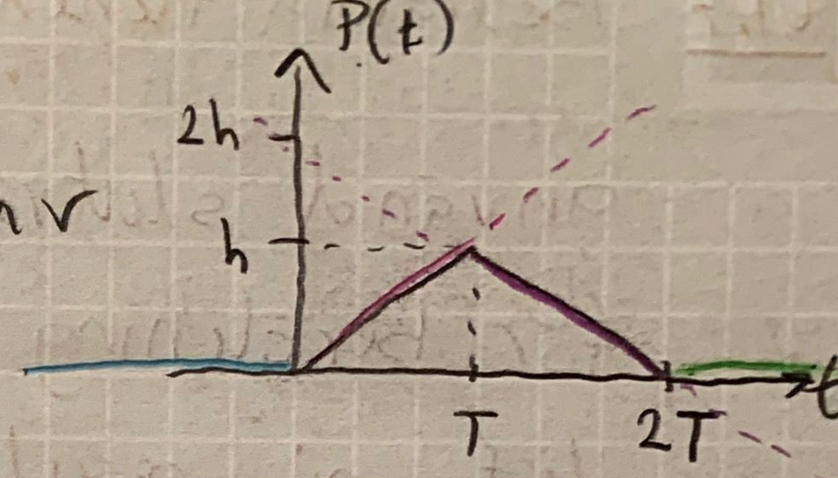
RÖ1 - 20/3

Ö1,3 Härled Laplacetransformen av



Lösn: skriv P(t) matematiskt

$$P(t) = \frac{h}{T}t\cdot\sigma(t) + \left(-\frac{h}{T}t + 2h - \frac{h}{T}t\right)\sigma(t-T) + \left(\frac{h}{T}t - 2h\right)\sigma(t-2T)$$

$$\mathcal{L}\{P(t)\}(s) = \{L2\} = \frac{h}{T}\left[\mathcal{L}\{t\sigma(t)\} + \mathcal{L}\{(-2t+2T)\sigma(t-T)\} + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L}\{(t-2T)\sigma(t-2T)\}\right] = \frac{h}{T}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-Ts}}{s^2} + \frac{e^{-2Ts}}{s^2}\right]$$

Ö1,6 $J_0(at)$ har Laplace transform $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$. Vilken tidsfkn har $\mathcal{LT}$ $\frac{1}{\sqrt{s^2+2s+5}}$?

Lösn: Notera att $\frac{1}{\sqrt{s^2+2s+1}} = \frac{1}{\sqrt{(s+1)^2+2^2}} = \mathcal{L}\{e^{-t}J_0(2t)\}$

Ö1,7 Betrakta flenen $f(t)$ s.a. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{s+4}{s^3+s}$,

använd slutvärdessatsen och begynnelsevärdssatsen för beräkning av $\lim_{t\to\infty} f(t)$ och $f(0)$. Kan man lita på resultatet.

Begynnelsevärdes satsen

Givet en flen $g(t)$ med LT $G(s)$ gäller att:

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s)$$

Slutvärdes satsen

Givet $g(t)$ s.a. $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ och $G(s)$ inte har poler i högra halvplanet och max en pol i origo gäller att:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

(eller på Im-axeln)

Lösn: Använd BVS: $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) =$

$$= \lim_{s\to\infty} s\frac{s+4}{s(s^2+1)} = 0.$$

Använd SVS: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) =$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s+4}{s^2+1} = 4.$$

Kan man lita på detta? ⇒ Ja för BVS, ty inga villkor att uppfylla

För SVS: vi har en pol i origo och 2 poler i $\pm i$ ← Im-axeln

⇒ slutvärdes satsen gäller inte

⇒ Lös istället genom att inverstransformera och ta $\lim f(t)$.

5.10 Tre ämnen med initialkoncentrationer N, 0 och N partiklar per volymenhet växelverkar enligt:

$$\frac{dn_1}{dt} = n_2 - n_1 \,, \quad \frac{dn_2}{dt} = n_3 - n_2 \,, \quad \frac{dn_3}{dt} = n_1 - n_3$$

Bestäm antal partiklar av typ 2 efter mkt lång tid.

Lösn: Vi har att $n_1(0) = N$, $n_2(0) = 0$, $n_3(0) = N$.

"mkt lång tid" $\Rightarrow t \to \infty$

$\Rightarrow$ Laplacera och använd SVS.

använd IC's

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = n_2(t) - n_1(t) \\ \frac{dn_2}{dt} = n_3(t) - n_2(t) \\ \frac{dn_3}{dt} = n_1(t) - n_3(t) \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \begin{cases} sN_1(s) - n_1(0) = N_2(s) - N_1(s) \\ sN_2(s) - n_2(0) = N_3(s) - N_2(s) \\ sN_3(s) - n_3(0) = N_1(s) - N_3(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sN_1(s) - N = N_2(s) - N_1(s) \\ sN_2(s) = N_3(s) - N_2(s) \\ sN_3(s) - N = N_1(s) - N_3(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_2(s) = (s+1)N_1(s) - N & (1) \\ N_3(s) = (s+1)N_2(s) & (2) \\ N_1(s) = (s+1)N_3(s) - N & (3) \end{cases}$$, stoppa

in (2) i (3), bryt ut $N_1(s)$ och stoppa in resultatet i (1) och bryt ut $N_2(s)$ $\Rightarrow$ $N_2(s) = -\frac{s+2}{1-(s+1)^3} N$. SVS gäller för denna ekv.

