Regler F   Fö

1999

Sidor: 50

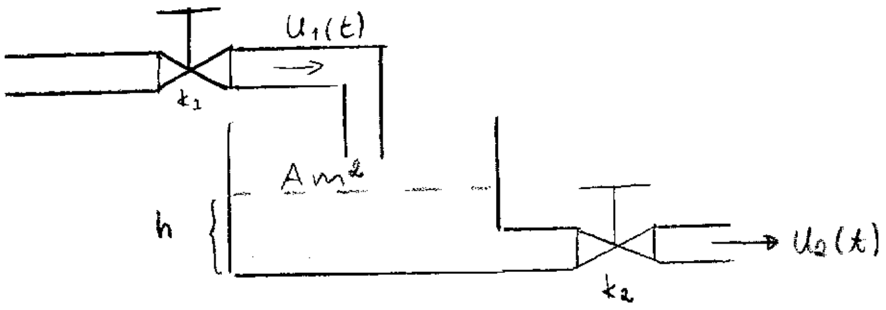
Pris: ~~15 kr~~ 25 kr

REGLERTEKNIK

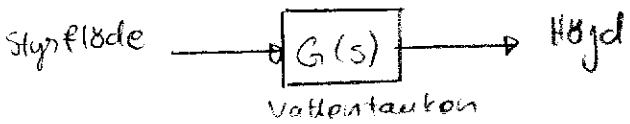
Hösten -99

SYSTEMANALYS

- Vattentanken



Helsättning



Antag: Utflödet proportionellt mot h för måttliga nivåändringar

Alltså:

$$u_2(t) = k_2 h(t)$$

vidare $u_1(t) \sim k_1$

Matematisk modell enligt principen

volymändring / tidsenhet
= inflöde − utflöde

$$A\frac{dh(t)}{dt} = u_1(t) - u_2(t)$$
$$= u_1(t) - k_2 h(t)$$

Laplace transformera

$$A\,sH(s) - A\,h(0) = U_1(s) - k_2 H(s)$$

Bilda $\dfrac{\mathcal{L}\{\text{utsignal}\}}{\mathcal{L}\{\text{insignal}\}}$

$$\frac{H(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{As + k_2} + \frac{1}{U_1(s)} \cdot \frac{A \cdot h(0)}{As + k_2}$$

Vid definition av överföringsfunktion sätts alla begynnelsevillkor $\equiv 0$

$$\Longrightarrow \frac{H(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{As + k_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{k_2}{A}} = G(s)$$

Nämnaren satt till noll ger <u>karakteristiska ekvationen</u>

$s + \frac{k_2}{A} = 0$ Här ett system av 1:a ordningen = diff. ekv gradtal

Stabilt system - om alla rötter har negativ realdel

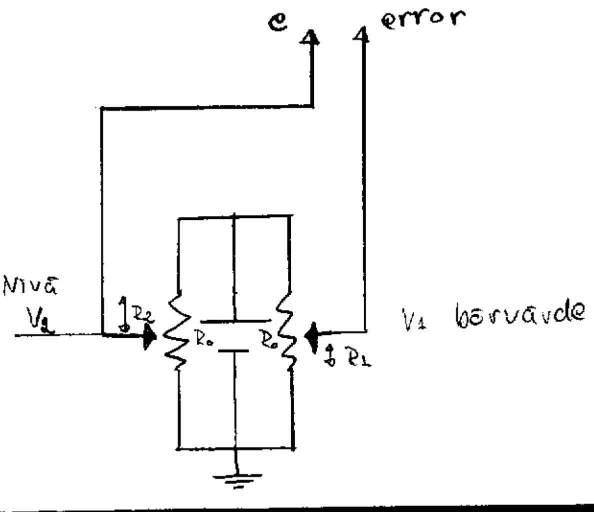
Poler - nämnarens rötter, här $s = -\frac{k_2}{A}$

Nollställen - täljarens rötter, här inga

I praktiska reglersystem är täljarens gradtal $\leq$ nämnarens

$$G(s) = \frac{\frac{1}{k_2}}{1 + \frac{A}{k_2} \cdot s}$$

o Jämföraren



Nivå $\sim R_2$

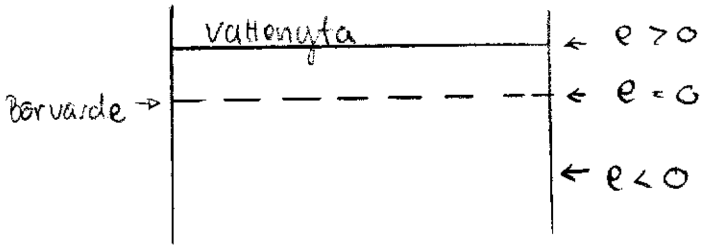
Börvärde $\sim R_1$

Beräkna $e = e(R_1, R_2)$

Sätt $e = V_1 - V_2$

$$= \frac{E}{R_0} \cdot R_1 - \frac{E}{R_0}(R_0 - R_2)$$

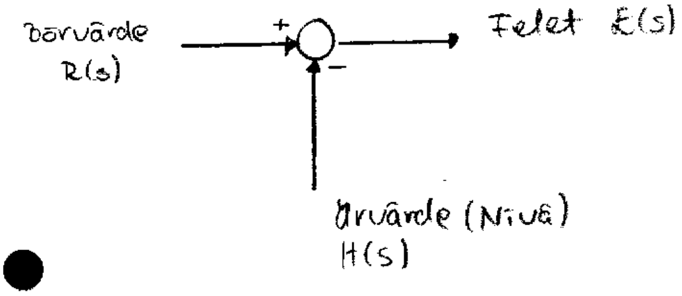
$$= \frac{E}{R_0}(R_1 - R_0 + R_2)$$



vi bör släppa ut mindre vatten

inget fel

mer vatten



$$R(s) - H(s) = E(s)$$

ÖVERFÖRINGSFUNKTIONER

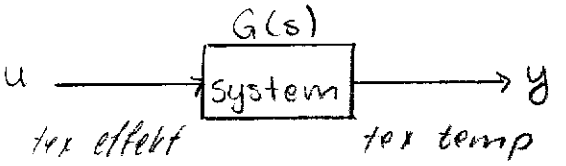
föreläsning 2

Betrakta en linjär, tidsinvariant differentialekvation

inga produkter av derivator

termerna a, b är konstanter

$$a_3 \frac{d^3y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{P(s)} = G(s)$$

$N(s) = 0$ ger nollställen

$P(s) = 0$ ger poler

Problem: Beräkna $y(t)$ när $u(t)$ och $G(s)$ är kända

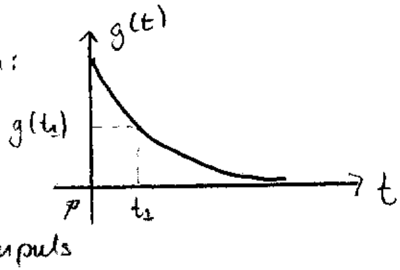
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \underbrace{\mathcal{L}(\delta(t))}_{=1}\}$$

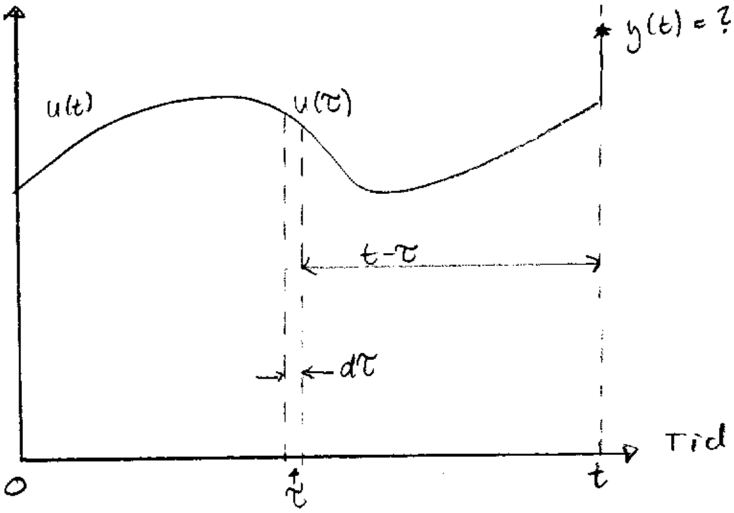
$$= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$$= g(t)$$

○ FALTNING (convolution)

Betrakta:





Bidraget $u(\tau)\cdot d\tau \cdot g(t-\tau)$

Sen sta alla pulsor med

$$\Rightarrow \int_0^t u(\tau)d\tau \, g(t-\tau)$$ Summering av alla pulser

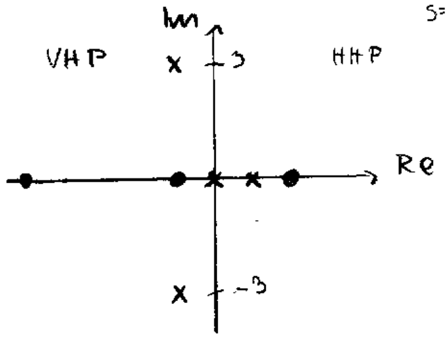
$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ G(s)\cdot U(s) \right\}$$

○ TRANSIENT LÖSNING

$$G(s) = \frac{(s+5)(s+1)(s-2)}{s(\underbrace{s^2+2s+10}_{s=-1\pm j3})(s-1)}$$



Betrakta systemets impulssvar

Partialbråks uppdela

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10} + \frac{D}{s+1}$$

Inverstransformera $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lösning av typ

$\Rightarrow \frac{A}{1} + k_1 e^{-t} \sin 3t + k_2 e^{-t} \cos 3t + D e^{t}$

Kvarvarande vontan Lôt $t \to \infty$

konst + 0 + 0 + ∞

s → ger en konstant

Komplexa rötter med negativ realdel går mot noll, positiv realdel går mot ∞. Positiv pol $\to \infty$

Om minst en pol finns i HHP kommer

$g(t) \to \infty$ då $t \to \infty$ Instabilt system

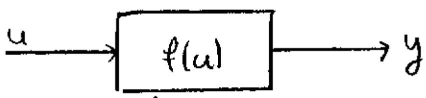
Im-axeln är ett gränsfall

Samtliga polen i VHP kommer

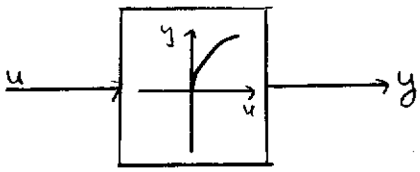
$g(t) \to 0$ då $t \to \infty$ stabilt system

LINEARISERING

Metod: En statisk, olinjär länk skall lineariseras



tex $f(u) = \sqrt{u}$



Utgå från en viss arbetspunkt (ett visst $u_0 \Rightarrow$ ett visst y_0)

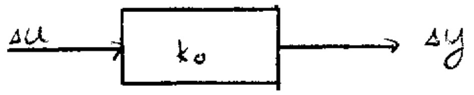
Taylor utveckla!

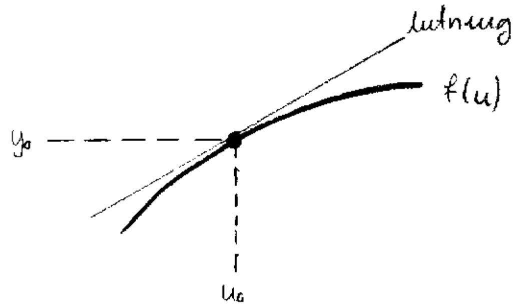
Sätt $\begin{cases} u = u_0 + \Delta u \\ y = y_0 + \Delta y \end{cases}$

$$\underbrace{y(t) = f(u_0)}_{\Delta y} + \underbrace{\left.\frac{d f(u)}{d u}\right|_{u=u_0}}_{\text{en konstant } k_0} \cdot \underbrace{(u-u_0)}_{\Delta u} + \text{högre ordningens termer}$$

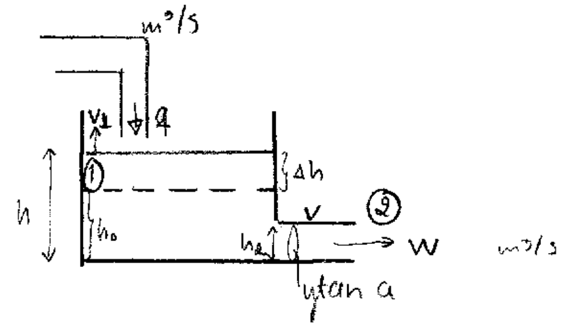
Alltså $\Delta y \approx k_o \cdot \Delta u$

ett linjärt samband





ex:



V_1 = hastigheten på ytan

V = hastigheten på utflödet

Linearisera kring h_o

Bestäm överföringsfunktionen

$$\frac{\mathcal{L}\{\Delta h(t)\}}{\mathcal{L}\{\Delta q(t)\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{BERNOULLI'S TEOREM} \\ p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{konst}\end{array}}$$

Den säger att i varje punkt av vätskan gäller

$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{konst}$

ρ = densitet kg/m^3

p = statiskt tryck $N/m^2 = Pa$

g = gravitationen m/s^2

v = hastighet m/s

$$\cancel{P_a} + \frac{\rho v_1^2}{2} + hg\rho = \cancel{P_a} + \frac{\rho v^2}{2} + \overset{(h_2)}{0} g\rho$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + hg\rho = \frac{\rho v^2}{2}$$

$$V = \sqrt{\frac{\rho v_1^2 + 2hg\rho}{\rho}} = \sqrt{v_1^2 + 2hg}$$

v_1^2 försvinner i förhållande till de andra. V_1 är så litet

$= \sqrt{2hg}$

$w = a \cdot v$

a - effektiv area

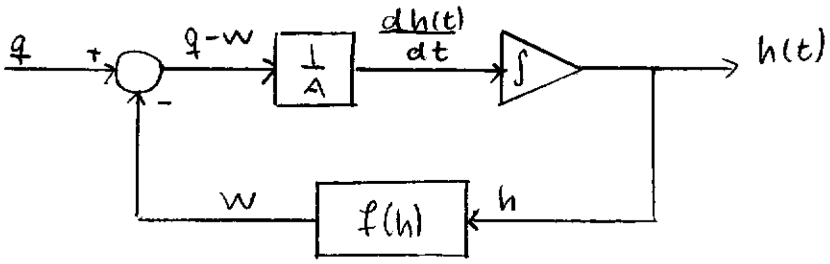
$w = a\sqrt{2gh}$

$= f(h)$ en olinjär funktion av höjden

∘ Balansekvation

$$\frac{dV}{dt} = A\,\frac{dh(t)}{dt} = q - w$$

∘ Blockschema



↑ olinjär länk

Taylorutveckla $f(h)$ kring h_0

Sök kvarvarande utflöde w_0

Nu gäller $\frac{dh(t)}{dt} = 0 \Rightarrow w_0 = q_0$

$$f(h) = f(h_0) + \underbrace{\frac{df(h)}{dt}\Big|_{h=h_0}}_{k_0}\underbrace{(h-h_0)}_{\Delta h} + \text{högre ordningens termer}$$

