

# Reglerteknik Z/Kf/F/E

Kurskod: SSY 051, ERE 091, ESS 015

## Tentamen 2009-05-28

Tid: 8:30-12:30,

Lokal: M-huset

Lärare: Bengt Lennartson 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

*Tentamensresultat* anslås senast den 15 juni på avdelningens anslagstavla i ED-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den 15 och 16 juni kl 12:30-13:00 på avdelningen.

*Tillåtna hjälpmedel:*

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny). Anteckningar är tillåtna i formelsamlingen.
- Bodediagram (finns längst bak i tentatesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator.

Lycka till!

Institutionen för signaler och system  
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik  
Chalmers tekniska högskola





## 1

En process som ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K(s+a)^2}{s^3}$$

där parametrarna  $K$  och  $a$  antas vara positiva, ska regleras med en P-regulator  $F(s) = K_p$ .

- a) För vilka värden på förstärkningen  $K_p$  (som funktion av  $K$  och  $a$ ) är det återkopplade systemet stabilt.

(2 p)

- b) Välj specifikt  $K_p$  så att processförstärkningen  $K$  tillåts minska och öka med en faktor 2 innan det återkopplade systemet blir instabilt.

(1 p)

- c) Bekräfta stabiliteten för det återkopplade systemet med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet för fallet  $a = 1$  och  $K = 1$  och den valda P-regulatorn i uppgift b).

(2 p)

## 2

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

ska regleras med en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

- a) Dimensionera PI-regulatorn för en godtycklig överkorsningsfrekvens  $\omega_c$  så att fasmarginen  $\varphi_m = 50^\circ$ .

(3 p)

- b) Välj  $\omega_c$  så att lågfrekventa laststörningar kompenseras så effektivt som möjligt. Optimum ligger i intervallet  $1.2 < \omega_c < 1.6$ . För full poäng krävs att föreslaget  $\omega_c$  är mindre än 10% från optimalt värde.

(2 p)

## 3

För det återkopplade systemet i föregående uppgift blir insvängningstiden från referenssignalen  $r$  drygt 4 sek. En snabbare insvängning önskas utan att stabilitetsmarginaler och känsligheten för mätstörningar i återkopplingen ökar.

Ett referenssignalfilter  $F_r(s)$  ska därför dimensioneras, där den filtrerade referenssignalen  $R_f(s) = F_r(s)R(s)$  jämförs med processens uppmätta utsignal  $Y_m(s)$ . Reglerfelet som är insignal till PI-regulatorn blir följaktligen  $R_f(s) - Y_m(s)$ .

a) Välj  $F_r(s)$  så att insvängningstiden vid en stegändring i referenssignalen blir c:a 1 sek.  
(3 p)

b) Hur mycket ökar styrsignalens begynnelsevärde  $u(0)$  vid en sådan stegändring, då referenssignalfiltret införs?  
(2 p)

#### 4

En tidsdiskret regulator ska dimensioneras för en dödtidsprocess med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-hs}}{s}$$

där dödtiden motsvarar ett samplingsintervall  $h$ . Antag att datorn som ska styra denna process lägger ut en styckvis konstant styrsignal  $u(t)$ .

a) Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion  $G_d(z)$  för ett godtyckligt samplingsintervall  $h$ .  
(1 p)

b) Bestäm en tidsdiskret P-regulator så att de båda polerna för det tidsdiskreta återkopplade systemet placeras som en dubbelpol.  
(2 p)

c) Hur effektivt kompenseras lågfrekventa processtörningar  $v$  som adderas till styrsignalen, d.v.s. bestäm lågfrekvensförstärkningen för det återkopplade systemet från  $v$  till processens utsignal  $y$   
(2 p)