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} n_2(t) = \lim_{s\to 0} sN_2(s) = \lim_{s\to 0} -s\frac{s+2}{1-(s+1)^3} N = \lim \frac{-s(s+2)N}{-s^3-3s^2-3s+1-1} =$$

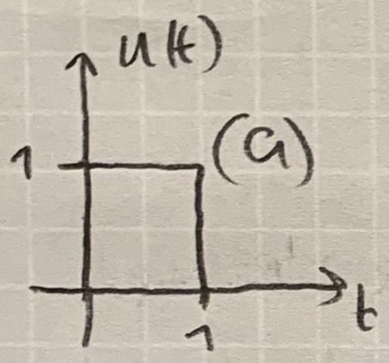
$$= \lim \frac{(s+2)N}{s^2+3s+3} = \frac{2}{3}N.$$

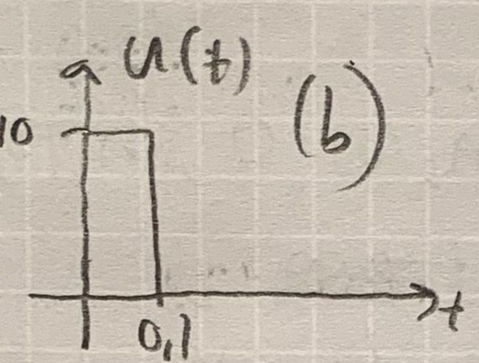
E1,12 Betrakta systemet med insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ vars överföringsfkn är $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

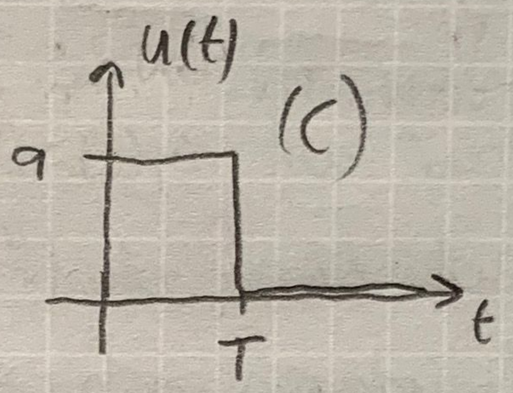
Beräkna $y(t)$ för: a) $u(t)$ puls med höjd = bredd = 1

b) $u(t)$ puls med höjd = 10 och bredd = 0,1. c) $u(t) = \delta(t)$

lösn: om $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ och $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$.







Notera: (a) och (b) är special fall av (c)

$\Rightarrow u(t) = a\sigma(t) - a\sigma(t-T) \Rightarrow U(s) = \frac{a}{s} - \frac{ae^{-Ts}}{s}$.

$\Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = a\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)(s+2)}$

$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\} - a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)(s+2)}\right\} = \{L.30\} =$

$= a\frac{1-2e^{-t}+e^{-2t}}{2}\sigma(t) - a\frac{1-2e^{-(t-T)}+e^{-2(t-T)}}{2}\sigma(t-T)$.

$\Rightarrow$ svar på a) och b) fås genom att stoppa in givna värden på a och T.

c) $u(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

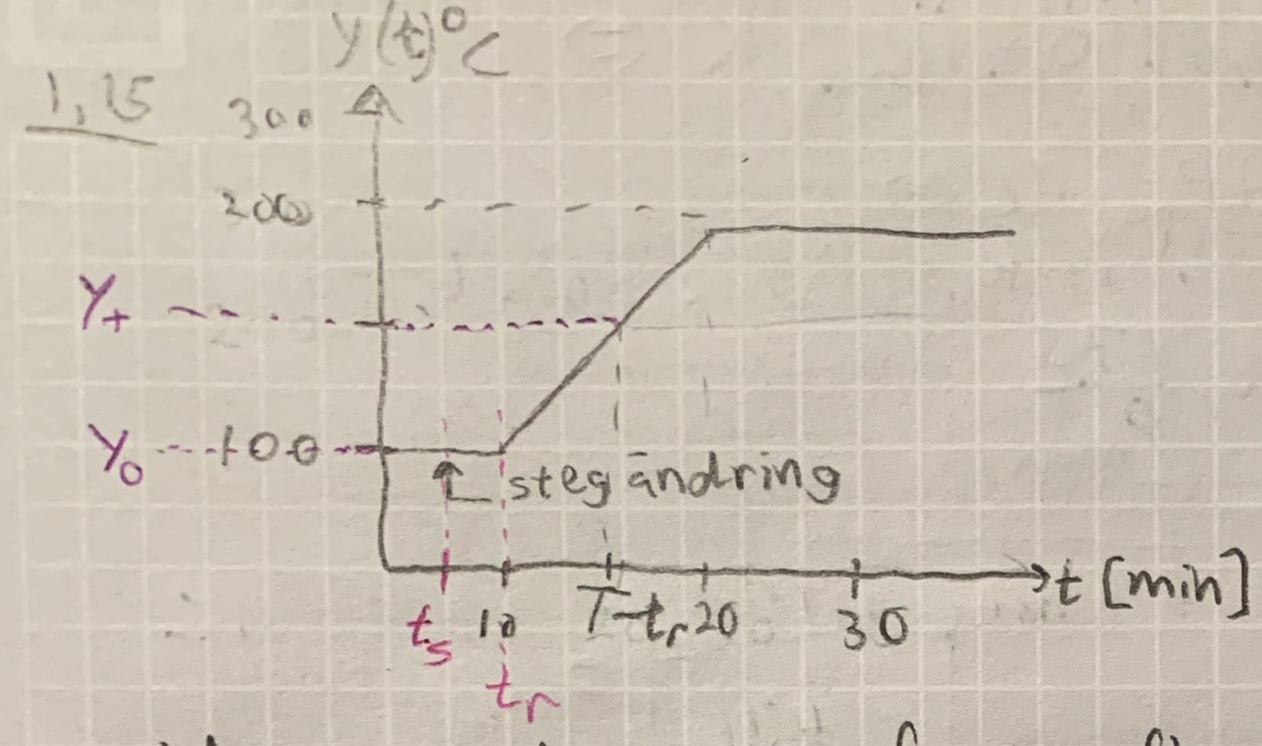
$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \{L.28\} = \frac{-e^{-t}+e^{-2t}}{-1} =$

$= e^{-t} - e^{-2t}$.