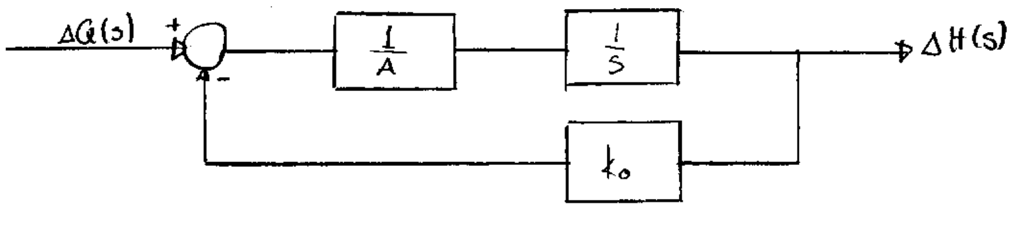
$$k_0 = a\cdot\frac{1}{2}(2gh)^{-1/2}\cdot 2g\Big|_{h=h_0}$$

$$= \frac{ag}{\sqrt{2gh_0}}$$

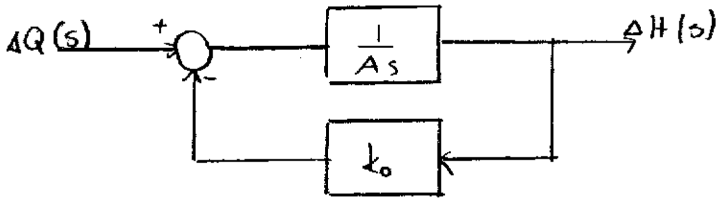
Vidare är $\Delta w = w - w_0$

$\Delta q = q - q_0$

Blockschema med helt linjära komponenter



Signalöverföringsfunktion = ramp $\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$ $\cdot\frac{1}{s} =$



$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{\frac{1}{A\cdot s}}{1+\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{s}\cdot k_0} = \frac{1}{As+k_0}$$

ROUTH'S ALGORITM

Förelasning 3

- Stabilitetskriterium (snabb version)

Karakteristisk ekvation

$$a_0 s^n + b_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + b_1 s^{n-3} + \dots = 0$$

Bilda schemat

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & \boxed{a_0} & a_1 & a_2 & \text{osv} \\ s^{n-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \text{osv} \\ s^{n-2} & & & & \\ s^{n-3} & \multicolumn{3}{l}{\text{koefficienter bildas ur ovanstående}} & \text{Nollor} \\ \vdots & & & & \\ s^0 & & & & \end{array}$$

Studera teckenväxlingar i den inringade kolonnen

inga ⇒ stabilt system

antalet teckenväxlingar = antalet rötter i högra halvplanet

OLIKA TYPER AV MODELLER

- SKALMODELLER *bygger en mindre skala*
- BESKRIVANDE TEXT
- RITNINGAR, BLOCKDIAGRAM
- FLÖDESSCHEMA, BESLUTSTABELLER *tex datorprogram*
- DIAGRAM (FUNKTIONSSAMBAND) *tabeller, monogram*
- MATEMATISKA FORMLER

SYSTEMTYPER

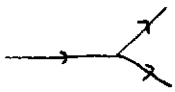
- ELEKTRISKA
- HYDRAULISKA
- TERMISKA
- MEKANISKA

– PNEUMATISKA

m.fl.

Till varje systemtyp kan tillordnas variabler som representerar kvalitet
flöde
potential

NÅGRA PRINCIPER FÖR MODELLBYGGE

- KRAFTBALANS — Summan av krafterna = massans acceleration
- MASS BALANS — massa in − massa ut = ackumulerad massa
- ENERGIBALANS — energi in − energi ut = ackumulerad energi
- SPECIAL FALL — förgrenings punkt  ingen ackumulering

  summan av alla potentialer = 0 i en sluten pol 

KONSTITUTIVA RELATIONER

- OHMS LAG

  Spänning → [Resistans] → Ström $\quad U = R \cdot I$

- BERNOULLIS LAG

  Höjd → [resistans] → utström $\quad p + \frac{\rho v^2}{2} + h\rho g = konst$

- ALLMÄNNA GASLAGEN

  temp → [gastank] → tryck $\quad pV = RnT$

- VENTILKARAKTÄRISTIKA

  tryckfall → [ventil] → flöde $\quad q = k_s\sqrt{p_1 - p_2}$

ARBETSMETOD

1) Analysera systemets funktion
2) Formulera fysikaliska samband
   (ofta diff. ekvationer av balanstyp)
3) Komplettera med konstitutiva relationer
   (vilket problem skall lösas)

4) Dimensionskontroll

5) Ev linearisering

6) Laplace transformera. Bilda överföringsfunktioner

blockschema m.m

(alt. med tillståndsbeskrivning)

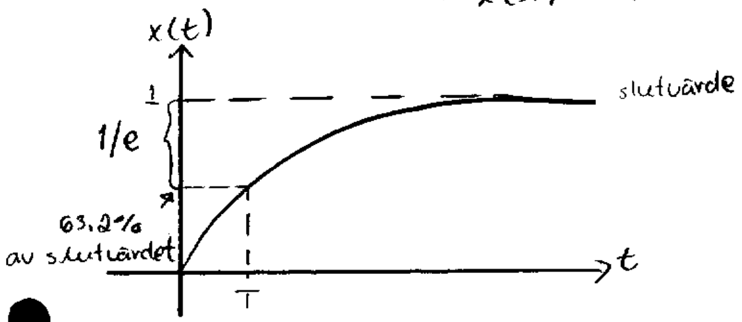
Anmärkning: Överföringsfunktioner man kan även tas fram via experiment (Identifiering)

FÖRSTA ORDNINGENS SYSTEM

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

stegsvar $\quad X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+Ts}$

$$\Rightarrow x(t) = 1 - e^{-t/T}$$

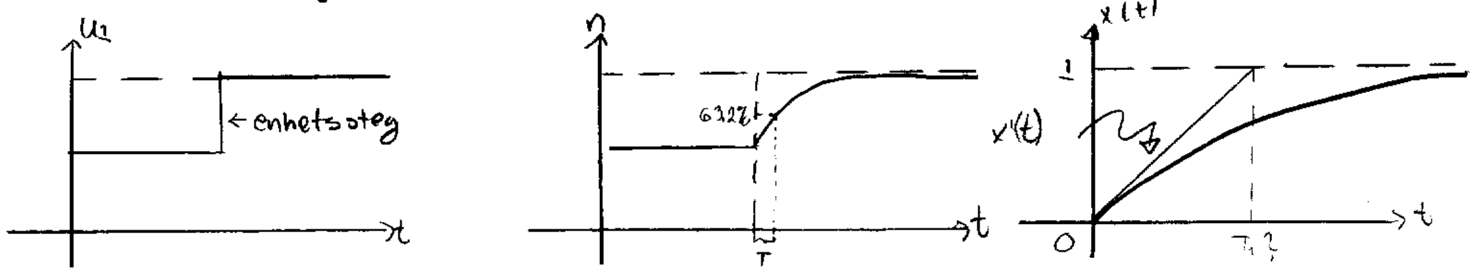


stort T : trög process (stor vattenyta)

Ex: Vattentanken

Antag balans råder dvs $u_1 = u_2$ & h = konstant

Här $T = \frac{A}{k_2}$



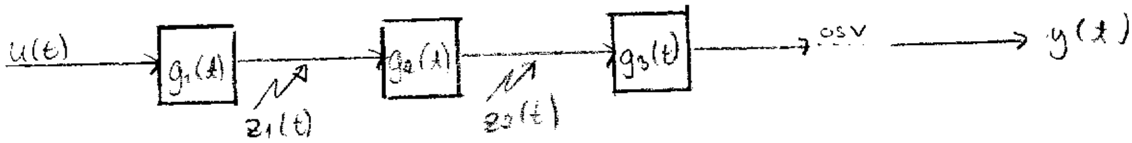
Vad är T_1?

Vad betyder det?

BLOCKSCHEMA

Kaskad koppling (serie)

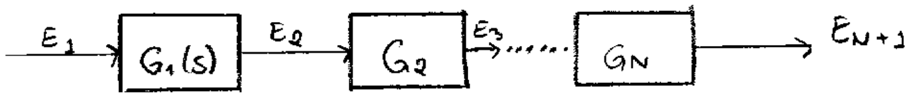
Med impulsfunktions beskrivning



Faltning

$$z_1(t) = \int_0^t g_1(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$z_2(t) = \int_0^t g_1(\tau)\, z_1(t-\tau)\, d\tau$$ osv ingen praktisk metod



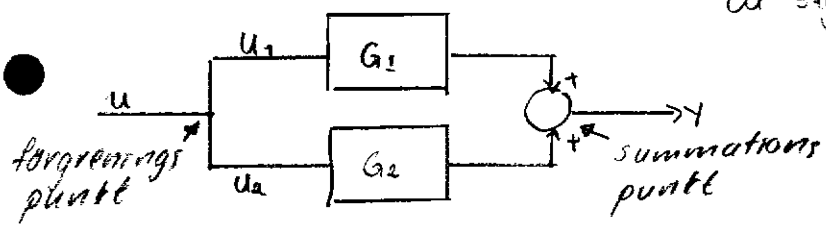
Def: $G_1 = \frac{E_2}{E_1}$

$G_2 = \frac{E_3}{E_2}$ osv

$G_{TOT} = \frac{E_{N+1}}{E_1} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdots G_N$

PARALLELLKOPPLING

ett signalschema

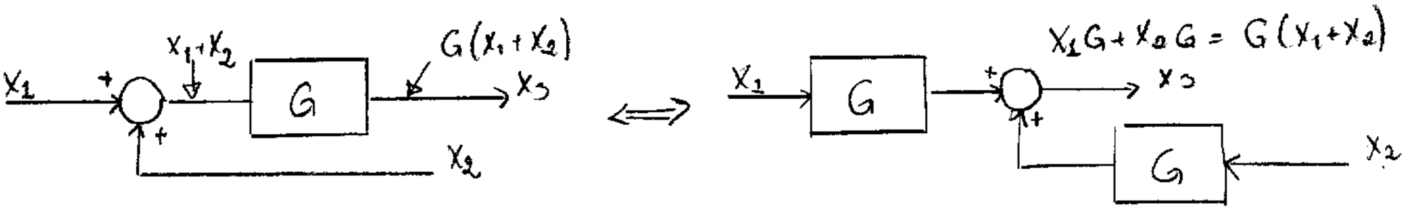


$\Rightarrow U_1 = U_2 = U$

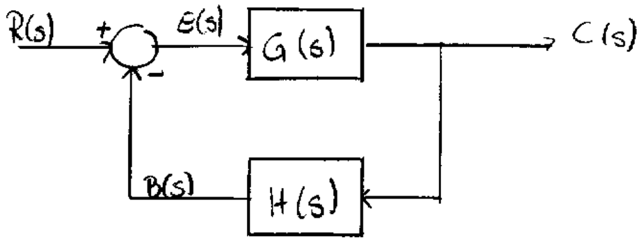
$Y = UG_1 + UG_2$

$= U(G_1 + G_2)$

FÖRFLYTTNING AV SUMMATIONSPUNKT



ÅTERKOPPLING



Kanonisk form

Sök $G_{tot} = \frac{C(s)}{R(s)}$

Inför hjälpvariabler

$$\left.\begin{array}{l} E = R - B \\ B = C \cdot H \\ C = E \cdot G \end{array}\right\} \quad \frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

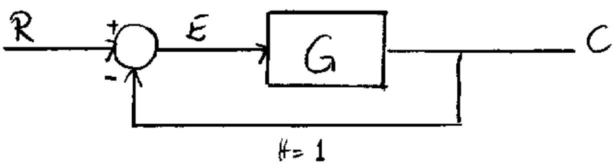
Specialfall:

$H(s) = 1$ (enhets återföring)

$$\Rightarrow G_{tot} = \frac{G}{1+G}$$

- $\frac{C(s)}{R(s)}$ kallas även REGLERKVOTEN
- $G(s) \cdot H(s)$ kallas även KRETSÖVERFÖRINGEN

STATISK NOGGRANNHET



$$\left.\begin{array}{l} E = R - C \\ \frac{C}{R} = \frac{G}{1+G} \\ C = E \cdot G \end{array}\right\} \quad \frac{E}{R} = \frac{1}{1+G}$$

Vi söker det kvarstående felet (dvs $t \to \infty$) vid stegsignal

SLUTVÄRDESSATSEN

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{steg}}}{\frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{1+G(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} = C(s) \qquad \text{stabilt system}$$

Tre testsignaler:	(enhets)steg	$\sigma(t)$	$1/s$	positions fel
	–"– ramp	t	$1/s^2$	hastighets fel
	–"– parabel	$\frac{t^2}{2}$	$1/s^3$	accelerations fel

Allmän form

$$G(s) = \frac{\prod_{j=1}^{p} (s + z_j)}{s^m \prod_{j=1}^{n} (s + p_j)}$$

då $\underset{\uparrow\ \text{typnummer}}{\underline{m=0}}$ dvs ingen integration

i kretsen fås

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n} z_j}{\prod_{j=1}^{n} p_j} = K_0$$

Har vi typ nollsystem så får vi ett fel dvs ett ändligt fel

K_0 kallas POSITIONSFELKONSTANTEN

- då $m = 1$ (1st integration i kretsen) fås felet $= 0$
- $m = 2 \Rightarrow$ felet $= 0$ "snabbare"

osv

På liknande sätt definieras

HASTIGHETSKONSTANTEN K_1

ACCELERATIONSKONSTANTEN K_2

PID - REGULATOR

föreläsning 4

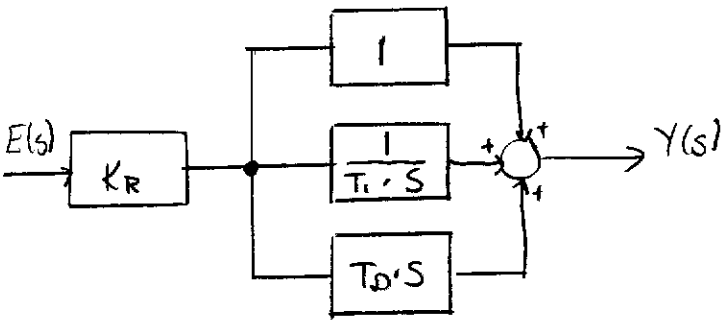
- $e(t) \xrightarrow[\text{felet}]{} \boxed{\text{PID}} \xrightarrow[\text{styrsignal}]{} u(t)$

