in} - Q \Delta c_1 \Rightarrow$

$$\left[\frac{V}{Q} s + 1\right] \Delta C_1(s) = \Delta C_{in}(s) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta C_1(s)}{\Delta C_{in}(s)} = \frac{1}{\frac{V}{Q} s + 1}$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} V_1 \Delta \dot{c}_1 &= Q \Delta c_{in} - Q \Delta c_1 \\ V_2 \Delta \dot{c}_2 &= Q \Delta c_1 - Q \Delta c_2 \\ &\vdots \\ V_n \Delta \dot{c}_n &= Q \Delta c_{n-1} - Q \Delta c_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Om $V_1 = V_2 = \dots = V_n = V/n$

$$\left[\frac{Vs}{nQ} + 1\right] \Delta C_1(s) = \Delta C_{in}(s)$$

$$[\quad -\,''\,- \quad] \Delta C_2(s) = \Delta C_1(s)$$

$$\vdots$$

$$[\quad -\,''\,- \quad] \Delta C_n(s) = \Delta C_{n-1}(s)$$

$\Delta C_{ut} \approx \Delta C_n \Rightarrow$

$$\frac{\Delta C_{ut}(s)}{\Delta C_{in}(s)} = \frac{1}{\left[\frac{Vs}{nQ} + 1\right]^n}$$

5c) $|G(j\omega)| = \frac{1}{\left|1+j\omega\frac{V}{nQ}\right|^{n}} = \left[1+\left(\frac{2\pi V}{nQT}\right)^2\right]^{-n/2}$

$(\omega = 2\pi/T)$

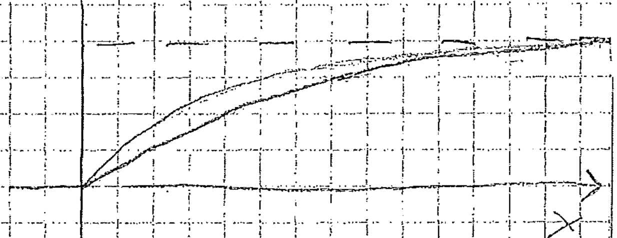
$|G_{dB}| = 20\cdot\log_{10}|G| = -10\cdot n\cdot\log_{10}\left[1+\left(\frac{2\pi}{nQT}\right)^2\right]$

d) $\log_{10}|G| = \frac{\log|G|}{\log 10}$ (log: naturliga logaritmen)

$$\frac{d|G|_{dB}}{dn} = \frac{-10}{\log 10}\left(\log\left[1+\left(\frac{2\pi V}{nQT}\right)^2\right] \cancel{+}\ \cancel{n}\ \frac{1}{\left(1+\left(\frac{2\pi V}{nQT}\right)^2\right)}\cdot 2\left(\frac{2\pi V}{nQT}\right)\cdot\left(-\frac{2\pi V}{n^2QT}\right)\right) = 0$$

$x = \left(\frac{2\pi V}{nQT}\right)^2 \Rightarrow$

$\log(1+x) = \frac{2x}{1+x}$



e) $V = 10000,\ Q = 100,\ T = 40,\ x \approx 3.92$

$\left(\frac{2\pi\cdot 10000}{n\cdot 100\cdot 40}\right)^2 = \left(\frac{20\pi}{4\cdot n}\right)^2 = \left(\frac{5\pi}{n}\right)^2 = 3.92 \Rightarrow$

$n = \frac{5\pi}{\sqrt{3.92}} \approx 7.93 \Rightarrow$

8 delvolymer (lika stora)