$- \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$

RÖ 2 – 22/3

1,15



Diagrammet visar ett stegsvar i y som sken styrns. svaret erhålls då insignalen P ändras från 30% till 70% av maxvärdet.

Sökt: Approximera överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{P(s)}$

Lösn: 1! vilken typ av ÖF har jag? (vilken ordning)

⇒ Eftersom stegändringen inte orsakar overshoot så kan vi anta ett första ordningens system: $\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{k}{1+Ts} \cdot e^{-\tau s}$

- $e^{-\tau s}$ är fördröjningsfunktion, τ är fördröjningen.
- T kallas tidskonstant.

2: Bestäm K, T och τ

- τ: Tiden från stegändring tills att utsignalen börjar ändras
- $T = T_{63\%}$: Den tid då 63% av förändringen har skett från att förändringen har börjat.

- $K: y(T+t_r) - y_0 = 0{,}63\,K \cdot 0{,}4\,P_{max}$, där $0{,}4\,P_{max} = (70\% - 30\%) \cdot \underset{\text{okänd}}{P_{max}}$

Bestämma τ: $\tau = t_r - t_s \approx 10 - 6 = 4$ min

Bestämma T: $y_0 + y(T+t_r) = y(T_{63\%}+t_r) = (Y_+ - Y_0) \cdot 0{,}63 + Y_0 =$

$\approx (180-110) \cdot 0{,}63 + Y_0 = 154{,}1.$

Från grafen ser vi att värdet 154,1 antas vid $t \approx 19$. $\Rightarrow T + t_r = 19 \Leftrightarrow T = 19 - 10 = 9$s.

forts →

Bestämma K: $y(T+t_r) - Y_0 = 0{,}63 \cdot 0{,}4 P_{max} \cdot K \Leftrightarrow$

$44{,}1 = 0{,}63 \cdot 0{,}4 P_{max} \cdot K \Leftrightarrow$

$$k = \frac{44{,}1}{0{,}63 \cdot 0{,}4 P_{max}} \approx \frac{175}{P_{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{\frac{175}{P_{max}}}{1+9s} e^{-4s}$$

1,16 Ett system med ÖF $G(s) = \frac{1}{(1+0{,}5s)^2}$, mätas med insignalen $u(t) = 3\sin(2t) - e^{-t}\cos(\frac{t}{2})$.

Sökt: utsignalen efter alla transienter har dött ut.

Lösn: "transienter dött ut" ⇒ vi tittar bara på stora t.

$\Rightarrow e^{-t}\cos(\frac{t}{2}) \approx 0$. (varför inte 1?)

⇒ vi tittar bara på $u(t) \approx 3\sin(2t)$.

En formel $F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$ och $u(t) = A\sin(\omega t)$

$\Rightarrow y(t) = A|F(i\omega)|\sin(\omega t + \arg\{F(i\omega)\})$

I vårt fall: $A=3$, $\omega = 2$

$$\Rightarrow |G(i\omega)| = \left|\frac{1}{(1+0{,}5i\omega)^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2+(0{,}5i\omega)^2}^2} = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\arg\{G(i\omega)\} = -2\operatorname{atn}\left(\frac{0{,}5\cdot 2}{1}\right) = -2\operatorname{atn}(1) = -\frac{\pi}{2}$$