- $u(t) = a\, e(t) + a_2 \int_0^t e(\tau)\,d\tau + a_3 \frac{d\,e(t)}{dt}$

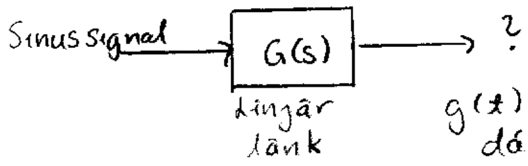
$$u(t) = \underbrace{K_R}_{\substack{\text{regulator}\\ \text{konstant}}} \left[\underbrace{e(t)}_{\substack{\text{prop.}\\ \text{del}}} + \underbrace{\frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau)\,d\tau}_{\substack{\text{integrerande}\\ \text{del}}} + \underbrace{T_D \frac{d\,e(t)}{dt}}_{\substack{\text{deriverande}\\ \text{del}}} \right]$$

Laplace $\Rightarrow$

$$G_{PID} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right]$$



PROBLEMSTÄLLNING



$g(t) \to 0$ då $t \to \infty$

Antag insignalen $A \cdot \sin \omega t$

A, ω konstanter

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t g(\tau) A \cdot \mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega(t-\tau)} \right\} d\tau$$

$$= A \int_0^t g(\tau) \cdot \underbrace{\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\tau} \right\}}_{\text{reellt villkor}} d\tau$$

$$= A \cdot \mathrm{Im}\left\{ \int_0^t g(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} d\tau \, e^{i\omega t} \right\}$$

Allmänt

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transient del} \\ \to 0 \text{ då } t \to \infty}}{y_t(t)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stationär del} \\ \text{"finns kvar" då } t \to \infty}}{y_s(t)}$$

Studera:

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^\infty g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \left[\mathcal{L}\{ g(\tau) \} \right]_{s = i\omega}$$

$$= \left[G(s) \right]_{s = i\omega}$$

$$= G(i\omega) = |G(i\omega)| \cdot e^{i \angle G(i\omega)}$$

Resultat:

$$y_s(t) = A \cdot \operatorname{Im}\left\{ |G(i\omega)| \cdot e^{i \angle G(i\omega)} \cdot e^{i\omega t} \right\}$$

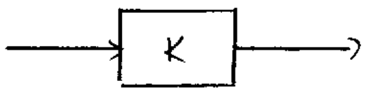
$$= A\, |G(i\omega)|\, \operatorname{Im}\left\{ e^{i\omega t + i\angle G(i\omega)} \right\}$$

$$= A \underbrace{|G(i\omega)|}_{\text{amplitud ändring}} \sin(\underbrace{\omega t}_{\text{samma frekvens}} + \underbrace{\angle G(i\omega)}_{\text{fasändring (fkn av } \omega)})$$

OBS! enhetsfunktion

NÅGRA STANDARDLÄNKAR

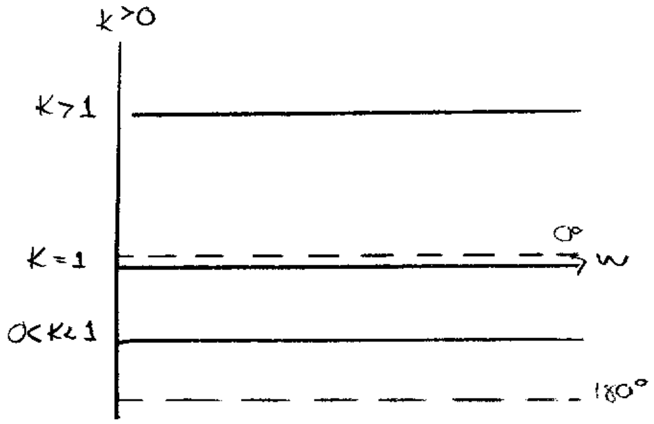
1) $G(j\omega) = K$ (en konstant)



Här är $|G| = K$

$\angle G = 0°$ för $K > 0$

$= -180°$ för $K < 0$

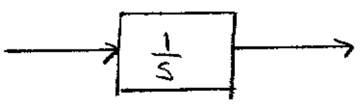


fasändring

amplitudändring i

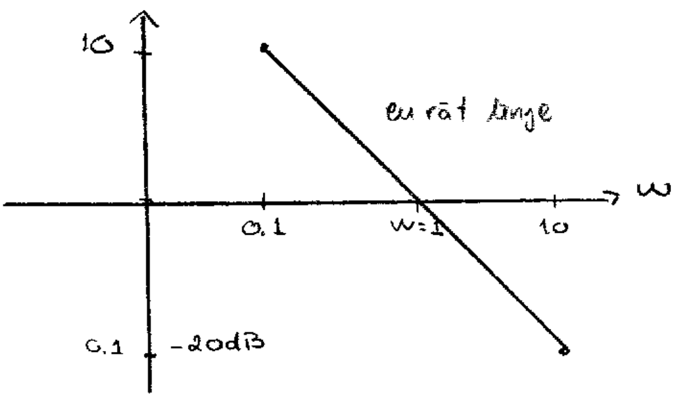
förhållande till insignalen

2) INTEGRATION



$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G| = \frac{1}{\omega}$

$\angle G = -90°$



En oktav är tre rutor på diagrampappret. Det är också 6dB

Beräkna linjens lutning

Då frekvensen ökar 10ggr (=1dekad), ändras amplituden -20dB
⇒ -20dB/dekad

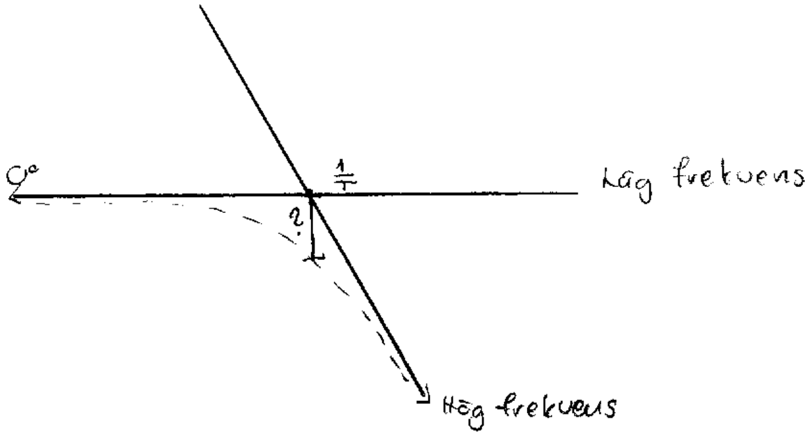
Alt. OKTAV innebär fördubbling

$$20 \log \frac{\frac{1}{2\omega}}{\frac{1}{\omega}} = 20 \log \frac{1}{2} = -20 \log 2 \approx -6\text{dB/oktav}$$

3) 1:A ORDNINGENS LÄNK

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+Ts}} \longrightarrow$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$



Asymptoter

$\lim_{\omega \to 0} |G| = 1 \;\hat{=}\; 0\,dB$

samt $|G| \to \frac{1}{T\omega}$ då $\omega \to \infty$

dvs $-6dB/oktav$

Asymptoternas skärningspunkt $\omega = \frac{1}{T}$

Hur mycket skiljer sig asymptoterna från den verkliga kurvan?

Betrakta brytpunkten

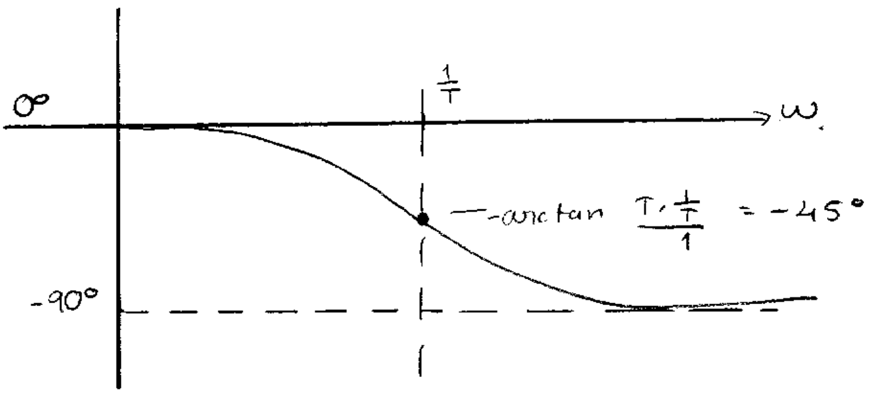
$$20\log\frac{1}{\sqrt{1+T^2\cdot\frac{1}{T^2}}} = -20\log\sqrt{2} \approx -3dB$$

6dB är 3rutor
3dB är 1,5 rutor
så alltså -1,5 rutor

Oktav upp och ner $-1,0dB$

Faskurvan $\omega \to 0 \Rightarrow 0°$
$\omega \to \infty \Rightarrow -90°$

$\underline{/G(j\omega)} = -\arctan(\omega T)$



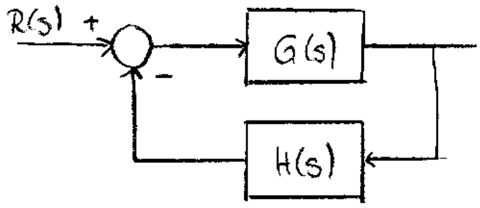
samtliga värden tas lämpligen från formelsamling

NYQVIST'S STABILITETSKRITERIUM

Förelasning 5

Gäller linjära, tidsinvarianta system

Utgå ifrån



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

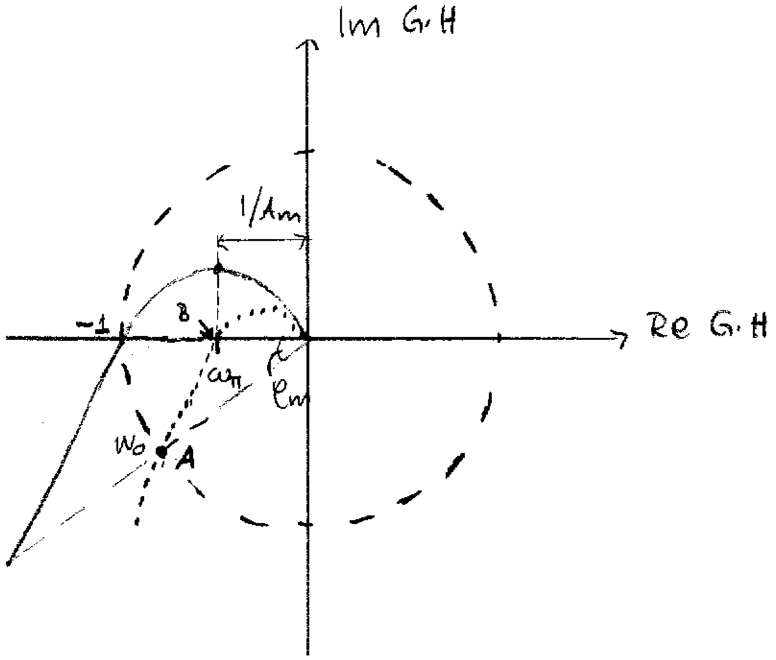
Karakteristisk ekvation

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Om $G(s) \cdot H(s)$ saknar poler i HHP gäller Nyquists förenklade stabilitetskriterium

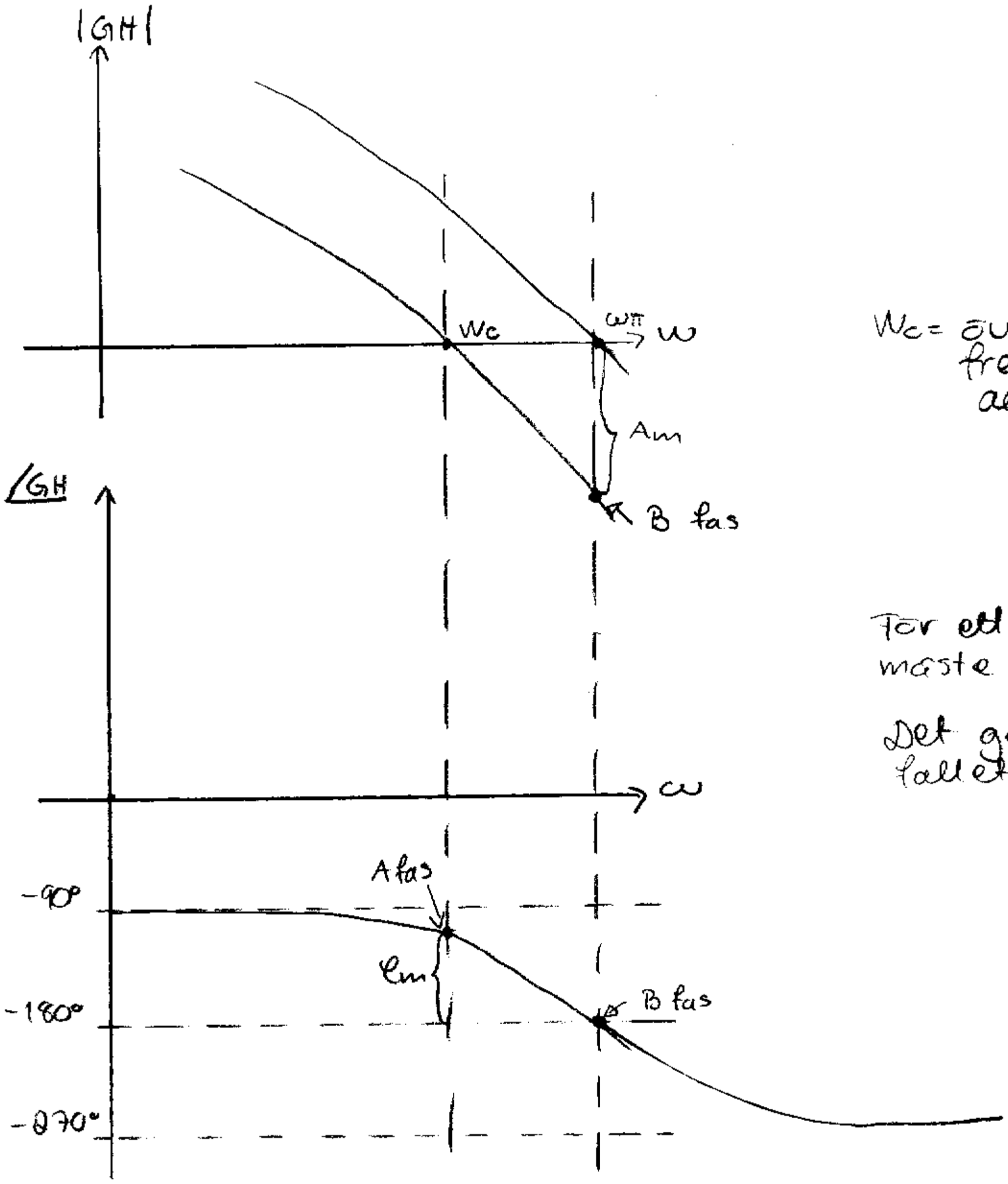
METOD: $G(s)H(s)$ ritas i ~~det~~ komplexa talplanet