#### 5

Betrakta den olinjära tillståndsmodellen

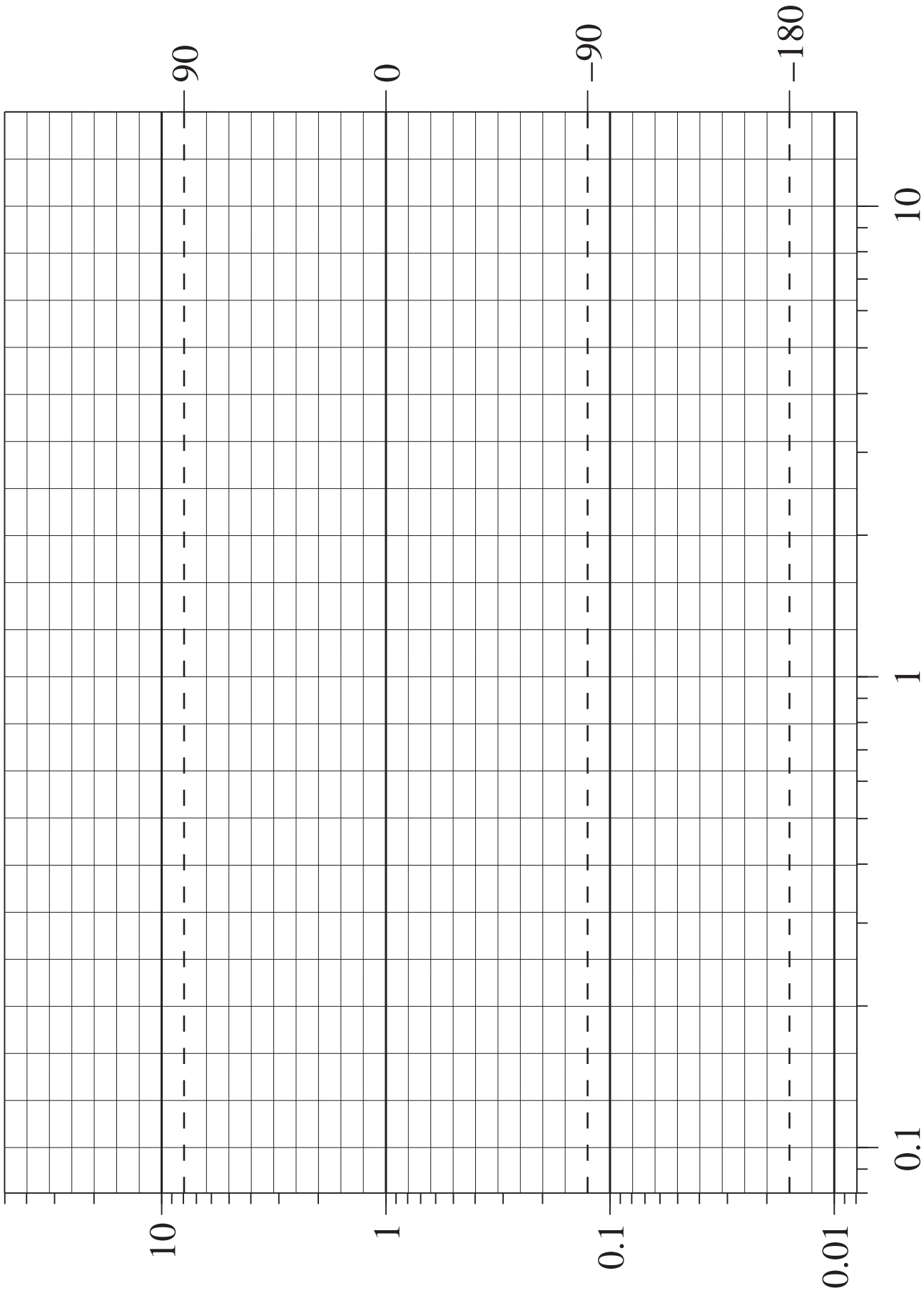
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1(t)} + x_2(t) \\ x_1(t)u(t) - x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [x_1^2(t) + u(t) \sin x_2(t)]$$

a) Linjärisera denna tillståndsmodell vid en godtycklig arbetspunkt (jämviktpunkt)  $(x_{10}, x_{20}, u_0)$   
(2 p)

b) Bestäm arbetspunkten som funktion av insignalens nivå  $u_0$   
(1 p)

c) För vilka värden på insignalen  $u_0$  är den linjäriserade modellen stabil?  
(2 p)



# Lösning till tentamen i Reglerteknik 090528

1. a)  $L(s) = K_p G(s) = \frac{K_p K (s+a)^2}{s^3} = \frac{\bar{K} s^2 + 2a\bar{K}s + \bar{K}a^2}{s^3} \quad \bar{K} = K_p K$