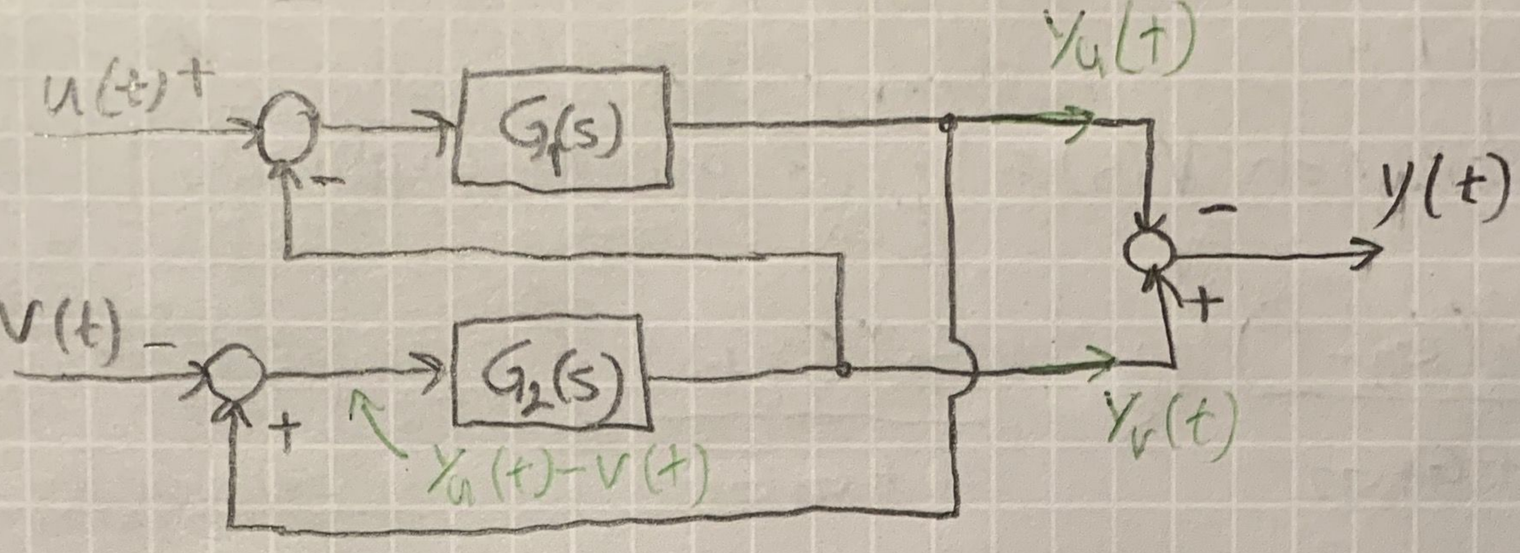
räkneregler för argument räkning

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

WHITELINES

forts →

1.17 Ett system beskrivs av blockdiagrammet:



Sökt: a) överföringsfunktionen från insignalerna u(t), v(t) och y(t).

Lösn: Vi inför Y och har då: $Y(s) = Y_v(s) - Y_u(s)$

Följ $Y_v(t)$ bakåt för att se hur den är uppbyggd

$\Rightarrow Y_v(s) = [Y_u(s) - V(s)]\, G_2(s)$ (I)

P.S.S: $Y_u(s) = [U(s) - Y_v(s)]\, G_1(s)$ (II)

Stoppa in (II) i (I) $\Rightarrow Y_v = [(U - Y_v)\, G_1 - V]\, G_2 \Leftrightarrow Y_v = \dfrac{G_2(G_1 U - V)}{1 + G_1 G_2}$

Stoppa in (I) i (II) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow Y_u = \dfrac{G(U + G_2 V)}{1 + G_1 G_2}$

$\Rightarrow$ ÖF blir då $Y = Y_v - Y_u = \dfrac{G_2 G_1 U - G_2 V}{1 + G_1 G_2} - \dfrac{G_1 U + G_1 G_2 V}{1 + G_1 G_2}$

$:= F(s)$ $:= H(s)$

$\Rightarrow Y(s) = \overbrace{\dfrac{G_1(G_2 - 1)}{1 + G_1 G_2}}^{:= F(s)} U - \overbrace{\dfrac{G_2(G_1 + 1)}{1 + G_1 G_2}}^{:= H(s)} V$

b) Bestäm ÖF:erna $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ och $\dfrac{Y(s)}{V(s)}$ då $G_1(s) = G_2(s) = \dfrac{1}{1+s}$

Lösn: $\dfrac{Y}{U}$ ges då v sätts $= 0$ i uttrycket i a-uppgiften

$\Rightarrow \dfrac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \dfrac{G(G_2 - 1)}{1 + G_1 G_2} = \ldots = -\dfrac{s}{s^2 + 2s + 2}$

$\dfrac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = \ldots = \dfrac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$

c) Bestäm $y(t)$ enligt b-uppgift då $u(t)=\sigma(t)$ och $v(t)=\delta(t)$.

<u>lösn:</u> $U(s)=\frac{1}{s}$ och $V(s)=1$ (σ och δ Laplacade)

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{G_1(G_2-1)}{1+G_1G_2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{G_2(G_1+1)}{1+G_1G_2}\cdot 1 =$$

$$=-\frac{1}{s^2+2s+2}-\frac{s+2}{s^2+2s+2} = \dots = -\frac{2}{(s+1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-2e^{-t}\sin(t)-e^{-t}\cos(t)$$

<u>1,28</u> För en personbil antas det gälla att vindmotståndet är prop. mot hastigheten $v(t)$ med konstanten $b=0{,}25$ kNs/m $m=1000$ kg. Motorns dragkraft $u(t)=0$ då $t<0$.

<u>sökt:</u> a) ÖF $G(s)=\frac{V(s)}{U(s)}$

1: Modellera systemet: $F_v(t)=bv(t)$ luftmotståndskraft

$$\sum_i F_i(t)=ma=m\dot{v} \Rightarrow u(t)-F_v(t)=u(t)-bv(t)=m\dot{v}(t)$$

(eftersom vi bara vill ha v, inte a)

2: $\mathcal{L}$T våran DE: $\mathcal{L}\{u(t)-bv(t)\}=\mathcal{L}\{m\dot{v}(t)\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow U(s)-bV(s)=m\left(sV(s)-v(t=0)\right) \Leftrightarrow V(s)=\frac{1}{ms+b}U(s)+\frac{m}{ms+b}v(t=0)$$

"$u(t)=0$ då $t<0$" $\Rightarrow v(t=0)=0$

$$\Rightarrow V(s)=\frac{U(s)}{ms+b}$$

b) Beräkna bilens hastighet då $u(t)=t\sigma(t)-(t-1)\sigma(t-1)$

<u>lösn:</u> $\mathcal{L}\{u(t)\}=U(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}\cdot \Rightarrow V(s)=\frac{1}{ms+b}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}\right)=$

$$=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{ms+b}-\frac{e^{-s}}{s^2(ms+b)}\cdot \Rightarrow v(t)=\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}=\dots$$

$$\dots=\left(16e^{-\frac{t}{4}}+4t-16\right)\sigma(t)-\left(16e^{-\frac{t-1}{4}}+4t-20\right)\sigma(t-1)$$

c) Beräkna $v(t)$ då $u(t) = \frac{1}{h}\sigma(t) - \frac{1}{h}\sigma(t-h)$

Lösn: $V(s) = \frac{1}{hs} - \frac{e^{-hs}}{hs}$

$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{ms+b}\left(\frac{1}{hs} - \frac{e^{-hs}}{hs}\right)$

$\Rightarrow v(t) = \frac{4}{h}\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)\sigma(t) - \frac{4}{h}\left(1 - e^{-\frac{t-h}{4}}\right)\sigma(t-h)$

Vad händer då $h \to 0$?