Systemet är stabilt om GH passerar realaxeln till höger om punkten (−1, 0) annars instabilt



φ_m marginal till −180°

Graden av stabilitet uttryckes genom amplitud-(Am) och fasmarginal (φ_m)



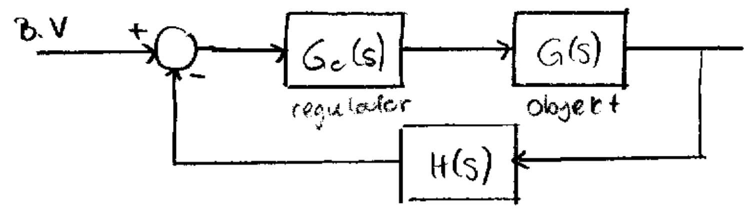
W_c = överkorsnings frekvens
amplituden = 1

För ett stabilt system måste e_m & A_m existera

Det gör det inte i fallet GH ∢ - ustabilt

← båda kurvorna ovan

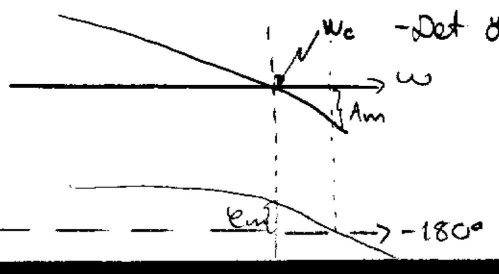
DIMENSIONERING



G(s) & H(s) antas vara givna

PROBLEM Finn ett $G_c(s)$ så att systemkraven uppfylls
(= specs. i tids och frekvensplanet)

oKRAV I FREKVENSPLANET



- Det öppna systemet - GH

Fas & förstärkningsmarginaler

$2 < A_m < 5$

$6dB < A_m < 14dB$

$30° < e_m < 60°$

överföringsfrekvensen: ω_c

ett mått på systemets snabbhet

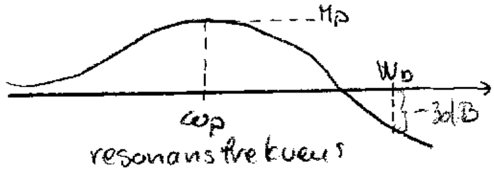
Minska förstärkningen $\Rightarrow$ reglera φ_m och A_m

stabilt system men slött

- Det slutna systemet $\frac{G}{1+GH}$

Bandbredd: ω_b

Resonanstopp: M_p



ARBETSMETOD

1) Rita GH i Bode-diagram $G_c = 1$
2) För om möjligt in kraven i Bode-diagrammet
3) Fungerar det?
4) Låt $G_c = K$ (en konstant) Pröva olika K
5) Jämför med kraven! Vad är det för "fel" på kurvan? Hur bör vi ändra för att uppfylla kraven?
6) Pröva PID-regulator. Lead-lag-länkar eller modifiera kretsen

P.6 NÅGRA VALMÖJLIGHETER

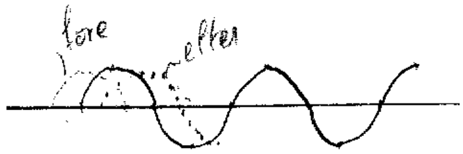
A) Låt $G_c(s)$ vara en regulator av PID-typ (kap 3.3, 5.6)

B) Låt $G_c(s)$ vara en kompenserande länk

i) Lead-länk, fasavancerande s. 95-96

ii) Lag-länk, fasretarderande s. 97-98

iii) Lead-Lag länk, en kombination ex 5.3



c) Ändra systemets struktur

i) Kaskad koppling (7.2)

ii) Framkoppling (7.3)

iii) Otto-Smith regulatorn (7.4)

(vid transporttid fördröjning)

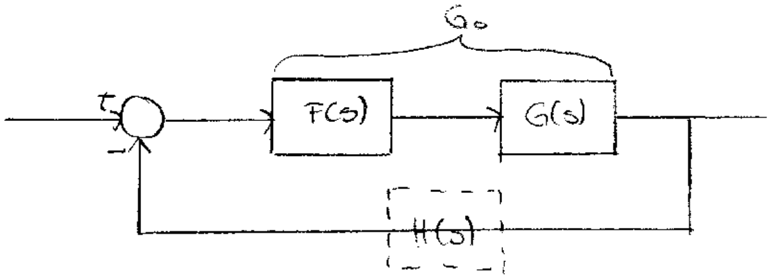
iv) kvotreglering (ej i boken)

v) intern återföring (ej i boken)

ex hastighetsåterkoppling

vi) tillstånds återkoppling

SAMBAND MELLAN SPECS

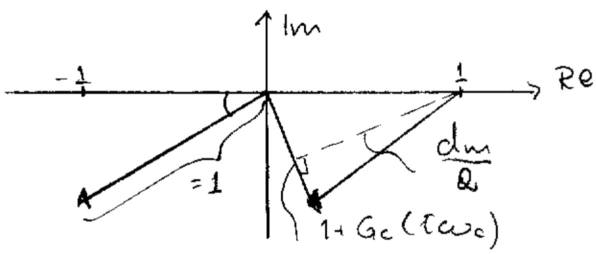


Bandbredd är specs. på det slutna systemet

$$G_c = \frac{G_o}{1+G_o}$$

Sök samband mellan M_p och φ_m

Studera G_o för skärfrekvensen ω_c dvs $G_c(i\omega_c)$



$$\frac{|1+G_o(i\omega_c)|}{2} = \sin\frac{\varphi_m}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_o(i\omega_c) = \frac{\overbrace{|G_o(i\omega_c)|}^{=1}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Konsekvens:

$$M_p \geq \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}}$$

Liten fasmarginal ⇒

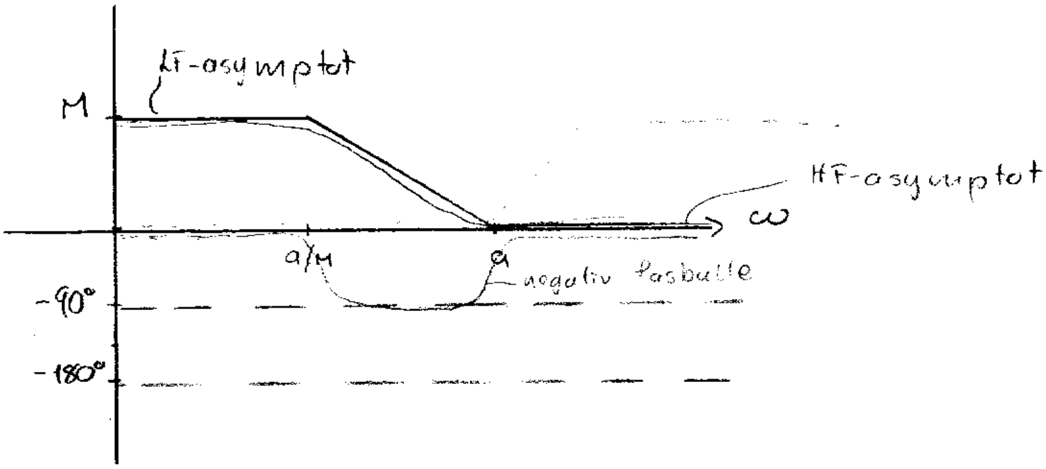
⇒ Stor resonanstopp

LAGLÄNK

$$F_{lag}(s) = \frac{s+a}{s+\frac{a}{M}} = M\,\frac{1+\frac{1}{a}s}{1+\frac{M}{a}s}$$

där $a > 0$

$M > 1$



OBSERVATONER

Vi har en länk som:

a) Höjer förstärkning vid låga ω

b) Ej påverkar förstärkning vid höga ω

c) Har fallande förstärkning vid medelhöga ω

d) Sänker fasen vid medelhöga ω

e) Ej påverkar fasen vid höga och låga ω

Om vår ursprungliga $G(s)H(s)$-kurva skulle "må bra" av påverkan a) till e) väljes

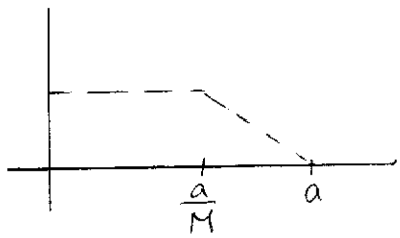
$G_c = G_{lag}$

och sedan lämpliga a och M

Lead-länk

Liknande härledning men "motsatta" observationer

LAGLÄNK forts.



$$F_{lag}(s) = \frac{s+a}{s+\frac{a}{M}}$$

Låt $M \to \infty$

Dvs ingen undre brytpunkt

$$G_{lag}(s) \to \frac{s+a}{s} = 1 + a \cdot \frac{1}{s}$$

dvs en PI-regulator

I formelsamlingen

$$\left.\begin{aligned} a^* &= M \\ \frac{1}{a} &= T \end{aligned}\right\}$$

PID-REGULATOR

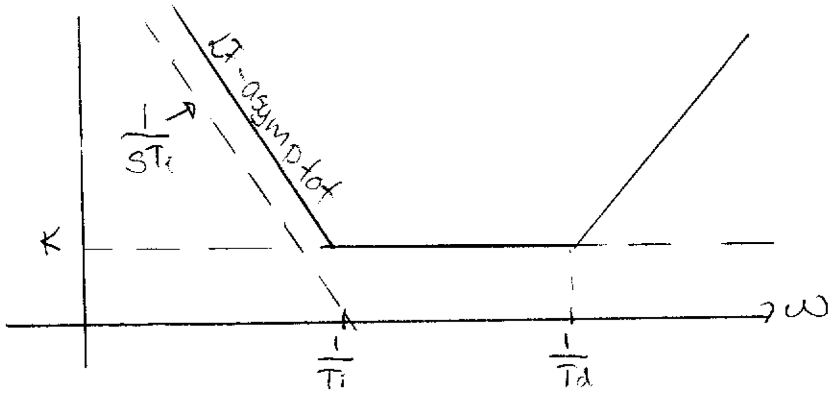
$$K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right) = K \frac{sT_i + 1 + s^2 T_i T_d}{sT_i}$$

$$\approx K \frac{(sT_i + 1)(1 + sT_d)}{sT_i}$$

Om $T_i \gg T_d$

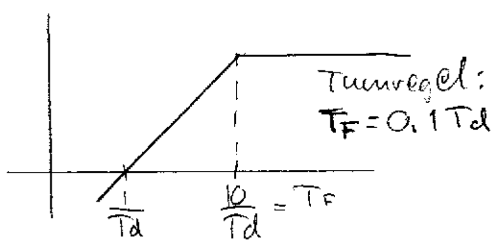
termen $s(T_i + T_d) \approx sT_i$

Tumregel: $T_d < \frac{T_i}{4}$



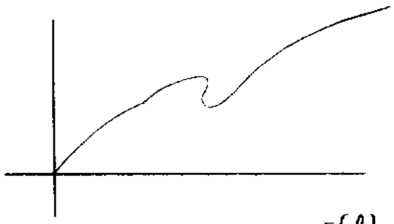
Realiserbar D-funktion

$$\frac{sT_d}{1+sT_F} \quad \text{+ filter}$$

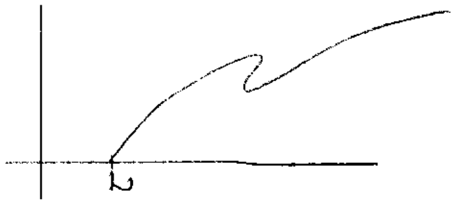


TIDSFÖRDRÖJNINGAR

o insignal



o utsignal

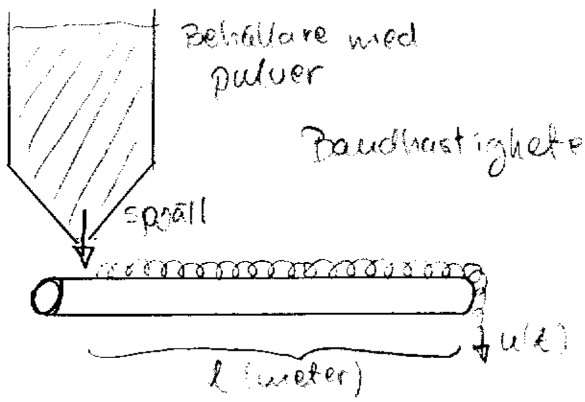


$i(t)$

$I(s) \longrightarrow \boxed{e^{-sL}} \longrightarrow U(s)$

● Regleregenskaperna försämras kraftigt

● Ex Transportband



Bandhastigheten v m/s

$u(t)$ i kg/s

Dödtiden $L = \frac{l}{v}$ s $\Rightarrow$ $\boxed{G(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = e^{-sL}}$