KE  $s^3 + \bar{K}s^2 + 2a\bar{K}s + \bar{K}a^2$

Routh-Hurwitz tabell      Stabilitetskrav

$s^3$     1       $2a\bar{K}$        $\bar{K} > 0$

$s^2$      $\bar{K}$        $\bar{K}a^2$        $2a\bar{K} - a^2 > 0$

$s^1$      $\frac{2a\bar{K}^2 - \bar{K}a^2}{\bar{K}}$     0       $\bar{K}a > 0$

$s^0$      $\bar{K}a$

$a > 0 \Rightarrow \bar{K} = K_p K > \frac{a}{2}$

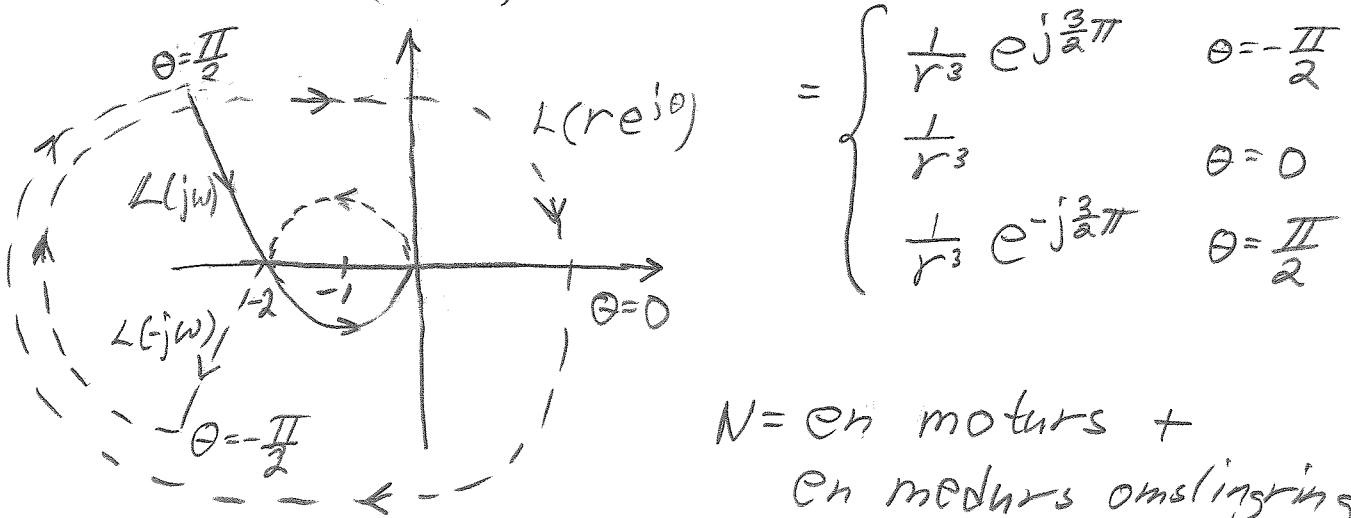
$\therefore \underline{\underline{K_p > \frac{a}{2K}}}$

b)  $A_m K_p = \frac{a}{2K} \quad K_p = \frac{a}{A_m 2K}$       Kritiskt då förstärkningen minskar med en faktor 2  
 $\Rightarrow A_m = 0.5$  och  $K_p = a/K$

c)  $a = K = 1 \Rightarrow K_p = 1 \quad L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$

$L(j\omega) = \frac{(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3} = -\frac{1-\omega^2+2j\omega}{j\omega^3} = -\frac{2}{\omega^2} + j\frac{1-\omega^2}{\omega^3} = -2 \quad \omega=1$

$L(re^{j\theta}) \approx \frac{1}{r^3} e^{-j3\theta} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



$$= \begin{cases} \frac{1}{r^3} e^{j\frac{3}{2}\pi} & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{r^3} & \theta = 0 \\ \frac{1}{r^3} e^{-j\frac{3}{2}\pi} & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

N = en moturs + en medurs omslingring = 0

Z = antalet nollställen till KE i HHP =  
 $= P + N = 0 + 0 = 0 \quad \therefore$  stabil

$$2. a) G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \angle G(j\omega) = -2 \arctan \omega$$

$$F_{PI}(j\omega) = K_i \frac{1+T_i j\omega}{j\omega} \quad |F_{PI}(j\omega)| = K_i \frac{\sqrt{1+(T_i \omega)^2}}{\omega}$$

$$\angle F_{PI}(j\omega) = -90^\circ + \arctan \omega T_i$$

$$\angle L(j\omega_c) = \angle G(j\omega_c) + \angle F_{PI}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m \quad \varphi_m = 50^\circ$$

$$-2 \arctan \omega_c - 90^\circ + \arctan \omega_c T_i = -180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$$

$$\omega_c T_i = \tan(2 \arctan \omega_c - 40^\circ)$$

$$|L(j\omega_c)| = |G(j\omega_c)| |F_{PI}(j\omega_c)| = \frac{K_i \sqrt{1+(T_i \omega_c)^2}}{\omega_c (1+\omega_c^2)} = 1$$

$$K_i = \frac{\omega_c (1+\omega_c^2)}{\sqrt{1+\tan^2(2 \arctan \omega_c - 40^\circ)}}$$

b) Minimal  $T_i = \frac{1}{K_i} \Rightarrow$  maximal  $K_i$

$\omega_c$	1.3	1.36	1.4	1.5	Optimal $\omega_c = 1.36$ $\Rightarrow K_i = 1.493$ $T_i = 1.762$
$K_i$	1.486	1.493	1.490	1.456	