Notera att $v(t) = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$, där $f(t) = 4\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)\sigma(t)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \approx f'(t) =$

$= 4\left(\delta(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}\sigma(t)\right) = \{\delta\text{-fun plockar ut t=0-värdet}\} =$

$= 4\left(\left(1 - e^{-0}\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}\sigma(t)\right) = e^{-\frac{t}{4}}\sigma(t)$

Linjär tillståndsform

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\,\xi(t) + B\,u(t) \\ z(t) = C\,\xi(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

, där $\xi(t)$ är tillståndsvektorn
$u(t)$ är insignalvektorn
$z(t)$ är utsignalvektorn
A är systemmatrisen
(A:s egenvärden är polerna till $G(s)$)

Icke linjär tillståndsform:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), u(t)) \\ z(t) = g(\xi(t), u(t)) \end{cases} \Rightarrow \text{linjärisera}$$

2,3 Insignalen $Y(s) = \frac{4}{1+2s} X(s)$ genereras av styrdonet

$$X(s) = \frac{1,5}{1+0,5s} U(s)$$

a) ställ upp tillståndsform med fysikaliska storheter som tillstånd

Lösn:

$$\begin{cases} Y(1+2s) = 4X \\ X(1+0,5s) = 1,5U \end{cases} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\dot{y} + y = 4x \\ 0,5\dot{x} + x = 1,5u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = -\frac{1}{2}y + 4x \\ \dot{x} = -2x + Bu \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0\ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) ställ upp T.F. på observerbar kanonisk tillståndsform form.

Lösn: skriv om till G(s)-form först

$$\Rightarrow Y = \frac{4}{1+2s} \cdot \frac{1,5}{1+0,5s} U = \frac{6}{s^2+2,5s+1} U \text{. Identifiera}$$

G(s)-koefficienterna i detta uttryck och sätt in i OKF-matrisen. $\Rightarrow \dot{\xi} = \begin{pmatrix} -2,5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} u$

$$z = (1 \; 0)\xi + 0$$

c) Ställ upp T.F. på diagonalform (A ska va diagonal)

Lösn: från b) vet vi att $Y = \frac{4}{1+2s} \cdot \frac{1,5}{1+0,5s} = \{PBV\} = \dots =$

$$= \left(\frac{8}{1+2s} + \frac{2}{1+0,5s}\right) U \text{. Inför } X_1 = \frac{8}{1+2s} U, \; X_2 = \frac{-2}{1+0,5s} U$$

$\Rightarrow Y = X_1 + X_2$. Inverstransformera alla 3 ekvationerna

$$\Rightarrow y = x_1 + x_2, \quad x_1 + 2\dot{x}_1 = 8u, \quad x_2 + \tfrac{1}{2}\dot{x}_2 = -2u$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \; 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2,7 givet dynamiska systemet: $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2u \\ \dot{y} = y - x + u \end{cases}$

Bestäm Ö.F. från u till y och avgör om systemet (är) stabilt.

lösn: Laplace $\Rightarrow \begin{cases} sX = -X + 2U \\ sY = Y - X + U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{s+1}U \\ Y = \frac{-1}{s-1}X + \frac{1}{s-1}U \end{cases}$

$\Rightarrow Y = \left(\frac{-2}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s-1}\right)U = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)}U = \frac{1}{s+1}U.$

systemet är stabilt ty systemets enda pol $s=-1$ är i LHP
(Men bara insignal/utsignal -stabilt, INTE intern-stabilt ty
polen $s=1$ har förkortats).

2,9 givet tillståndsen $\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Beräkna impulssvaret $g(t)$.

lösn: Laplace T.F $\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} sX_1 \\ sX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}U \\ Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Vill ha Ö.F från U till Y => skriv om första ekv. till

$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}U$. måste

invertera 2x2 matrisen för att bryta ut X

$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}U$

$\Rightarrow$ O.F. blir då $Y = (-1 \;\; -1)\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} U = \ldots = $

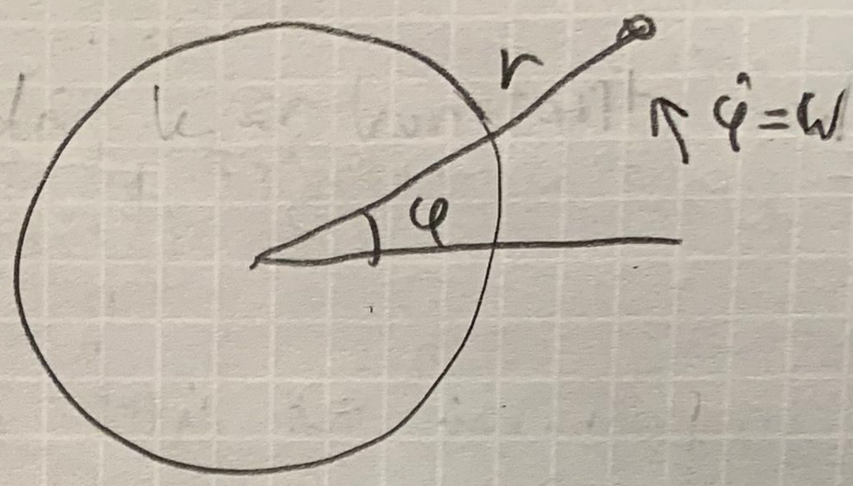
$= \{\text{algebrering}\} = \dfrac{1-3s}{(s+3)(s-1)+4}\,U$