●

ICKE-MINIMUMFAS SYSTEM

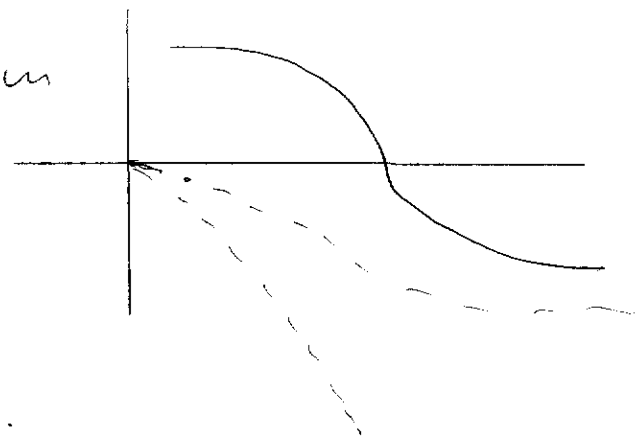
● Ex på icke-minimumfas system

o dödtidsfördröjning

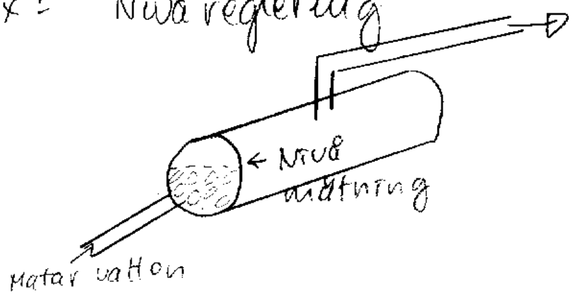
o $G(s) = \frac{1-s}{1+s}$ dvs nollställen i HHP

"inverse response system"

generellt svåra att reglera.



ex: Nivåreglering



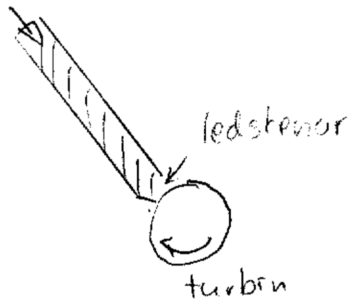
En belastningsökning
⇒ tryckfall - kokar lättare
- fel på nivåmätningen

Lösning: 1: Minska förstärkningen så att man inte sätter igång några konstiga svängningar.
⇒ priset: en slö reglering
2: Estimera vattenvolymen

---

ex: Frekvens reglering

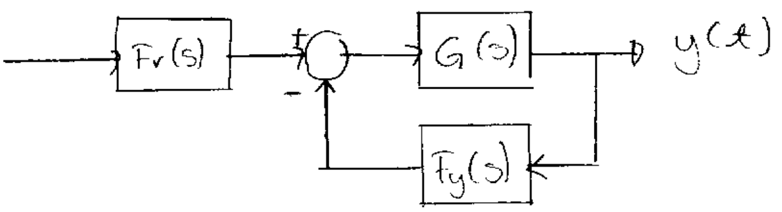
50Hz i våra nät, beror på turbinhastigheten i tex vattenkraftverk



Viktigt att det håller sig runt 50Hz, en kvalitets-garanti.
Lätt när det är vattenbrist.

6.2 ALLMÄN ÅTERKOPPLING

$$Y(s) = \frac{F_r(s) \cdot G(s)}{1 + F_y(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) = G_c(s) \cdot R(s)$$



Ex 6.1 $\quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

Testa 3 olika regulatorer

- **Reg 1** $\quad F(s) = F_y(s) = F_r(s) = 29.7\,\frac{s+1}{s+9}$

- **Reg 2** $\quad F_y(s) = 1$
  $F_r(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+9s+29.7}$

- **Reg 3** $\quad F_y(s) = 0$
  $F_r(s) = \frac{29.7s(s+1)}{s^2+9s+29.7}$ $\quad$ OBS: Ingen återkoppling

Reg 1 $\quad$ Reg 2 $\quad$ Reg 3

$$G_c(s) = \frac{29.7}{s^2+9s+29.7}$$ samma $G_c(s)$

Reg 3: $r \rightarrow \boxed{F_r} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y$

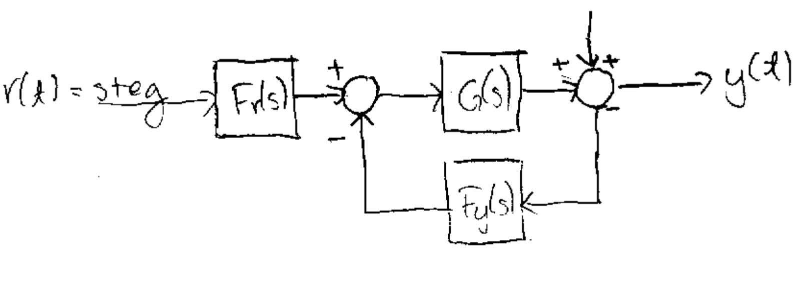
det perfekta systemet borde se ut så här

Vad händer om $F_r = s(s+1)$
$G = 1/s(s+1)$

Produkten blir ju ett, är det perfekt?

Man kan göra det men det verkliga systemet är inte lika noggrant.

<u>STÖRNINGSKÄNSLIGHET</u> $\quad v(t) = 0.2\sin t$



<u>Modell fel:</u>

Modell: $G(s) = 1/s(s+1)$

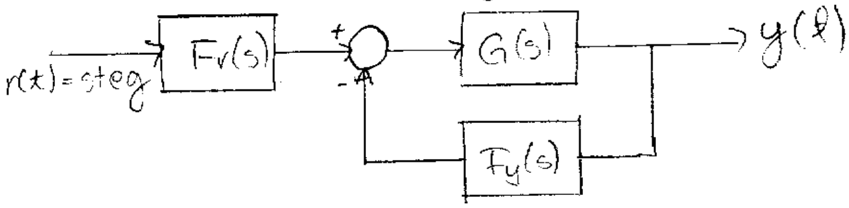
Sanna systemet: $G_1^0(s) = 1/s(s+0.9$

eller $G_2^0(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{100}{s^2+s+100}$

6.3 KÄNSLIGHETSFUNKTION

förelasning 7

(1) Inverkan av störning



$$Y(s) = U(s)\cdot G(s) + V(s)$$

$$= \left[F_r(s)\cdot R(s) - Y(s)F_y(s)\right] G(s) + V(s)$$

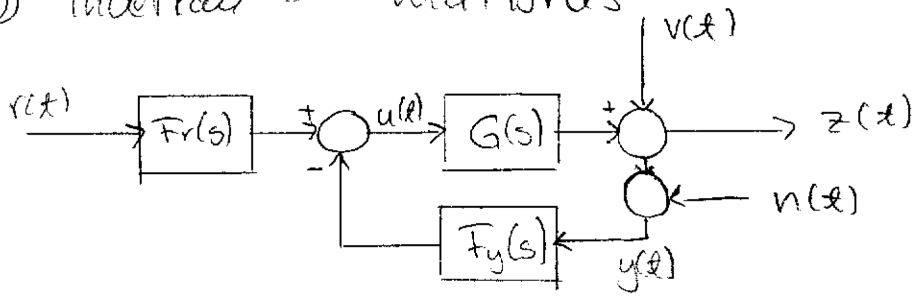
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{F_r(s)\cdot G(s)}{1 + G(s)F_r(s)} R(s) + \frac{1}{1+F_y(s)\cdot G(s)} V(s)$$

Känslighetsfkn $S(s)$

I ett bra system skall $S(\omega)$ vara litet.

(2) Inverkan av modellfel – läs själva)

(3) Inverkan av mätbrus



z är summan av produkterna från r(t), v(t) & n(t)

$$\left.\begin{matrix} v(t)=0 \\ n(t)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{Z}{R} = F \frac{G}{1+GF_y} \sim G_c$$

$$\left.\begin{matrix} r=0 \\ n=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z = u\cdot G + V \\ u = -F_y \cdot z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{Z}{V} = \frac{1}{1+F_y G} \sim S(s)$$

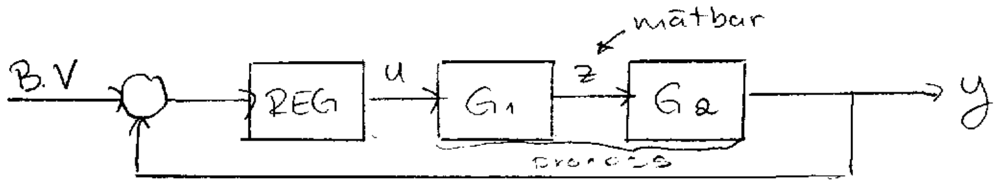
$$\left.\begin{matrix} r=0 \\ v=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z = u\cdot G \\ u = -F_y(z+N) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{Z}{N} = \frac{-GF_y}{1+GF_y}$$

$$1 - S = \frac{1 + F_y G - 1}{1 + F_y G}$$

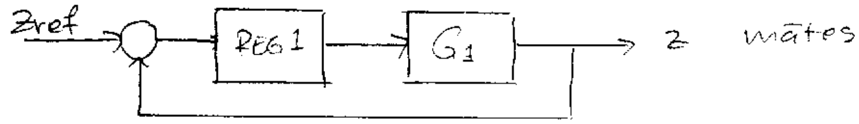
$$= \frac{F_y G}{1 + F_y G}$$

$$z(s) = G_c(s)\cdot R(s) + S(s)\cdot V(s) + (1 - S(s))N(s)$$

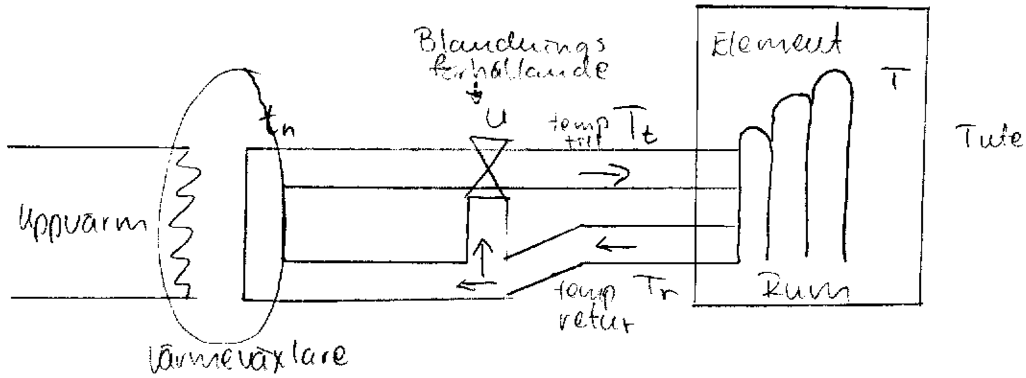
7.2 KASKADREGLERING



Inför en inre reglerings krets (i regler snabb)



Betrakta energiflödet:



$$\cancel{\rho} \cancel{q} T_t = \cancel{\rho} u \cancel{q} \cdot T_n + \cancel{\rho}(1-u)\cancel{q} T_r$$

$$T_t = u T_n + (1-u) T_r \qquad (7.1)$$

∘ Balansekvation

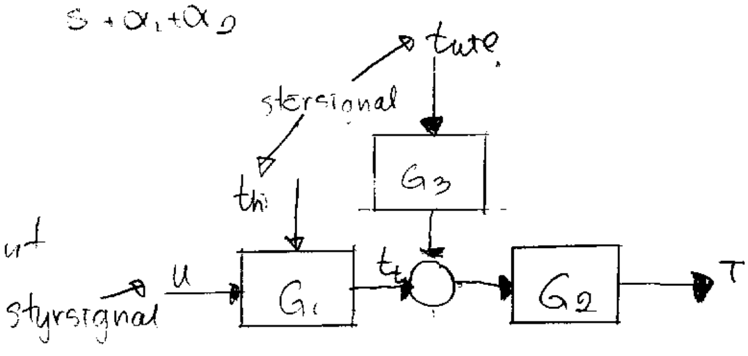
$$\dot{T} = \underbrace{\alpha_1 (T_t - T)}_{\substack{\text{värmeflöde} \\ \text{element} \to \text{rum}}} - \underbrace{\alpha_2 (T - T_{ute})}_{\substack{\text{flöde} \\ \text{rum} \to \text{utomhus}}}$$

Laplacetransform ... hopp

$$T = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1 + \alpha_2} T_t + \frac{\alpha_2}{s + \alpha_1 + \alpha_2} T_{ute}$$

$$\frac{\alpha_1}{1 + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} s}$$

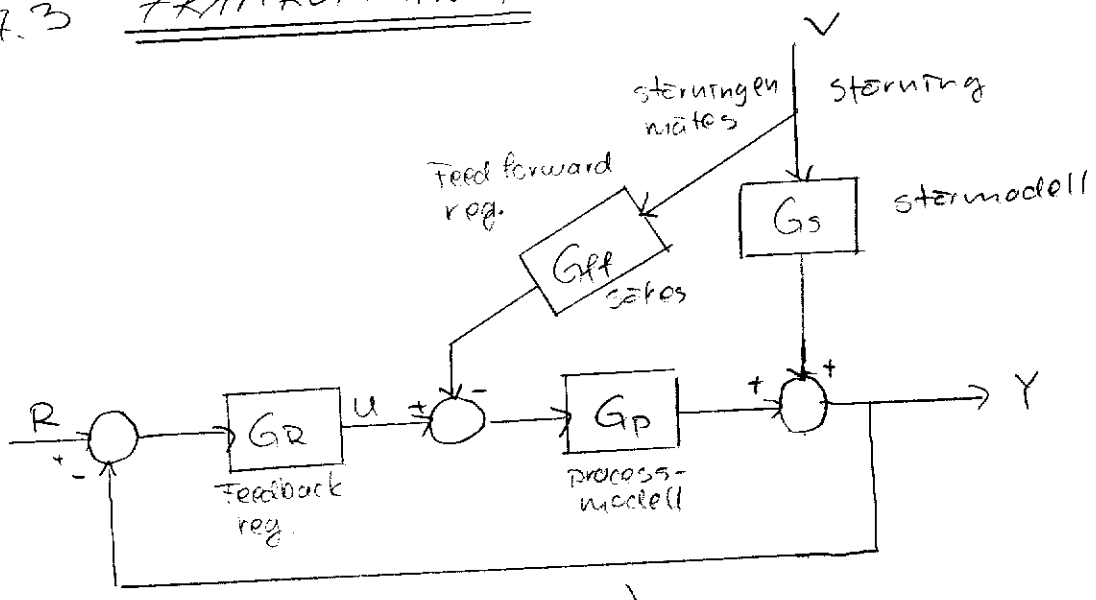
tidskonstant



ekv 7.1 ⇒ $T_t = \underbrace{T_r + u}_{\text{snabb}} (T_n - T_r)$

Då görs en PI-reglering för Tref & T

7.3 FRAMKOPPLING (Feed forward)



$$Y = V \cdot G_s + G_p (U - V \cdot G_{ff})$$
$$= G_p U + V (G_s - G_p G_{ff})$$