3. a)  $L(s) = \frac{K_i(1+T_i s)}{s(1+s)^2}$

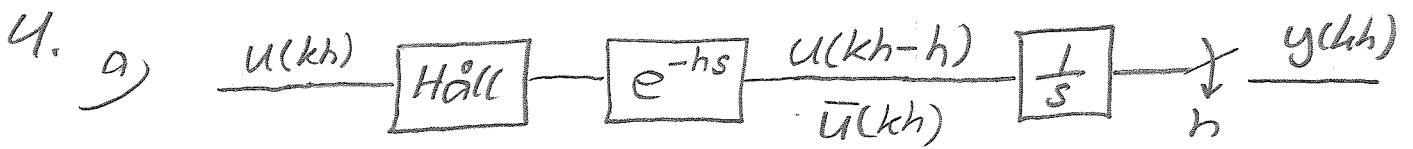
$$G_{r_f y}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_i(1+T_i s)}{s^3 + 2s^2 + (1+K_i T_i)s + K_i}$$

$$F_r(s) = G_{r_f y}^{-1}(s) \frac{1}{(1+T_f s)^m} = \frac{s^3 + 2s^2 + (1+K_i T_i)s + K_i}{K_i(1+T_i s)(1+T_f s)^2}$$

$$\Rightarrow G_{r y}(s) = G_{r_f y}(s) F_r(s) = \frac{1}{(1+T_f s)^2}$$

FS sid 13  $\Rightarrow t_{5\%} = (3+1.6) T_f = 1 \Rightarrow T_f = \frac{1}{4.6} = 0.217$

b) Ökningen i  $u(0) = \frac{r_f(0)}{r(0)} = \lim_{s \rightarrow \infty} s F_r(s) \frac{r(0)}{s} \frac{1}{r(0)} =$   
 $= \lim_{s \rightarrow \infty} F_r(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + \dots}{K_i T_i T_f^2 s^3 + \dots} = \frac{1}{K_i T_i T_f^2} = 8.07$



$$\frac{Y(z)}{\bar{U}(z)} = \frac{h}{z-1}$$

$$\bar{U}(z) = \mathcal{Z}\{u(kh-h)\} = z^{-1}U(z)$$

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{\bar{U}(z)} \frac{\bar{U}(z)}{U(z)} = \frac{h}{z-1} z^{-1} = \frac{h z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

b)  $F_d(z) = K_p$        $G_{ry_d}(z) = \frac{G_d(z)F_d(z)}{1+G_d(z)F_d(z)} =$   
 $= \frac{K_p h z^{-2}}{1-z^{-1} + K_p h z^{-2}} = \frac{h K_p}{z^2 - z + h K_p} = \frac{h K_p}{(z-d)^2} =$

$$= \frac{h K_p}{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2} \quad \begin{cases} 2\alpha = 1 & \alpha = 0.5 \\ \alpha^2 = h K_p & K_p = \alpha^2/h = 0.25/h \end{cases}$$

c)  $G_{uy_d}(z) = \frac{G_d(z)}{1+G_d(z)F_d(z)} = \frac{G_{ry_d}(z)}{F_d(z)} = \frac{h}{(z-d)^2}$

$$G_{uy_d}(e^{j\omega h}) \text{ för } \omega=0 \Leftrightarrow G_{uy_d}(1) = \frac{h}{(1-d)^2} = \frac{h}{0.25} = \frac{1}{K_p}$$

5. a)  $\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} & 1 \\ u_0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{10} \end{bmatrix} \Delta u$

$$\Delta y = [2x_{10} \quad u_0 \cos x_{20}] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \sin x_{20} \Delta u$$

b)  $\begin{bmatrix} -\sqrt{x_{10}} + x_{20} \\ x_{10} u_0 - x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_{10} = x_{20}^2 \\ x_{20} = x_{10} u_0 = x_{20}^2 u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{10} = \frac{1}{u_0^2} \\ x_{20} = \frac{1}{u_0} \end{cases}$

c)  $A = \begin{bmatrix} -0.5u_0 & 1 \\ u_0 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(sI_n - A) = \det \begin{bmatrix} s+0.5u_0 & -1 \\ -u_0 & s+1 \end{bmatrix} =$

$$= (s+0.5u_0)(s+1) - u_0 = s^2 + (1+0.5u_0)s + 0.5u_0$$

stabil d'  $\begin{cases} 1+0.5u_0 > 0 \\ -0.5u_0 > 0 \end{cases}$

$$\underline{\underline{-2 < u_0 < 0}}$$