"impulssvar" $\Rightarrow u(t) = \delta(t) \Rightarrow U = 1$

$\Rightarrow Y = \dfrac{1-3s}{(s+3)(s-1)+4}\cdot 1 \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = \ldots = (4t-3)e^{-t}$

2,11 För en satelit i ett centralt gravitations fält gäller:

$$\begin{cases} \ddot{r} + \frac{k}{r^2} - r\omega^2 = u_1 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega) = u_2 \end{cases}$$



där k = konstant och insignalerna u_1 och u_2 är radiella och tangentiella styrkrafter.

a) Ställ upp T.f. med $r, \dot{r}$ och ω som tillståndsvariabler

Lösn: De 2 givna D.E: $\ddot{r} = u - \frac{k}{r^2} + r\omega^2$

$$\dot{\omega} = \frac{u_2 - 2\dot{r}\omega}{r}$$

Icke linjär tillstånds form blir (ty tillståndsvektorn är $(\dot{r}\ \ddot{r}\ \dot{\omega})$)

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ u_1 - \frac{k}{r^2} + r\omega^2 \\ \frac{u_2 - 2\dot{r}\omega}{r} \end{pmatrix} = \left\{ \text{Låt } \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ u_1 - \frac{k}{x_1^2} + x_1 x_3^2 \\ \frac{u_2 - 2x_2 x_3}{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ f_3(x,u) \end{pmatrix}$$

b) Linjärisera kring den nominella cirkulära banan $\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ rad/s,

- genom för linjäriseringen genom att utnyttja att tillståndsderivatorna är noll i arbetspunkten (linjäriseringspunkten)
- Givet att $u_{10} = u_{20} = 0$ i arbetspunkten

Lösn: Bestäm tillståndena x_1, x_2, x_3 i arbetspunkten x_{10}, x_{20}, x_{30}, vid att tillståndsderivatorna är 0 i arbetspunkten.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{20} \\ -\frac{k}{x_{10}^2} + x_{10} x_{30}^2 \\ \frac{-2 x_{20} x_{30}}{x_{10}} \end{pmatrix}$$ OBS att $x_3 = w \Rightarrow x_{30} = w_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{w_0^2}\right)^{1/3} \\ 0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$ Linjärisera systemet kring: $x_0 = (x_{10} \;\; x_{20} \;\; x_{30})^T$, $u_0 = (0 \;\; 0)^T$

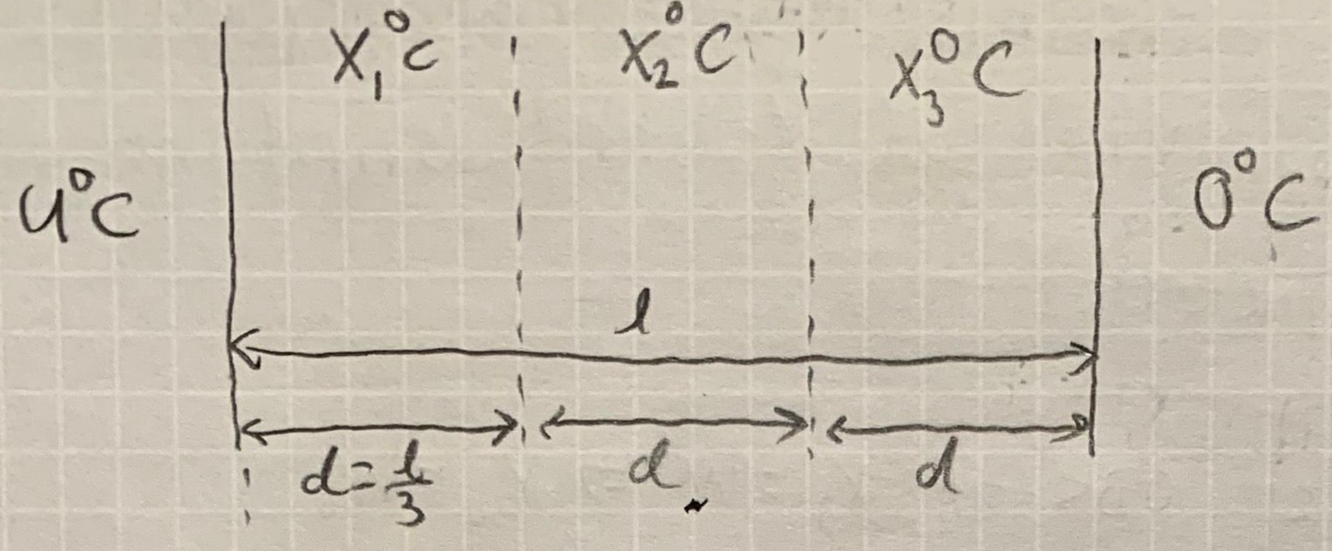
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x,w) \\ f_2(x,w) \\ f_3(x,u) \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_0,u_0) \\ f_2(x_0,u_0) \\ f_3(x_0,u_0) \end{pmatrix}}_{=0 \text{ ty arbetspkt}} + \underbrace{\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,u_0)}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,u_0)}}_{=B} \begin{pmatrix} u_1 - u_{10} \\ u_2 - u_{20} \end{pmatrix}$$. Beräkna derivatorna $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3w_0^2 & 0 & 2(kw_0)^{1/3} \\ 0 & -2k^{-1/3} w_0^{5/3} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{w_0^2}\right)^{-1/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}$$, där $\Delta u_1 = u_1 - u_{10}$, $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ osv...