Inverkan av V skall elimineras

$$\Rightarrow G_s - G_p G_{ff} = 0$$
$$G_s = G_p G_{ff}$$

$$\boxed{G_{ff} = \frac{G_s}{G_p}}$$

KRAV: G_{ff} måste vara realiserbar, måste kunna tillverkas

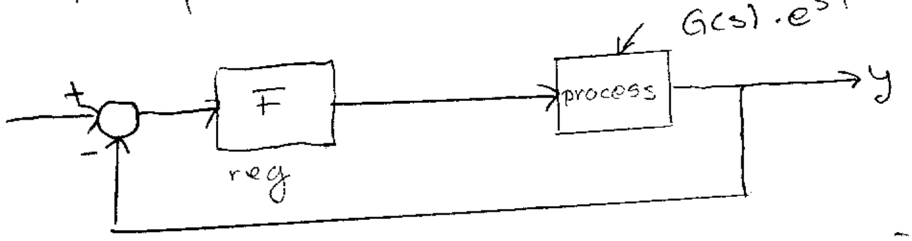
Antag: $G_p = G \cdot e^{-sT}$

$$G_{ff} = \frac{G_s}{G} e^{sT}$$

En krets som reagerar innan man skickar in en signal.
En sån krets kan inte byggas $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ inte realiserbar

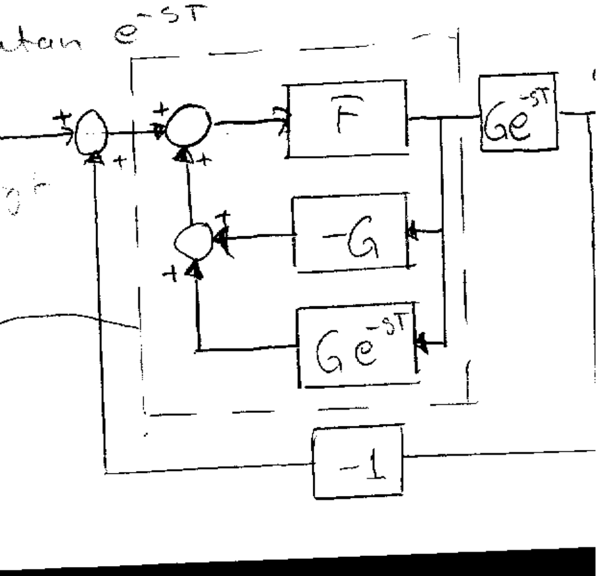
7.4 OTTO SMITH REGULATORN

När processen har e^{-sT} (transporttidsfördröjning)



Metod: ∘ Bestäm en regulator F utan e^{-sT}
dvs systemet $\frac{FG}{1+FG}$

∘ Bilda en ny regulator enligt



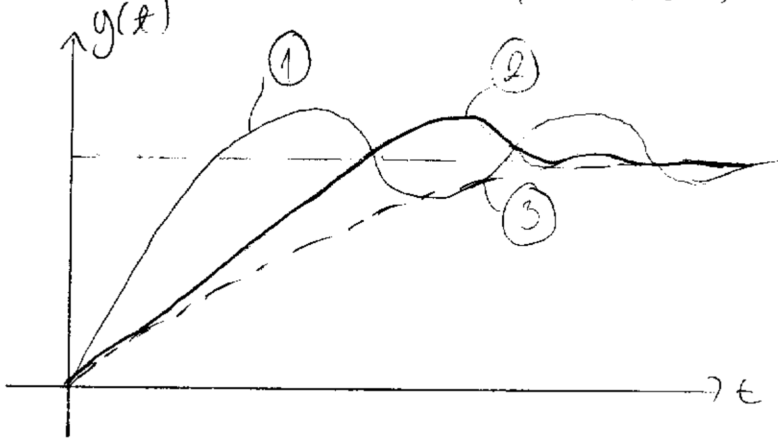
Vilka egenskaper har Otto Smith regulatorn?

Regl. överföringsfunktion

$$\frac{F}{1+FG(1-e^{-sT})}$$

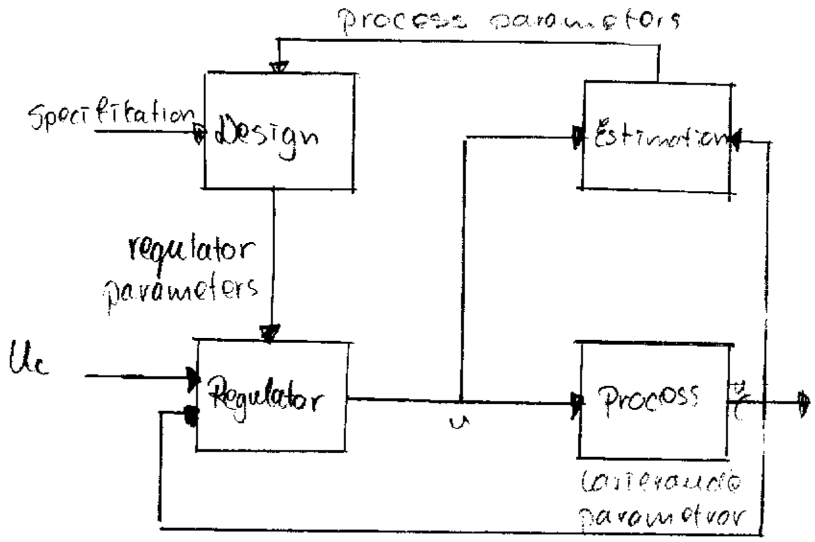
Från r till y: $$\frac{\frac{F}{1+FG(1-e^{-sT})} G \cdot e^{-sT}}{1+\frac{F}{1+FG(1-e^{-sT})} G \cdot e^{-sT}} = \frac{FGe^{-sT}}{1+FG-\cancel{FGe^{-sT}}+\cancel{FGe^{-sT}}}$$

$$= \frac{FG}{1+FG} e^{-sT} \quad (2)$$



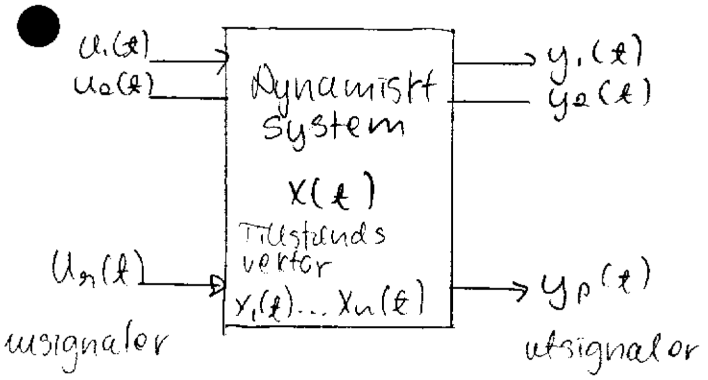
(3) enkel feedback-krets fullst. system

ADAPTIVA REGULATORER



Slutet av 70-talet var Sverige ledande i utvecklingen

Vi människor är adaptiva regulatorer



att ange ett systems tillstånd x är att beskriva systemet

n = systemets ordningstal
det minsta antalet variabler som krävs för en fullständig beskrivning

Tillståndet vid $t = t_0$ jämte efterföljande insignaler ger alla framtida tillstånd

Spets på tillståndsvektorn beskriver en kurva (=trajektoria) i tillståndsrummet

Föreläsning 8

VARFÖR TILLSTÅNDSMODELLER?

Modellering: lure struktur, många variabler

Simulering: Ofta enklare, färdiga program

Styrbarhet/observerbarhet: Enkla kriterier

Optimering: Avancerad & flexibel metodik

Givar signalbehandling: Mätbrus/estimering

TILLSTÅNDSEKVATIONER ALLMÄNFORM

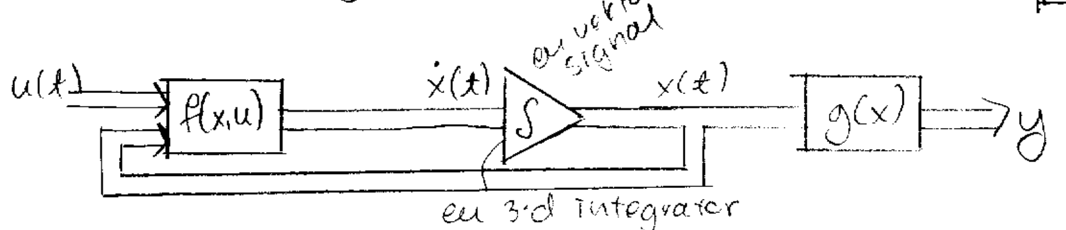
Icke linjära ekvationer   Första ordningen

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n ; u_1, \ldots, u_r) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n ; u_1 \ldots u_r) \end{aligned}\right\} \text{n st 1:a ordningens diffekvationer}$$

Utsignalen är funktionen av tillståndsvektorn

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1 \ldots x_n) \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1 \ldots x_n) \end{aligned}\right\} \text{Ett kompakt skrivsätt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x) \end{aligned}}$$



Linjära fallet: Då är alla relationer

u & x linjära funktioner

LINJÄRA SYSTEM

$f_1 \ldots f_n$ är här linjära funktioner av $x_1 \ldots x_n$

$u_1 \ldots u_r$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + \ldots a_{1n} x_n + b_{11} u_1 + \ldots b_{1r} \cdot u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1} x_1 + \ldots a_{nn} x_n + b_{n1} u_1 + \ldots + b_{nr} u_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11} x_1 + \ldots + c_{1n} x_n \\ \vdots \\ y_p = c_{p1} x_1 + \ldots c_{pn} x_n \end{cases}$$

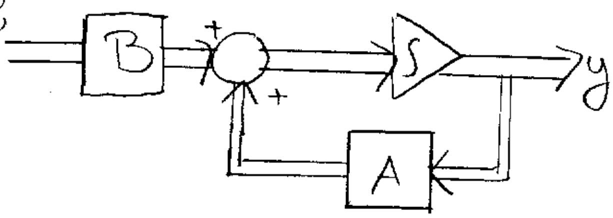
Kompakt skrivsätt: $\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx (+Du) \end{aligned}}$ finns med ibland

$$\dot{X} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\substack{\dot{x} \\ n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\substack{A = \text{system matris} \\ n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{x \\ n\times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{nr} \end{bmatrix}}_{\substack{B = \\ \text{insignalmatris} \\ \text{styrmatris}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}}_{\substack{u \\ r\times 1}}$$

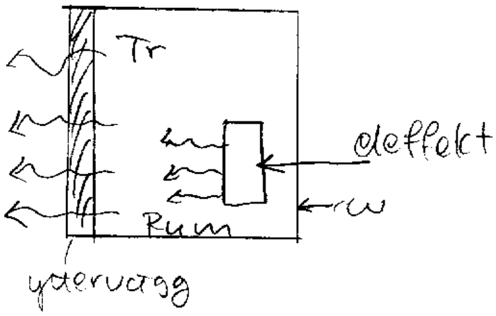
$\underbrace{}_{n\times 1}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}}_{\substack{y \\ p\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{\substack{C \\ \text{utsignalmatris} \\ \text{mätmatris} \\ p\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{x \\ n\times 1}}$$

$\underbrace{}_{p\times 1}$



Ex 8.4



Betrakta w & Tute som insignaler & Tr som utsignal

Uppgift: Skriv systemet på formen
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Energilagringen prop mot Tr & Te

⇒ lämpliga tillstånds variabler

Balansekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left\{ \underbrace{c_1 \rho_1 V_1}_{\text{rummet}} \cdot Tr \right\} = \lambda_1 (Te - Tr) - \lambda_2 (Tr - Tute) \\ \dfrac{d}{dt}\left\{ \underbrace{c_2 m_2}_{\text{element}} Te \right\} = w - \lambda_1 (Te - Tr) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{T}r = \alpha(Te - Tr) - \alpha_2(Tr - T_{ute}) \\ \dot{T}e = \alpha_4\omega - \alpha_3(Te - Tr) \end{cases}$$

välj $x = \begin{bmatrix} Tr \\ Te \end{bmatrix}$ $\quad u = \begin{bmatrix} \omega \\ T_{ute} \end{bmatrix}$ $\quad y = Tr$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_1 + \alpha_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_4 u_1 - \alpha_3 x_2 + \alpha_3 x_1 \end{cases}$$

sortering

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-\alpha_1 - \alpha_2) x_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_3 x_1 - \alpha_3 x_2 + \alpha_4 u_1 \end{cases}$$

I matrisform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ingen D-matris ty y har ingen direktkoppling till u.

8.5 ÖVERFÖRINGSFUNKTION TILL TILLSTÅNDSFORM

$$\frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_1}$$

Diagonal form

Styrbar kanonisk form s. 147

Observerbar kanonisk form s. 149

Oändligt många andra sätt

Diagonal form: I regel besvärligt, använd dataprogram

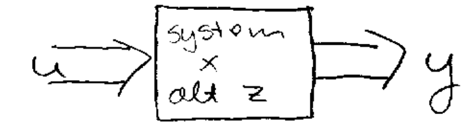
Ex Antag G(s) har reella enkelpoler

$$\Rightarrow G(s) = \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p_1 & & 0 \\ & -p_2 & \\ 0 & & \ddots \; -p_n \end{bmatrix}}_{\text{systemets egenvärden}} x + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} x$$

Variabel transformation (s.150)

Vi har $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$



Inför tillståndsvektor:

$$z = T x$$ men behåll u & y

Transformationsmatris

z_1 = en linjär komb av alla tillståndsvariabler av x

z_2 = en komb av $x_2 \to x_n$

$x = T^{-1} z$ kräv det $T \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(T^{-1}z) = T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z + Bu \\ y = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} z + \underbrace{D}_{\tilde{D}} u \end{cases}$$

$$\underbrace{\underbrace{TT^{-1}}_{E}\dot{z}}_{\dot{z}} = \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}} z + \underbrace{TB}_{\tilde{B}} u \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{aligned}}$$

Samma struktur

föreläsning 9

LÖSNING AV TILLSTÅNDSEKVATION. ÖVERGÅNGSMATRIS

Skalära fallet: $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$

Laplace transform: $sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$

eller $X(s) = (s-a)^{-1}x(0) + (s-a)^{-1}bU(s)$

Inför $$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s-a)^{-1}\right\} = e^{-at}$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, bu(\tau)\,d\tau$$

Ett sätt att lösa diff. ekvationen

Fler dimensionella fallet:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Här är

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad X(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{x_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{x_n t\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{sX(s) - AX(s)}_{(sI-A)X(s)} = x(0) + BU(s)$$

där I är enhetsmatrisen

Då gäller att $IX(s) = X(s)$

Antag A kvadratisk. Multiplicera från vänster med $(sI-A)^{-1}$

$$\underbrace{(sI-A)^{-1}(sI-A)X(s)}_{I \cdot X(s) = X(s)} = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}B \cdot U(s)$$

Inför $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

$\Phi(t)$ = övergångsmatris

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B \cdot u(\tau)d\tau$$

Integralen av en matris där elementen är tidsfunktioner

$$\int D\,dt = \begin{bmatrix} \int d_{11}(t)dt & \cdots & \int d_{1n}(t)dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int d_{m1}(t)dt & \cdots & \int d_{mn}(t)dt \end{bmatrix}$$

Man kan visa (ej i kursen) följande egenskaper

$$\begin{cases} \Phi(0) = I \\ \Phi(t_2-t_1) = \Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_2) \\ \Phi(t-\tau) = \Phi(t)\Phi(\tau) \\ \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \end{cases}$$

Härur kan härledas

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

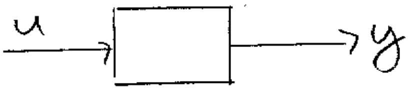
BERÄKNING AV ÖVERFÖRINGSFUNKTION

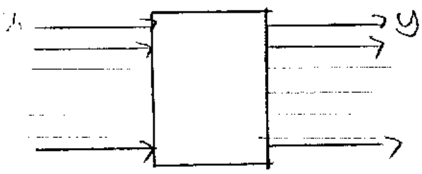
Det gäller $Y(s) = C\underbrace{X(s)}_{(sI-A)^{-1}B\cdot U(s)} + DU(s)$ enligt tidigare

Sätt: $Y(s) = \underset{\text{matris}}{G(s)}\cdot U(s)$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

Spec. U och Y skalärer $\Rightarrow$ skalär funktion





u_1 påverkar y_1 på ett sätt och y_2 på ett annat sätt osv
u_2 påverkar y_1 olika mot u_1 & hur den påverkar andra

∘ Metod 1: Via def

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

∘ Metod 2: Via serieutveckling

fallet $u(t) = 0$ autonomt system

$$x(t) = \phi(t)x(0)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{\phi}(t)x(0)$$

vidare. $\dot{x} = Ax + B\underset{=0}{u} = A\underset{=\phi(t)\cdot x_0}{x}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A\phi(t)\cdot x(0)$$

skall gälla för alla $x(0) \Rightarrow \dot{\phi}(t) = A\phi(t)$

Beteckning $\phi(t) = e^{At}$

∘ Def: $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots$

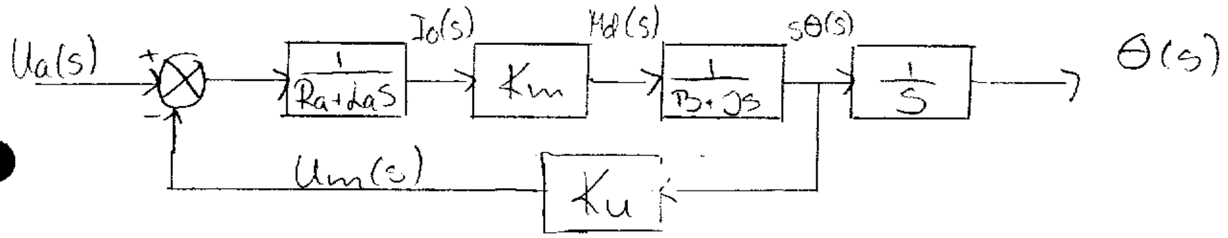
(Jämför Taylorutveckling
$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$)

o Test: $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2 t + \frac{1}{2!}A^3 t^2 + \dots + \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} + \dots$

$= A(I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots)$

$= Ae^{At}$

Vidare $\phi(0) = I$



Uppgift: Skriv systemet på tillståndsform

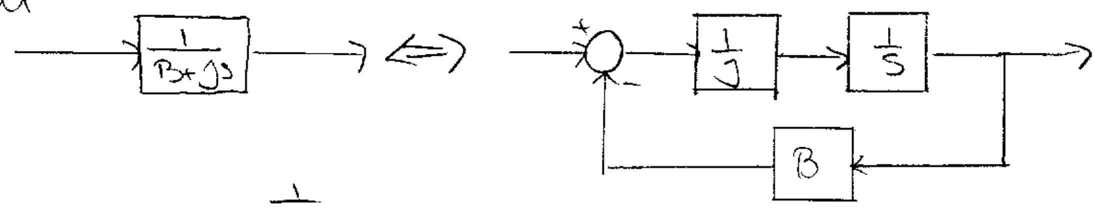
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}}$$

Svar: x = integratorernas utgångar
standardgrepp

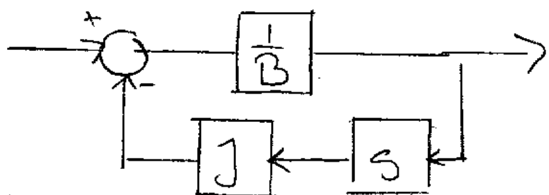
Styrsignal $u = U_a$

utsignal $y = \theta$

Visa att



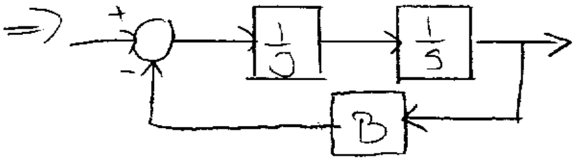
Försök 1: $\frac{1}{B+Js} = \frac{\frac{1}{B}}{1 + \frac{1}{B}Js} \Rightarrow$

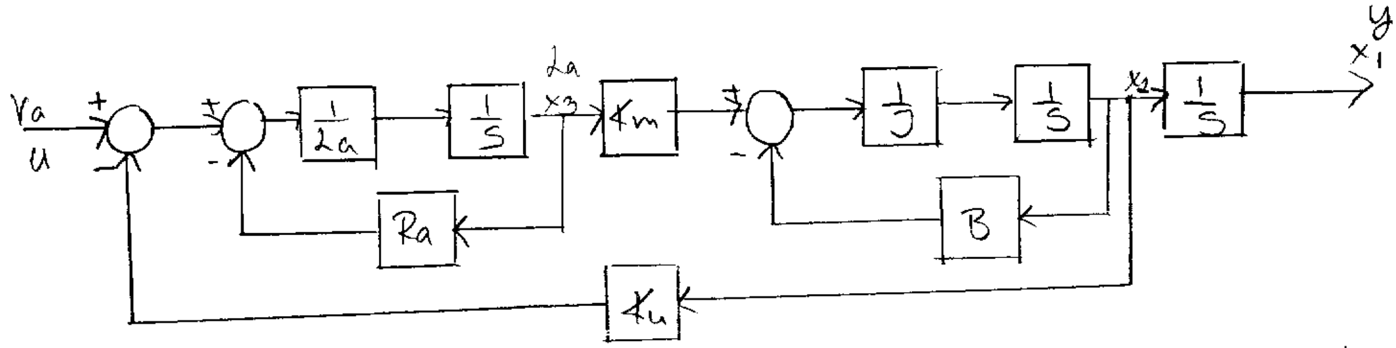


Vi vill ha separata integratorer

Försök II: $\frac{1}{B+Js} = \frac{\frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s}}{B \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s} + 1}$

$\Rightarrow$





Sätt x = integratorernas utgångar (standard)

styrsignal $u = u_a$

utsignal $y = x_1 = \theta$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(K_m x_3 - B x_2\right) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L_a}\left(u - R_a x_3 - K_u x_2\right) \end{cases}$$

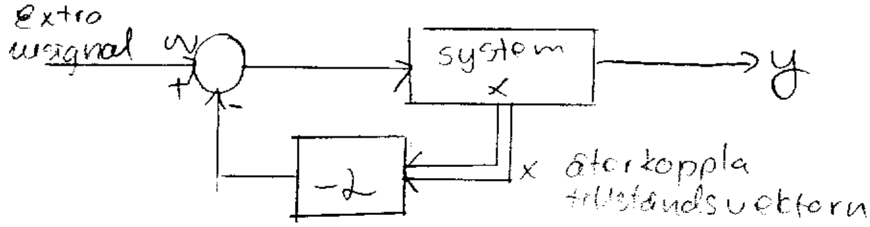
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & K_m/J \\ 0 & -K_u/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

9 TILLSTÅNDSÅTERKOPPLING

förelasning 10

Hur skall u bildas



$$u(t) = -L\,x(t) + w(t)$$

$(l_1 \ldots l_n)$ linjär tillståndsåterkoppling

Systemet:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad u = -Lx + w$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

Det återkopplade systemet

Kan tala om systemets dynamik mha egenvärdena av $(A-BL)$-matrisen

Systemets dynamik (poler) från egenvärdena till $(A-BL)$

L väljs A & B givna

ex 9.1

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Poler $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

En positiv rot $\Rightarrow$ instabilt grundsystem

skall stabiliseras mha tillstånds-återkoppling

Genom återkoppling så att det blir dubbelpol i -1 med

$$u = -(l_1 \quad l_2)\, x + w$$

$$B \cdot L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (l_1 \quad l_2) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0-l_1 & 1-l_2 \\ 1-0 & 0-0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1 & 1-l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

Egenvärden för det återkopplade systemet

$$\det(\lambda I - A - BL) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -l_1 & 1-l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + l_1 & -1+l_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - l_1 & -1+l_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + l_1) + (-1 + l_2) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda l_1 + l_2 - 1 = 0$$

Krav $(\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$

d. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

Identifiera: $\lambda^2: \quad 1 = 1$

$\lambda: \quad l_1 = 2$ $\qquad L = (2 \quad 2)$

$\lambda^0: \quad -1 + l_2 = 1 \qquad l_2 = 2$

Ex 9.2

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\lambda + a_1) \cdot \lambda^2 + a_3(-1)^2 - \lambda(-1)a_2 =$$
$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Resultat 9:1

DVS (-1) koefficienterna i A-matrisen

Utvidgning till

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

$$L = (l_1 \; l_2 \; \dots \; l_n)$$

$$\Rightarrow BL = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \\ & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(a_1+l_1) & \cdots & \cdots & -(a_n+l_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & 0 \;\; 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} u$$

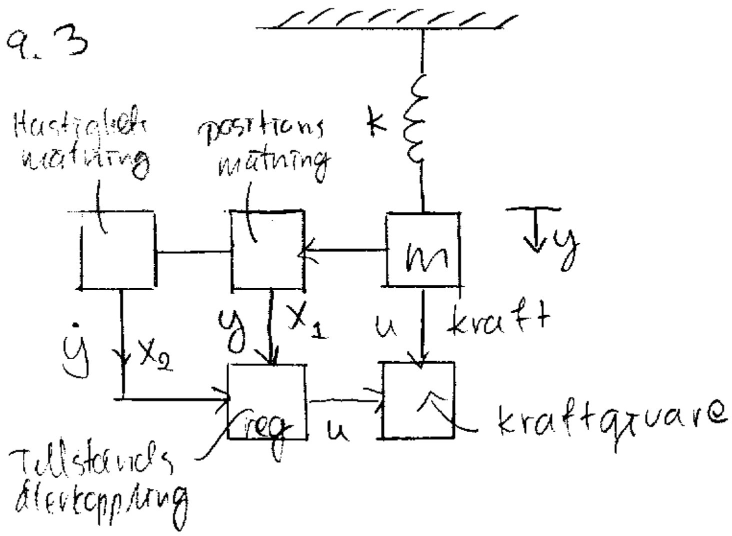
kar. ekv. $\lambda^n + (a_1+l_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n+l_n) = 0$

Given $\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$

$\Rightarrow l_i = \alpha_i - a_i \qquad i = 1 \dots n$

$$\Rightarrow y = \frac{\text{samma täljarpol}}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} w$$

Ex 9.3



Sätt $x_1 = y \qquad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y}$

Vidare $m\ddot{y} = u - ky$

$$\dot{x}_2 = (u - kx_1)\frac{1}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Poler: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$

$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ på stabiliseringsgränsen

Det slutna systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} - \frac{l_1}{m} & -\frac{l_2}{m} \end{pmatrix}}_{A - BL} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

Kar. pol

$$= \dots = \lambda^2 + \frac{l_2}{m}\lambda + \frac{k}{m} + \frac{l_1}{m}$$

Önskade poler $\left.\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

$\frac{l_2}{m} = 5 \Rightarrow l_2 = 5m$

$\frac{k}{m} + \frac{l_1}{m} = 6 \Rightarrow l_1 = 6m - k$

Dvs. $u = -(6m - k)x_1 - 5m\, x_2 + w$

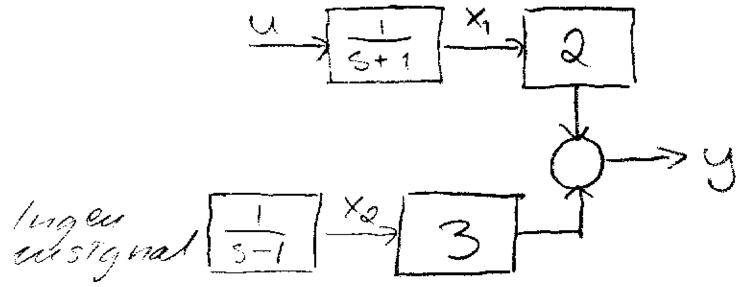
Ex 9.4 $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (2 \quad 3) x \end{cases}$ Har poler -1 & $+1$ instabilt

Önskas dubbel pol $-2 \Rightarrow$ stabilt

osv $\begin{cases} l_1 = 4 \\ -l_1 - 1 = 4 \quad \text{eller } -4-1 \\ \text{ingen relation för } l_2 \end{cases}$ Icke lösbart

Blockschema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x \end{cases} \qquad s x_1 + x_1 = u$$



Tillståndet x_2 kan ej påverkas!