3,18



- Temp är samma inom ett helt skikt.
- Energi flöde mellan omgivning och skikt: α $[kJ/m^2sK]$
- Energi flöde mellan innervväggar: $\frac{\lambda}{d}$
- ρ: ståletts densitet · c: värmekapacitivitet.

Sökt: Tillståndsmodell (A,B,C) där utsignalen y är effekt/Areaenhet som strömmar från u-rummet till 0°-rummet.

Lösn: [förändring av värmeenergi] = [värmeeffekt in] - [värmeeffekt ut.] $\Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho c d X_1(t)) = \alpha(u-X_1) - \frac{\lambda}{d}(X_1-X_2)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho c d X_2(t)) = \frac{\lambda}{d}(X_1-X_2) - \frac{\lambda}{d}(X_2-X_3)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho c d X_3(t)) = \frac{\lambda}{d}(X_2-X_3) - \alpha(X_3-0)$$

skriv om dessa D.E. till:

→ forts

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{Scd}\left(-\left(\alpha+\frac{\lambda}{d}\right)x_1 + \frac{\lambda}{d}x_2 + \alpha u\right)$$

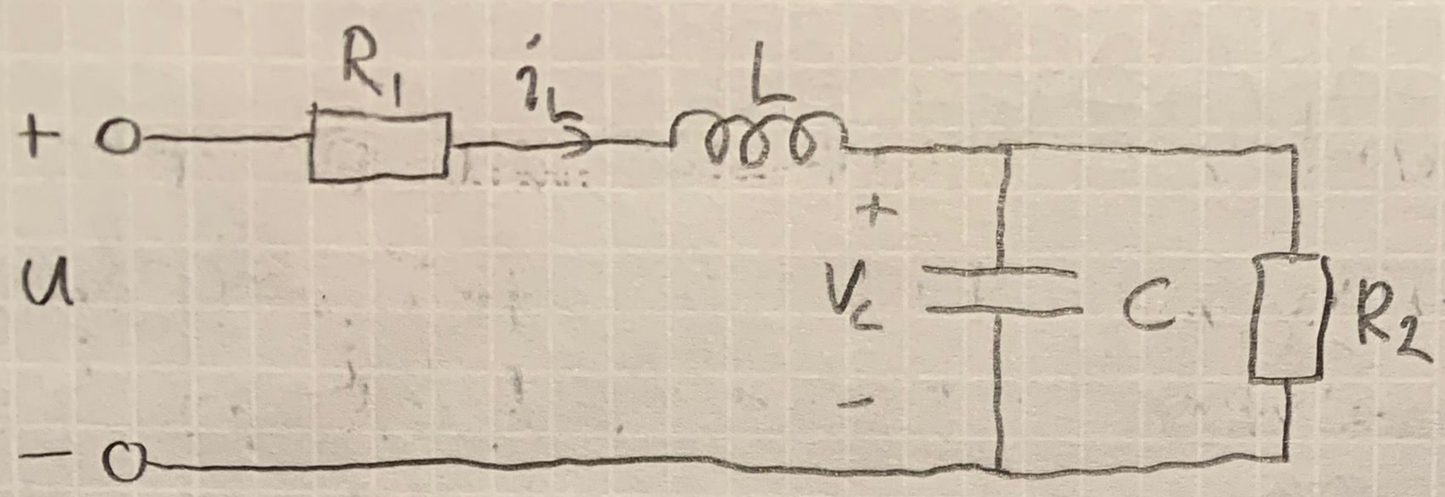
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{Scd}\cdot\frac{\lambda}{d}\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{Scd}\left(\frac{\lambda}{d}x_2 - \left(\frac{\lambda}{d}+\alpha\right)x_3\right)$$

<u>OBS</u> att $y(t) = \alpha x_3$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+\frac{\lambda}{d}}{Scd} & \frac{\lambda}{Scd^2} & 0 \\ \frac{\lambda}{Scd^2} & \frac{-2\lambda}{Scd^2} & \frac{\lambda}{Scd^2} \\ 0 & \frac{\lambda}{Scd^2} & -\frac{\lambda+d\alpha}{Scd^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{Scd} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

3,22



a) Välj tillståndsvektorn $[i_L \; V_C]^T$ och ställ upp

T.E. (tillståndsekv.) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

Lösn: $V = RI$, $C = \frac{Q}{V}$, $U_L = L\frac{di}{dt}$, Kirchhoffs $\sum u = 0$

$\Rightarrow -u + u_{R_1} + u_L + V_C = 0$. Men $u_R = R_1 i_L$ och $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow -u + R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} + V_C = 0 \Leftrightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{u - Ri_L - V_C}{L}$. (*)

Vid parallellkopplingen gäller $i_L + i_C + i_R = \{ CV_C = Q \Rightarrow C\dot{V}_C = \dot{Q} = i_C \} = C\dot{V}_C + \frac{V_C}{R_2} \Rightarrow$

$i = \frac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{V_C}{R_2}\right)$ (**). (*) och (**) skrivs nu som

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_L \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_L \\ V_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

b) Beräkna övergångsmatrisen $\Phi(t) = e^{At}$ då

$R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 1\,F$.