Ex 9.5 Servomotor

$$x = \frac{k/T}{s^2 + s/T} u$$

Antag $\begin{cases} T = 1 \\ k = 1 \end{cases}$ krav $r \to y$ har stigtid ca 0.5 sek

Välj $\left.\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + y \end{matrix}$ ty $\ddot{y} + \dot{y} = u$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

sätt $u = -(l_1 \;\; l_2) x + \underset{\uparrow \text{KRAV}}{K_r} \cdot r$

KRAV statisk först. = 1

$$BL = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (l_1 \;\; l_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$$

Det slutna systemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -1-l_2 \end{pmatrix}}_{A-BL} \Rightarrow \text{kar. ekv } \lambda^2 + \lambda(l_2 + 1) + l_1 = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K_r}{s^2 + s(1 + l_2) + l_1} R(s)$$

$y(t) \to 1$ då $s \to \infty$ $\Rightarrow K_r = l_1$

Enligt kap 2.9

$\zeta = 0.7 \Rightarrow$ poler $-3 \pm 3i$

Kar. ekv

$$(\lambda + 3 - 3i)(\lambda + 3 + 3i) = \ldots = \lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} l_2 + 1 = 6 \\ l_1 = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 = 18 \\ l_2 = 5 \end{array}\right\}$$

återkoppling

$$u = -18x_1 - 5x_2 + K_r \cdot r(t) \quad K_r = 18$$

PD-typ

9.3 REKONSTRUKTION AV TILLSTÅND

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}\right. \quad (*)$$

samt $x(0) = x_0$

Känt A, B, C u & y kan mätas

x_0 & x kan ej mätas

Antag $\hat{x}$ är en uppskattning av x

Simulera

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

den verkliga

Här är $\hat{x}$ - normalt $\neq x$

Vid perfekt skattning

$$y = \hat{y} = C\hat{x} \Rightarrow y - C\hat{x}$$

ett mått på skattningen

Sätt $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$

Observator för $(*)$

K - n-dim kolonnvektor vid en utsignal

Felet "återkopplas"

skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$
$$= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(y - C\hat{x})$$
$$= A(x - \hat{x}) + KC(\hat{x} - x)$$
$$= (A - KC)\tilde{x}$$

$\Rightarrow$ skattningsfelet har lösningen

$$\tilde{x} = e^{(A-KC)t} \cdot \tilde{x}(0)$$

resultat 9.2

Ex 9.6 mot ex 9.3

OBS! Felet ställ anta som e^{-2t}
välj ev -2

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}}_{A} \hat{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{B} u + \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} \Big(y - \underbrace{\underbrace{(1 \quad 0)}_{1\times 2} \underbrace{\hat{x}}_{2\times 1}}_{\hat{x}_1}\Big)}_{2\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 (y - \hat{x}_1) \\ k_2 (y - \hat{x}_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -\frac{k}{m} - k_2 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} y$$

Egenvärden från

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda + k_1 & 1 \\ \frac{k}{m} + k_2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + k_1) + \frac{k}{m} + k_2$$

$$= \lambda^2 + k_1 \lambda + \frac{k}{m} + k_2$$

Krav: $-2 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

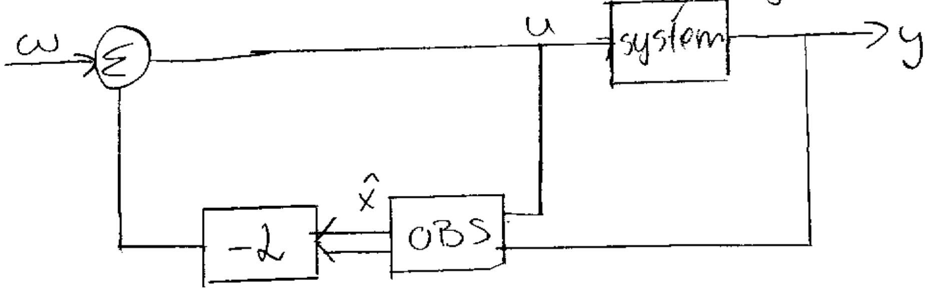
$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 4 - \frac{k}{m} \end{cases}$$

Ex 9.7 El-motorn

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (y - (1 \quad 0) \hat{x})$$

9.4 ÅTERKOPPLING AV REK. TILLSTÅND föreläsning 11

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$



Välj $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$
samt
$u = -L\hat{x} + \omega$

Beräkna Ö-fkn $\omega \to y$

Då gäller $\tilde{x} = x - \hat{x}$

Välj x & $\tilde{x}$ som tillst.

$\dot{x} = Ax + Bu$

$= Ax - BL\hat{x} + B\omega$ = {vi vill endast ha tillstånds variabler}

$= Ax - BLx + BL\tilde{x} + B\omega$

$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$ enligt resultat 9.2

Ställ samman

$$\begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{\tilde{x}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A - BL & BL \\ 0 & A - KC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ \tilde{x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B \\ 0\end{pmatrix}\omega$$

T.ex. en 6×6-matris $\begin{pmatrix}[3\times3] & [3\times3] \\ [3\times3] & [3\times3]\end{pmatrix}$

Observationer; Ordning 2n

$\tilde{x}$ ej styrbart

Det styrbara underrummet är n-dim (vektorn x)

Systemet observerbart (kan visas)

$$G_c(s) = \begin{pmatrix}C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sI - (A - BL) & -BL \\ 0 & sI - (A - KC)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B \\ 0\end{pmatrix}$$

$= \{\text{utan bevis}\} = C(sI - A + BL)^{-1}B$

Dvs överföringsfkn från det mätta tillståndet

Nu är: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\underset{\uparrow\atop -L\hat{x}+w}{u} + K(y - C\hat{x})$

$= A\hat{x} - BL\hat{x} + Bw + Ky - KC\hat{x}$

eller:

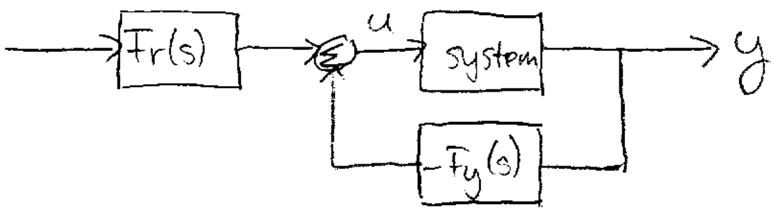
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BL - KC)\hat{x} + Bw + Ky \\ u = -L\hat{x} + w \end{cases}$$

Tillämpa res. 8.3

Ö-fkn $\frac{U(s)}{W(s)} = -L(sI - A + KC + BL)^{-1}B + \underset{\uparrow\atop \text{Direktkoppling motsvarande } D}{1} = F_r(s)$

- $\frac{U(s)}{Y(s)} = -L(sI - A + KC + BL)^{-1} \cdot K$
  $= -F_y(s)$

- Blockschema



Ex 9.9 SERVOMOTORN enl. ex 9.7

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\Big(y - \underbrace{(1 \;\; 0)\hat{x}}_{\hat{x}_1}\Big)$$

Utgå: $u = -(18 \;\; 6)\hat{x} + 18r$

OBS!S enligt ex 9.5

välj $k_1 = 7$

$\underbrace{k_2 = 25}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix}(y - \hat{x}_1) = \begin{pmatrix} 7y - 7\hat{x}_1 \\ 25y - 25\hat{x}_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0-7 & 1 \\ 0-25 & -1 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(-(18 \;\; 6)\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}\right) + 18r$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(-18 \;\; -6)\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} r$$

På formen (9.35)

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -7+0 & 1+0 \\ -25-18 & -1-6 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix} y$$

r & y betraktas som insignal

9.5 TILLSTÅNDSÅTERKOPPLING MED KONST. STÖRNING

$$* \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fv \\ y = Cx \end{cases}$$ ← konst. störning

Regler uppgift:

Håll y konst = ett konstant ref. värde r

Låt $r = 0$

Tillstånds återkoppling $\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Fv \\ y = Cx \end{cases}$

Inför en ny tillståndsvariabel x_{n+1}

x_{n+1} bör $\to 0$ vid godreglering

$\dot{x}_{n+1} = r - y = r - Cx$

Sammanställ

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

Antag (*) är styrbart (lämpligt L)
även styrbart (kan man visa)

Tillfoga en ny styrform

$$u = -Lx + l_{n+1} x_{n+1}$$

Det slutna systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BL & -Bl_{n+1} \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

Välj l_i så att detta system är asympt. stabilt vid konvergens

$\dot{x} \propto x_{n+1} \to 0$

$$\begin{cases} 0 = (A - BL)x - Bl_{n+1}x_{n+1} + Fv = 0 \\ 0 = -Cx + r \end{cases}$$

$y \to r$ i stationära fallet.

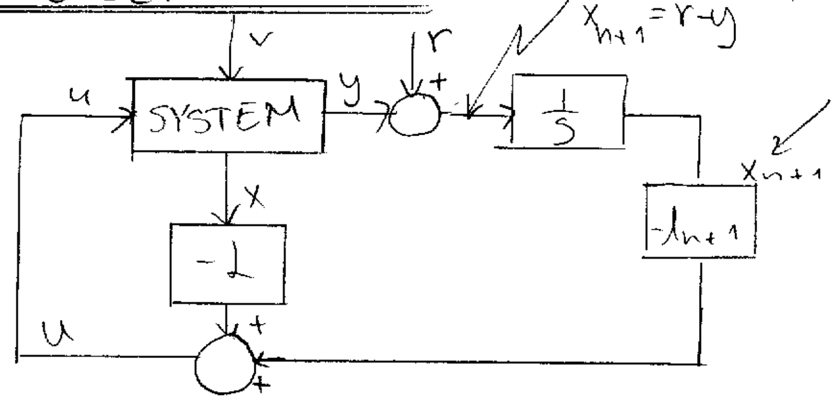
dvs ingen inverkan av störningen v.

BLOCKSCHEMA

Föreläsning 12

$\dot{x}_{n+1} = r - y$

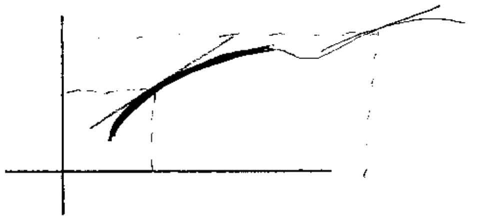
konsekvens



En variant på detta ses i fig 9.11

OLINJÄRITETER

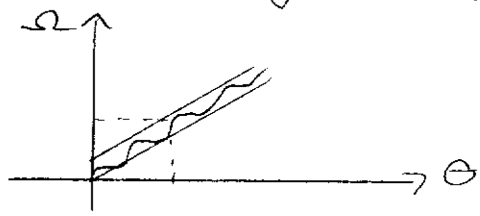
Def



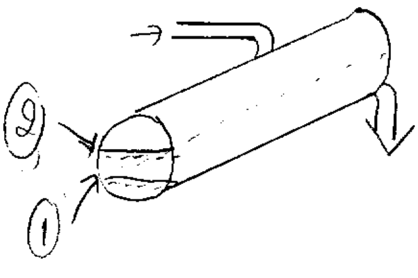
Kan lägga runt dessa punkter men vi kan inte gå där mellan

Krav: En kontinuerlig 1:a derivata

Nästan linjära system



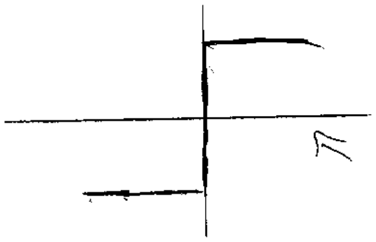
Är det nästan linjärt så fungerar det som linjärt



Ökning vid (2) kräver x men får jag x för samma ökning vid (1) så ökar den mer

⇒ olinjärt

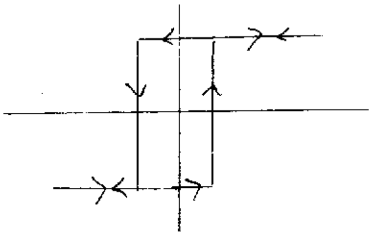
MED DISKONTINUITETER



tekniskt enkelt men svårt att räkna på

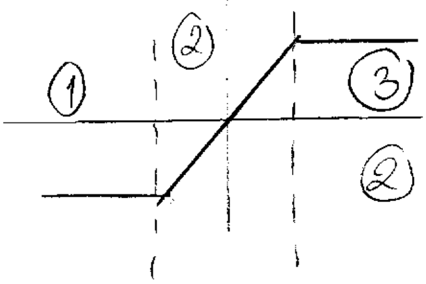
1L icke linjärt

Man löser mha uppdelning i olika delar som var å en är linjära



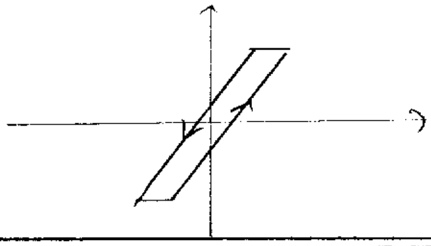
tex termostat

Hysteres



2 Bra område

GLAPP



Drar med sig en negativ fasvinkel

ALIAS-FENOMENET

på annat sätt kallad

Sampla en kontinuerlig sinus-signal

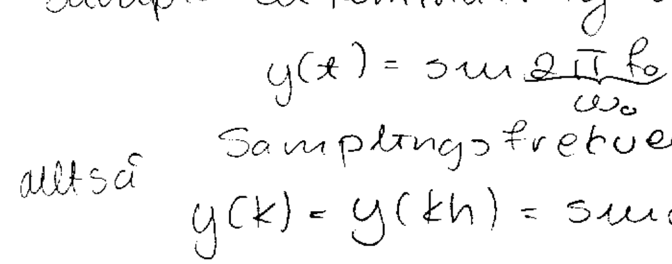
$$y(t) = \sin \underbrace{2\pi f_0}_{\omega_0} t$$

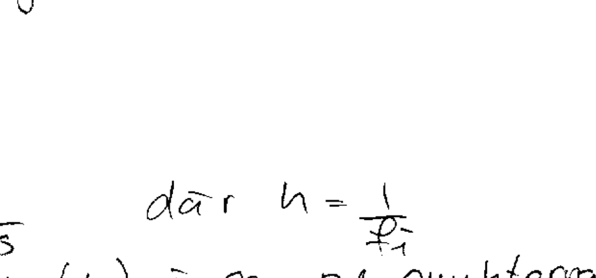
Samplingsfrekvens = f_s

alltså

$$y(k) = y(kh) = \sin 2\pi k \frac{f_0}{f_s} \qquad \text{där } h = \frac{1}{f_s}$$

Man kan visa $y(k) = y_1(k) = y_2(k)$ i sampl. punkterna





$f_0 = 1/2.11$ per/min $\qquad f_s = 1/2$ per/min

$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.11} = 0.0260 \Rightarrow$ 38 min periodtid

$f_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.11} = 0.9739 \Rightarrow$ 1.068 min periodtid för snabbt för att ses