Lösn: OBS: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\right\} =$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}\right\} = \{\text{inversa varje element}\} =$

$= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} = \Phi(t)$.

c) Kretsen ansluts till ackumulator med försumbar Rinre och EMK: $u(t) = 2V$. Stationärt tillstånd råder i kretsen. Vid $t=0$ kortsluts kretsen

Sökt: skissa/beräkna tillståndens beteende mellan 0 och 3 s.

Lösn: $u(t) = \begin{cases} 2V & t<0 \\ 0V & t \geq 0 \end{cases}$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_L \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_L \\ V_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$ som har

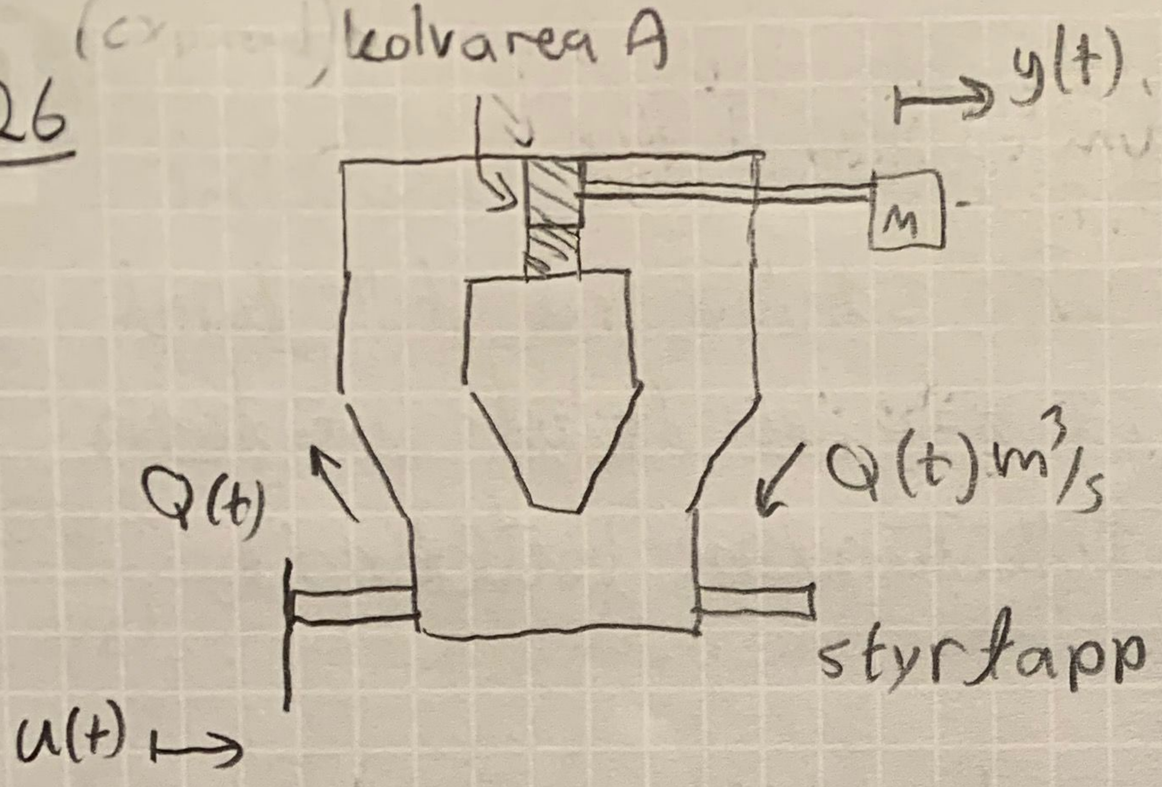
lösningen $x(t) = \Phi(t)x(0) + \underbrace{\int_0^3 \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau}_{=0}$

"stationärt tillstånd" $\Rightarrow \frac{d}{dt} = 0$ och $u = 2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_{L_0} \\ V_{C_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} i_{L_0} = 1A \\ V_{C_0} = 1V \end{matrix}$

$\Rightarrow x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$

3,26



- styrventilen ges flödet $Q = k_1 u(t) - k_2 \Delta p$, där Δp är tryckskillnad över kolven

- Kraften F driver massan M som glider utan friktion
  k_1, k_2, M, A konstanter

a) Beräkna $\frac{Y}{U}$. Lösn: 1. $F(t) = A\Delta p(t)$

2. $F(t) = M a(t)$

3. $\dot{y}(t) = \frac{Q}{A}$

$$\Rightarrow Q(t) = k_1 u(t) - k_2 \frac{F(t)}{A} = k_1 u(t) - k_2 \frac{M \ddot{y}(t)}{A}$$

$$\Rightarrow A\dot{y}(t) = k_1 u(t) - k_2 \frac{M}{A} \ddot{y}(t).$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow AsY = k_1 U - k_2 \frac{M}{A} s^2 Y \Leftrightarrow \frac{Y}{U} = \frac{k_1 A}{A^2 s + k_2 M s^2}.$$

b) vad blir M:s position om $u(t) = B\delta(t)$

Lösn: Vill beräkna $\lim_{t \to \infty} y(t) = \{\text{slutvärdessatsen}\} = \lim_{s \to 0} sY$

OBS: Ö.F. måste ha poler med negativ realdel och/eller max en pol i origo (slutvärdessatsen)

$$\Rightarrow s(A^2 + k_2 M s) = 0 \Rightarrow s_1 = 0, \; s_2 = -\frac{A^2}{M k_2}$$

$\Rightarrow$ Anta $k_2 > 0$ $\Rightarrow$ S.V.S. $\Rightarrow$